ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.003
УДК 519.214.6

Б. І. Копитко [1], https://orcid.org/0000-0003-3793-4838
М. І. Портенко [2], https://orcid.org/0000-0003-1425-0628

[1] Ченстоховський політехнічний університет, Польща
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: bohdan.kopytko@gmail.com, portenko@imath.kiev.ua

Вінерів процес у евклідовому просторі з мембраною на даній гіперплощині

Представлено членом-кореспондентом НАН України М.І. Портенком

Побудовано вінерів процес у евклідовому просторі з мембраною на заданій гіперплощині такою, що її коефіцієнт пропускання є вимірною функцією зі значеннями в проміжку [−1, 1], та доведено теорему про граничний розподіл кількості перетинів мембрани дискретною апроксимацією цього процесу за умови, що величина кроку дискретизації часу прямує до нуля. У випадку пористої мембрани граничний розподіл допускає прозору інтерпретацію.

***Ключові слова**: вінерів процес, пориста мембрана, потенціал простого шару, формула Фейнмана—Каца, локальний час.*

Процеси досліджуваного типу визначаються, крім даної гіперплощини S в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, ще й заданою на ній функцією $(q(x))_{x\in S}$ зі значеннями в проміжку $[-1,1]$, яка відіграє роль коефіцієнта пропускання мембрани. Зокрема, якщо $q(x)\equiv 1$, то відповідний процес в області $\{x\in\mathbb{R}^d : (x,\nu)\geqslant 0\}$ (через ν позначається одинична нормаль до S, а через (x,y) — скалярний добуток векторів x та y з $\mathbb{R}^d$) є нічим іншим, як вінеровим процесом з миттєвим відбиттям по нормалі на гіперплощині S, а з області $\{x\in\mathbb{R}^d : (x,\nu)<0\}$ він (процес) щезає в момент першого потрапляння на S. У випадку $q(x)\equiv -1$ відбиття буде в протилежному напрямку. Якщо $q(x)\equiv 0$, то мембрани на S немає. В усіх інших випадках маємо мембрану на S, яка частково пропускає (чи відбиває).

Відомі в літературі результати досліджень властивостей таких процесів стосувалися лише мембран з неперервними функціями $(q(x))_{x\in S}$ (див. [1—4]). Водночас цікаво і важливо, на наш погляд, дослідити поведінку відповідних процесів без припущення про неперервність функції q. Наприклад, якщо Δ — деяка ніде не щільна підмножина S, а $q(x)=1_{S\setminus\Delta}(x)$, $x\in S$ (через $1_\Gamma(\cdot)$ позначається індикаторна функція множини Γ), то така

Цитування: Копитко Б.І., Портенко М.І. Вінерів процес у евклідовому просторі з мембраною на даній гіперплощині. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 1. С. 3—10. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.01.003

мембрана мала б миттєво відбивати процес у напрямку ν у всіх точках множини $S\setminus\Delta$, тоді як на множині Δ мембрана мала би бути відсутньою. Таку мембрану можна було б назвати пористою. Постає запитання, як впливають ті чи інші властивості множини Δ на поведінку відповідного процесу і, взагалі, чи існують такі процеси.

У цій роботі ми побудуємо відповідний процес для довільної вимірної функції $(q(x))_{x\in S}$ зі значеннями в проміжку $[-1,1]$ і доведемо граничну теорему для кількості перетинів гіперплощини S дискретною апроксимацією цього процесу. Факт існування таких процесів для загальних функцій q досить просто виводиться з відомої явної формули для щільності ймовірності переходу процесу у випадку неперервної функції q. Що ж стосується граничної теореми, то вона, будучи за формою такою ж, як і у випадку неперервної функції q, потребує однак для доведення більш тонких міркувань. Цікавим також є трактування граничного розподілу у випадку пористої мембрани.

1. Щільність ймовірності переходу. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ фіксуємо вектор ν одиничної довжини і позначаємо через S гіперплощину, ортогональну до ν, точніше, $S=\{x\in\mathbb{R}^d:(x,\nu)=0\}$. Припустимо, що на ній задано вимірну функцію $(q(x))_{x\in S}$ зі значеннями в проміжку $[-1,1]$. Випадок $d=1$ є нецікавим оскільки S вироджується в точку, а функція q стає тоді числом. Тому далі вважатимемо, що $d\geqslant 2$.

Позначимо через $g(t,x,y)=(2\pi t)^{-d/2}\exp\{-|y-x|^2/2t\}$ для $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$ щільність ймовірності переходу вінерового процесу в $\mathbb{R}^d$ і введемо до розгляду функцію G тих же аргументів, яка визначається рівністю

$$G(t,x,y)=g(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,z)\frac{(y,\nu)}{\tau}g(\tau,z,y)q(z)d\sigma_z, \tag{1}$$

де внутрішній інтеграл є поверхневим по гіперплощині S. Ясно, що S є $(d-1)$-вимірним підпростором $\mathbb{R}^d$, і тому той інтеграл можна трактувати як інтеграл за лебеговою мірою в S. Вираз $(y,\nu)\tau^{-1}g(\tau,z,y)$ в (1) є похідною в напрямку ν функції $(g(\tau,z,y))_{z\in\mathbb{R}^d}$ (при фіксованих $\tau>0$ та $y\in\mathbb{R}^d$), обчисленою в точці $z\in S$. Той факт, що цей інтеграл добре визначений при $y\notin S$, випливає з рівності

$$\frac{(y,\nu)}{\tau}g(\tau,z,y)=\frac{(y,\nu)\exp\{-(y,\nu)^2/2\tau\}}{\sqrt{2\pi\tau^3}}\frac{\exp\{-|\tilde{y}-z|^2/2\tau\}}{(2\pi\tau)^{(d-1)/2}},\ z\in S,$$

в якій через $\tilde{y}$ позначено ортогональну проєкцію $y\in\mathbb{R}^d$ на гіперплощину S, тобто $\tilde{y}=y-\nu(y,\nu)$. Беручи до уваги цю рівність, можемо записати

$$\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,z)\frac{|(y,\nu)|}{\tau}g(\tau,z,y)|q(z)|d\sigma_z\leqslant\int_0^t\frac{\exp\left\{-\dfrac{(x,\nu)^2}{2(t-\tau)}-\dfrac{(y,\nu)^2}{2\tau}\right\}}{\sqrt{2\pi\tau^3}\sqrt{2\pi(t-\tau)}}|(y,\nu)|d\tau\times$$

$$\times\int_S\frac{\exp\left\{-\dfrac{|z-\tilde{x}|^2}{2(t-\tau)}-\dfrac{|\tilde{y}-z|^2}{2\tau}\right\}}{(2\pi(t-\tau))^{(d-1)/2}(2\pi\tau)^{(d-1)/2}}d\sigma_z=(2\pi t)^{-(d-1)/2}\exp\left\{-\frac{|\tilde{y}-\tilde{x}|^2}{2t}\right\}(2\pi t)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(|(x,\nu)|+|(y,\nu)|)^2}{2t}\right\}.$$

Ми скористувалися тут формулою $((y,\nu)\neq 0)$

$$\int_0^t \frac{\exp\left\{-\frac{(x,\nu)^2}{2(t-\tau)}-\frac{(y,\nu)^2}{2\tau}\right\}}{\sqrt{2\pi\tau^3}\sqrt{2\pi(t-\tau)}}|(y,\nu)|d\tau=\frac{\exp\left\{-\frac{(|(x,\nu)|+|(y,\nu)|)^2}{2t}\right\}}{\sqrt{2\pi t}},$$

яка легко встановлюється за допомогою перетворення Лапласа.

Оскільки виконується нерівність $|(x,\nu)|+|(y,\nu)|\geqslant|(y-x,\nu)|$ (як рівність у випадку $(x,\nu)\cdot(y,\nu)\leqslant 0$), то можемо твердити, що при $y\notin S$

$$\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,z)\frac{|(y,\nu)|}{\tau}g(\tau,z,y)|q(z)|d\sigma_z\leqslant\frac{\sup_{z\in S}|q(z)|}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t}\right\}.$$

Отже, інтеграли в (1) є добре визначеними, якщо $y\notin S$.

Якщо ж $y\in S$, то в припущенні, що q — неперервна функція, добре відома теорема про стрибок нормальної похідної потенціалу простого шару дає підставу стверджувати, що

$$G(t,x,y\pm)=(1\pm q(y))g(t,x,y),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in S, \tag{2}$$

де $G(t,x,y\pm)$ для $y\in S$ визначаються як границі $G(t,x,y)$, коли z наближається до y вздовж довільної кривої в замкненому конусі K з вершиною в точці y такому, що $K\subset\{z\in\mathbb{R}^d:\pm(z,\nu)>0\}\cup\{y\}$. Отже, функція G є розривною в тих точках $y\in S$, для яких $q(y)\neq 0$. Для таких y покладаємо $G(t,x,y)=(G(t,x,y+)+G(t,x,y-))/2$.

Зауважимо, що в рівності (2) відсутнє "пряме" значення згаданої похідної, що є наслідком рівності $(\nu,\nabla_z g(t,z,y))=t^{-1}(\nu,y-z)g(t,z,y)=0$, якщо $y\in S$ та $z\in S$ $(t>0)$.

Зрозуміло, що в загальному випадку, тобто коли функція q є вимірною, виконання рівностей (2) гарантувати не можна, проте функцію $G(t,x,y)$ в точках $y\in S$ можна довизначити, як і вище, покладаючи $G(t,x,y)=g(t,x,y)$, коли $y\in S$.

Як доведено в [2], у випадку неперервної функції q означена вище функція G має такі властивості:

(i) вона задовольняє рівняння Колмогорова—Чепмена: $\int_{\mathbb{R}^d}G(s,x,z)G(t,z,y)dz=$ $=G(s+t,x,y)$ при всіх $s>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$;

(ii) вона набуває лише невід'ємних значень;

(iii) виконується рівність $\int_{\mathbb{R}^d}G(t,x,y)dy=1$ при всіх $t>0$ та $x\in\mathbb{R}^d$;

(iv) справджується нерівність $G(t,x,y)\leqslant(1+\sup_{z\in S}|q(z)|)g(t,x,y)$ при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$.

Тепер зауважимо, що для кожної послідовності функцій $(q_n(x))_{x\in S}$, $n=1,2,\ldots$, такої, що $\lim_{n\to\infty}q_n(x)=q(x)$ при кожному $x\in S$ та $|q_n(x)|\leqslant 1$ при всіх $x\in S$ і $n=1,2,\ldots$, послідовність відповідних функцій $G_n(t,x,y)$ буде збігатися, коли $n\to\infty$, при всіх $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ та $y\in\mathbb{R}^d$ до функції $G(t,x,y)$, яка відповідає граничній функції q. Якщо при цьому кожна з функцій G_n, $n = 1, 2, \ldots$, задовольняє умови (i)—(iv), то гранична функція G також задовольнятиме ці умови. Цим доведено таке твердження.

Теорема 1. *Якою б не була вимірна функція* $(q(x))_{x\in S}$ *зі значеннями в проміжку* $[-1,1]$, *формула* (1) *з нею визначає функцію* G *, яка задовольняє умови (i)—(iv).*

Як наслідок, маємо факт існування неперервного процесу Маркова $(x(t))_{t\geqslant 0}$ в $\mathbb{R}^d$, щільність ймовірності переходу якого визначається рівністю (1) з будь-якою вимірною функцією $(q(x))_{x\in S}$, що задовольняє умову $|q(x)| \leqslant 1$ при всіх $x \in S$ (неперервність траєкторій такого процесу забезпечується нерівністю (iv) і відомою умовою існування неперервних модифікацій процесів Маркова).

Зауваження. Якщо $(q(x))_{x\in S}$ — неперервна функція, то рівність (2) показує, що умова $|q(x)| \leqslant 1$ при всіх $x \in S$ є необхідною для того, щоб відповідна функція G мала властивість (ii). Той факт, що ця умова є і достатньою, доведено в [2]. Варто також зауважити, що у випадку довільної вимірної обмеженої (не обов'язково одиницею) функції $(q(x))_{x\in S}$ формула (1) визначає функцію G , яка задовольняє умови (i), (iii) та (iv) і не задовольняє умову (ii), взагалі кажучи. Така функція, отже, визначає не випадковий процес, а лише псевдопроцес.

2. Гранична теорема. Фіксуємо деяку вимірну функцію $(q(x))_{x\in S}$ зі значеннями в проміжку $[-1,1]$ і нехай $(x(t))_{t\geqslant 0}$ — неперервний процес Маркова в $\mathbb{R}^d$, щільність ймовірності переходу якого визначається рівністю (1) з цією функцією q. На тому ж ймовірнісному просторі, де визначені траєкторії процесу, згідно з загальною теорією процесів Маркова (див. [5]) визначена сім'я ймовірнісних мір $(P_x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ та фільтрація $(M_t)_{t\geqslant 0}$, пов'язані співвідношенням $P_x(\{x(t)\in\Gamma\}/M_s) = \int_\Gamma G(t-s, x(s), y)\,dy$, що справджується P_x-майже напевне, якими б не були моменти часу $0 \leqslant s < t$, вектор $x \in \mathbb{R}^d$ та борельова підмножина Γ простору $\mathbb{R}^d$. Операцію інтегрування за мірою P_x позначатимемо через E_x .

Будемо розглядати процес $(x(t))_{t\geqslant 0}$ у дискретні моменти часу вигляду k/n, $k = 0, 1, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$. Скажемо, що в момент часу k/n відбувається перетин гіперплощини S послідовністю значень $x(0)$, $x(1/n)$, ... процесу, якщо $(x((k-1)/n), \nu)\cdot(x(k/n), \nu) < 0$. Для фіксованого $t > 0$ позначимо через $\eta_t^{(n)}$ кількість перетинів послідовністю $(x(k/n))_{k=0,1,\ldots}$ ($n \geqslant 1$ фіксоване) поверхні S до моменту часу $[nt]/n$ (через $[a]$ позначається ціла частина дійсного числа a). Нашою метою буде знайти граничний розподіл величини $\eta_t^{(n)}$ (належним чином знормованої), коли $n \to \infty$.

У випадку неперервної функції $(q(x))_{x\in S}$ відповідний результат отримано в [3]. Він формулюється так: $\lim\limits_{n\to\infty} E_x \exp\{i\xi\eta_t^{(n)}/\sqrt{n}\} = u(t, x, \xi)$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ та $\xi \in \mathbb{R}^1$, де функція u є єдиним обмеженим розв'язком рівняння

$$u(t, x, \xi) = 1 + i\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t d\tau \int_S g(t-\tau, x, y)\,u(\tau, y, \xi)(1-(q(y))^2)\,d\sigma_y . \tag{3}$$

Іншими словами, при фіксованому $t > 0$ розподіл величини $\eta_t^{(n)}/\sqrt{n}$ за мірою P_x збігається, коли $n \to \infty$, до граничного розподілу, характеристична функція якого задовольняє рівняння (3).

Ми доведемо, що цей результат зберігається і в загальному випадку, тобто коли припущення про неперервність функції $(q(x))_{x\in S}$ може не виконуватися.

Доведення буде складатися з таких самих кроків, що і у випадку неперервної функції q (див. [3]). Деякі з тих кроків не використовують властивості функції q бути неперервною, і тому за їх доведенням читач може звернутися до [3].

Крок 1. Величину $\eta_t^{(n)}$ можна зобразити у вигляді суми $\eta_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k^{(n)}$, де $\xi_k^{(n)} = 1$ у випадку $(x((k-1)/n), \nu)\cdot(x(k/n), \nu) < 0$ та $\xi_k^{(n)} = 0$ у протилежному випадку. Стверджується, що, коли $n\to\infty$, граничний розподіл величин $\eta_t^{(n)}/\sqrt{n}$ (за мірою P_x) існує тоді і лише тоді, коли він існує для сум

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]} h_n\left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right), \tag{4}$$

де функція $(h_n(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ визначається рівністю $h_n(x) = E_x\xi_1^{(n)}$ при $x\in\mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \ldots$; при цьому у випадку існування обидва граничні розподіли збігаються один з іншим. Це твердження було доведено в роботі А.В. Скорохода [6] для сум незалежних випадкових величин. Воно має загальний характер і переноситься на нашу ситуацію без будь-яких припущень стосовно функції $(q(x))_{x\in S}$, окрім тих, що фігурують в теоремі 1.

Крок 2. Сума (4) набуває рис інтегральної суми, якщо її записати так:

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]}\sqrt{n}h_n(x(k/n)),$$

а отже, можна сподіватися, що при $n\to\infty$ граничний розподіл цієї суми буде таким самим, як і граничний розподіл функціонала $\int_0^t \sqrt{n}h_n(x(s))\,ds, t\geqslant 0$, від нашого процесу. З іншого боку, згідно з формулою Фейнмана—Каца функція

$$u_n(t,x,\xi) = E_x\exp\left\{i\xi\sqrt{n}\int_0^t h_n(x(s))\,ds\right\},\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ \xi\in\mathbb{R}^1,$$

є єдиним обмеженим розв’язком рівняння

$$u_n(t,x,\xi) = 1 + i\xi\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d} G(t-\tau,x,y)\,u_n(\tau,y,\xi)\sqrt{n}h_n(y)\,dy. \tag{5}$$

Крок 3. Треба переконатися, що граничний перехід у рівнянні (5), коли $n\to\infty$, можливий і що він приводить до рівняння (3).

Перш ніж обґрунтовувати можливість здійснити кроки *2* і *3* в нашій ситуації, слід з’ясувати поведінку функцій $(\sqrt{n}h_n(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$, коли $n\to\infty$. Зауважимо, що в [3] за припущення про неперервність функції $(q(x))_{x\in S}$ доведено таке твердження.

Нехай для вимірної функції $(\varphi(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ виконується: $\sup_{\rho\in\mathbb{R}^1}\int_S |\varphi(x+\rho\nu)|\,d\sigma_x < \infty$, і при кожному $y\in S$ існують недотичні границі $\varphi(y+)$, $\varphi(y-)$ (див. вище означення $G(t,x,y\pm)$). Тоді справджується рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\sqrt{n}h_n(x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_S\left(\frac{1+q(x)}{2}\varphi(x-)+\frac{1-q(x)}{2}\varphi(x+)\right)d\sigma,$$

до того ж $\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|\sqrt{n}h_n(x)dx\leqslant\sqrt{2/\pi}\sup_{\rho\in\mathbb{R}^1}\int_S|\varphi(x+\rho\nu)|d\sigma_x$.

Іншими словами, послідовність функцій $(\sqrt{n}h_n)_{n=1,2,\ldots}$ збігається, коли $n\to\infty$, до несиметричної δ-функції, зосередженої на S. Наслідком цього твердження та рівностей (2) є той факт, що за припущення про неперервність функції $(q(x))_{x\in S}$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}G(t,x,y)f(y)\sqrt{n}h_n(y)dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_S f(y)(1-(q(y))^2)g(t,x,y)d\sigma_y, \tag{6}$$

якою б не була неперервна обмежена функція $(f(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$.

Це твердження було базовим у процесі здійснення граничного переходу від (5) до (3) у роботі [3]. У випадку, коли функція q може не бути неперервною, ми стверджуємо, що співвідношення (6) залишається вірним.

Лема 1. *Нехай* $(q(x))_{x\in S}$ *— вимірна функція зі значеннями в проміжку* $[-1,1]$, *а* $(G(t,x,y))_{t>0,\,x\in\mathbb{R}^d,\,y\in\mathbb{R}^d}$ *— відповідна щільність ймовірності переходу. Тоді для кожної неперервної обмеженої функції* $(f(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$ *виконується співвідношення* (6)*, до того ж* $\int_{\mathbb{R}^d}G(t,x,y)|f(y)|\sqrt{n}h_n(y)dy\leqslant\mathrm{const}\cdot\|f\|\cdot t^{-1/2}$, *де* const *не залежить ні від* n, *ні від* t, *ні від* x, *ні від* f, *а через* $\|f\|$ *позначено* $\sup_{z\in\mathbb{R}^d}|f(z)|$.

Доведення цієї леми складається з оцінок та обчислень занадто громіздких для того, щоб наводити їх тут. Зауважимо лише, що вони відрізняються від відповідних міркувань у [3] використанням такого факту: розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності з обмеженою *вимірною* початковою умовою близький до неї в *середньому* за будь-якою скінченною мірою на малих проміжках часу.

Нижченаведене твердження є ключовим у процесі доведення бажаної граничної теореми. Нехай $(\psi(t,x))_{t\geqslant 0,\,x\in\mathbb{R}^d}$ — вимірна функція з дійсними значеннями, для якої $\sup_{t\in[0,T],\,x\in\mathbb{R}^d}|\psi(t,x)|<\infty$, яким би не було $T>0$. Для $n=1,2,\ldots$ позначимо через $\psi_n(t,x)$ функцію аргументів $t\geqslant 0$ та $x\in\mathbb{R}^d$, яка визначається рівністю

$$\psi_n(t,x)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}G(t-\tau,x,y)\psi(\tau,y)\sqrt{n}h_n(y)dy.$$

Лема 2. *Для даних чисел* $\varepsilon>0$, $N>0$ *та* $T>0$ *існує таке число* $\delta>0$, *що нерівність* $|\psi_n(t',x')-\psi_n(t'',x'')|<\varepsilon$ *виконується при всіх* $n=1,2,\ldots$, $t'\in[0,T]$, $t''\in[0,T]$, $x'\in\mathbb{R}^d$,

$x'' \in \mathbb{R}^d$ і для кожної функції $(\psi(t,x))_{t\geqslant 0,\, x\in\mathbb{R}^d}$, що задовольняє умову $\sup\limits_{t\in[0,T],\, x\in\mathbb{R}^d} |\psi(t,x)| \leqslant N$, якщо тільки виконується нерівність $|t'-t''|+|x'-x''|<\delta$.

Доведення цієї леми можна знайти в [3]. У ньому *не використовується* припущення про неперервність функції $(q(x))_{x\in S}$.

Тепер сформулюємо основний результат.

Теорема 2. *Нехай $(x(t))_{t\geqslant 0}$ — неперервний процес Маркова в $\mathbb{R}^d$, щільність ймовірності переходу якого визначається рівністю* (1) *з довільною вимірною функцією $(q(x))_{x\in S}$ такою, що $|q(x)|\leqslant 1$ при всіх $x\in S$. Якщо $\eta_t^{(n)}$ означає кількість перетинів гіперплощини S послідовними значеннями процесу $(x(t))_{t\geqslant 0}$: $x(0)$, $x(1/n)$, ..., $x([nt]/n)$ ($t>0$ фіксоване), то справджується співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} E_x \exp\{i\xi\eta_t^{(n)}/\sqrt{n}\} = u(t,x,\xi)$, якими б не були $x\in\mathbb{R}^d$ та $\xi\in\mathbb{R}^1$, де $u(t,x,\xi)$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння* (3).

Доведення. Як вже зазначалося, замість дослідження асимптотичної поведінки величини $\eta_t^{(n)}$, коли $n\to\infty$, можна досліджувати поведінку суми (4). Для характеристичної функції такої суми можна скласти різницево-інтегральне рівняння і за допомогою леми 2 довести, що розв'язок того рівняння асимптотично, коли $n\to\infty$, такий самий, як і розв'язок рівняння (5) (деталі в [3]).

Далі, лема 2 та діагональний метод дають змогу виділити таку послідовність $n_k\to\infty$, що $u_{n_k}(t,x,\xi)$ збігається до деякої неперервної функції $u(t,x,\xi)$, $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^d$, $\xi\in\mathbb{R}^1$ рівномірно відносно $x\in\mathbb{R}^d$ та локально рівномірно відносно $t\geqslant 0$ та $\xi\in\mathbb{R}^1$. Але тоді лема 1 дає підставу твердити, що ця гранична функція задовольняє рівняння (3). Єдиність обмеженого розв'язку цього рівняння означає, що вся послідовність $(u_n)_{n=1,2,\dots}$ збігається до того розв'язку, чим і завершується доведення теореми.

3. Пористі мембрани. Для довільної борельової підмножини Δ гіперплощини S, яка не містить у собі жодної кулі в S, покладемо $q(x)=1_{S\setminus\Delta}(x)$, $x\in S$. Тоді в точках множини Δ мембрани немає, а в точках доповнення до неї відбувається миттєве відбиття в напрямку ν. Назвемо таку мембрану пористою.

Цікаво, що оскільки $(1_{S\setminus\Delta}(x))^2 = 1_{S\setminus\Delta}(x)$, $x\in S$, граничний розподіл кількості перетинів такої мембрани дискретною апроксимацією відповідного процесу буде описуватися рівнянням

$$u(t,x,\xi) = 1 + i\xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau,x,y)u(\tau,y,\xi)1_\Delta(y)\,d\sigma_y.$$

Розв'язок цього рівняння є характеристичною функцією такого функціонала від вінерового процесу $(w(t))_{t\geqslant 0}$ в $\mathbb{R}^d$: $\sqrt{2/\pi}\int_0^t 1_\Delta(\tilde{w}(\tau))\,d\eta_\tau$, $t\geqslant 0$, де $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ — локальний час у нулі одновимірного вінерового процесу $((w(t),\nu))_{t\geqslant 0}$, а $\tilde{w}(t) = w(t) - \nu(w(t),\nu)$.

Отже, у випадку $q(x)=1_{S\setminus\Delta}(x)$, $x\in S$, відповідний граничний розподіл у теоремі 2 є розподілом часу перебування в множині Δ процесу $(\tilde{w}(t))_{t\geqslant 0}$, але не *реального* часу, а *локального* часу в нулі ортогонального (до $\tilde{w}$) процесу $((w(t),\nu))_{t\geqslant 0}$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Aryasova O.V., Portenko M.I. One class of multidimensional stochastic differential equations having no property of weak uniqueness of a solution. *Theory Stoch. Process.* 2005. **11**, № 3—4. P. 14—28.
2. Портенко Н.И. Обобщённые диффузионные процессы. Киев: Наук. думка, 1982. 208 с.
3. Portenko N., Yefimenko S. On the number of crossings of a partli reflecting hyperplane by a multidimensional Wiener process. *Stochastic differential systems*. Lecture notes in control and information sciences, vol 96. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. P. 194—203. https://doi.org/10.1007/BFb0038935
4. Kopytko B.I., Portenko M.I. On a multidimensional Brownian motion with a membrane located on a hyperplane and acting in an oblique direction. *Український математичний конгрес—2001. Секція 9. Теорія ймовірностей і математична статистика*: Тези доп. Київ, 2002. С. 73—84.
5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Москва: Физматгиз, 1963. 860 с.
6. Скороход А.В. Некоторые предельные теоремы для аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин. *Укр. матем. журн.* 1961. **13**, № 4. С. 67—78.

Надійшло до редакції 05.12.2021

REFERENCES

1. Aryasova, O. V. & Portenko, M. I. (2005). One class of multidimensional stochastic differential equations having no property of weak uniqueness of a solution. Theory Stoch. Process., 11, No. 3-4, pp. 14-28.
2. Portenko, N. I. (1982). Generalized diffusion processes. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
3. Portenko, N. & Yefimenko, S. (1987). On the number of crossings of a partli reflecting hyperplane by a multidimensional Wiener process. In Stochastic differential systems. Lecture notes in control and information sciences, vol. 96 (pp. 194-203). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/BFb0038935
4. Kopytko, B. I. & Portenko, M. I. (2002). On a multidimensional Brownian motion with a membrane located on a hyperplane and acting in an oblique direction. Ukrainian Mathematical Congress–2001. Section 9. Probability Theory and Mathematical Statistics (pp. 73-84). Kyiv.
5. Dynkin, E. B. (1963). Markov Processes. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
6. Skorokhod, A. V. (1961). Some limit theorems for additive functionals of a sequence of sums of independent random variables. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 13, No. 4, pp. 67-78 (in Russian).

Received 05.12.2021

B.I. Kopytko[1], https://orcid.org/0000-0003-3793-4838
M.I. Portenko[2], https://orcid.org/0000-0003-1425-0628

[1] Czestochowa University of Technology, Poland
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: bohdan.kopytko@gmail.com, portenko@imath.kiev.ua

BROWNIAN MOTION IN A EUCLIDEAN SPACE
WITH A MEMBRANE LOCATED ON A GIVEN HYPERPLANE

For the Brownian motion in a Euclidean space, a membrane located on a given hyperplane and acting in the normal direction is constructed such that its so-called permeability coefficient can be given by an arbitrary measurable function defined on that hyperplane and taking on its values in the interval $[-1, 1]$. In all the previous investigations on the topic that coefficient was supposed to be a continuous function. A limit theorem for the number of crossings of the hyperplane by a discrete approximation of the process constructed is proved. A curious interpretation for the limit distribution in that theorem can be given in the case of the membrane being porous.

Keywords: *Brownian motion, partly permeable membrane, single layer potential, Feynman—Kac formula, local time.*