УДК 519.95

ПРИМІТИВНА ПРОГРАМНА АЛГЕБРА ОБЧИСЛЮВАНИХ ФУНКЦІЙ НА МНОЖИНІ ГРАФІВ

© Снігур Н.М.

Національний Технічний Університет України "Київський Політехнічний Інститут"
Факультет електроніки
12 корпус, вул. ак. Янгеля 16/9, м. Київ, 03056, Україна
e-mail: *nastena_sss@mail.ru*

Abstract. This paper is devoted to studying certain properties of primitive program algebra of n-ary functions defined for the set of finite grafs. The generating set for the partially recursive funtions algebra is found. The results presented are the continuation of the previously carried out research for vector, matrix, relation and table functions.

Вступ

Серед дисциплін та методів дискретної математики теорія графів (а особливо алгоритмів на графах) знаходить найбільш широке затосування в програмуванні [1]. *Дана робота представляє собою коротке викладення результатів, що стосуються дослідження обчислюваних функцій та предикатів над графами.* Обчислюваність вводиться згідно нумераційного підходу [2]. В якості інструменту дослідження вибрано апарат примітивних програмних алгебр (ППА). Основна увага приділена пошуку породжуючих множин. Зазначимо, що отримані в роботі результати доповнюють результати для векторних, матричних, реляційних та табличних функцій [3, 4, 5].

Усі використані та невизначені в роботі поняття та позначення розуміються в сенсі [5].

1. Основні поняття

Носій ППА можуть складати або функції, залежні від змінних [3], або n-арні функції і предикати [4]. Далі ППА розуміються в другому сенсі, тому під функціями (предикатами) маються на увазі n-арні функції (предикати) для $n = 1, 2, \ldots$, хоча при їх позначенні перевага віддається не операторній, а термальній формі запису, зважаючи на її компактність [2] (п. 2.1).

Сигнатуру ППА складають операції суперпозиції, розгалуження та $(n+1)$-арного циклювання, що представляють собою адекватні уточнення стандартних структур управління алголоподібних мов програмування. Для зручності подальшого викладення та розуміння роботи видається корисним дати формальне визначення цих операцій (більш детально див. [6]).

1. Під *суперпозицією* мається на увазі $(m+1)$-арна операція $S^{x_{i_1},\ldots,x_{i_m}}$: $\langle f, f_1, \ldots, f_n \rangle \to g$, де $g = f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, f_1, \ldots, x_{i_m-1}, f_m, \ldots, x_n)$, $m \le n$.
2. *Розгалуження* представляє собою $(m+1)$-арну операцію таку, що $\diamondsuit^{m+1}$: $\langle h, f_1, \ldots, f_m \rangle \to g$, де $h(x_1, \ldots, x_n)$ — функція, із скінченною множиною значень $\{h_1, \ldots, h_m\}$ та $g(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $h(x_1, \ldots, x_n) = h_i$.

3. Нарешті *циклювання* задається так: $\underset{y_1,\ldots,y_n}{*} : \langle p,\ f_1,\ \ldots,\ f_n\rangle \to g$, де p — предикат, а f_i, g — функції. Значення $g(x_1,\ldots,x_n)$ визначається наступним чином. Розглянемо послідовність кортежів $\{(\mathrm{y}_i^1,...,\mathrm{y}_i^n),\ i=0,\ 1,\ \ldots\}$, де $\mathrm{y}_0^j := x_j$, $y_{i+1}^j := f_j(y_i^1,\ldots,y_i^n)$, $i=0,1,\ldots, j=\overline{1,n}$. Знайдемо перший кортеж $(y_k^1,\ldots,y_k^n)$ такий, що $p(y_k^1,\ldots,y_k^n) = \mathrm{X}$. Покладемо $g(x_1,\ldots,x_n) = y_k^1$. (Якщо такого кортежу в послідовності не існує, то $g(x_1,\ldots,x_n)$ вважається невизначеним).

Перш ніж розглянути функції над графами спочатку введемо поняття самого графа. Тут має сенс зробити застереження, що існують різні способи визначення графа, в залежності від його подальшого застосування. Надалі будемо притримуватись термінології, вживаної у джерелі [1].

Означення 1. Під (скінченим) *орієнтованим графом* g будемо розуміти сукупність двох множин – непорожньої зліченої множини V (множини *вершин*) та множини E впорядкованих пар різних елементів V (множини *ребер* або *дуг*), яка, взагалі кажучи, може бути й порожньою:

$$g = \langle V, E\rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subset V \times V.$$

При цьому якщо $v_1, v_2 \in V$ та $e = (v_1, v_2) \in E$, то вершини v_1 та v_2 графа g називаються *суміжними*, а кожна з них в свою чергу називається також *інцідентною дузі* e.

Якщо $e = (v_1, v_2)$, то кажуть, що дуга e *направлена від вершини* v_1 *до вершини* v_2. Дуга e вважається *додатно інцідентною* її кінцевій вершині v_2. Кількість дуг, які є додатно інцідентними вершині v_1, називається *додатним ступенем* v_1 і позначається через $\delta^+(v_1)$. *Від'ємний ступінь* v_1 визначається аналогічно і позначається $\delta^-(v_1)$.

Зауваження 1. Нижче будемо розглядати скінченні орієнтовані псевдографи (т. б.графи з петлями – дугами, які з'єднують вершину саму з собою). Множину всіх таких графів позначимо через $\mathbb{G}$.

Далі під функціями розуміємо часткові функції з аргументами і значеннями із $\mathbb{G}$, а під предикатами – також часткові предикати на $\mathbb{G}$. Через $A_\mathbb{G}$ позначимо ППА, носій якої складають всі багатомісні частково-рекурсивні функції і предикати на $\mathbb{G}$. Породжуючу множину алгебри $A_\mathbb{G}$ назвемо її *повною системою*, повну систему ППА – I_m^n *базисом*, якщо будь-яка її підсистема, що отримується видаленням якого-небудь предиката або якої-небудь функції, відмінної від селекторної, вже не буде повною.

В силу зліченності множини V не буде суттєвим обмеженням, якщо покласти $V = \mathbb{N}$. При цьому на множині вершин графа вводиться цілком природна впорядкованість. Оскільки розглядаються скінчені графи з вершинами, що належать зліченій множині $\mathbb{N}$, то очевидно, що множина всіх таких графів також є зліченою, а отже повинна існувати її ефективна нумерація $\alpha_\mathbb{G} : \mathbb{N} \to \mathbb{G}$ (визначення в сенсі [7]).

Основою всього подальшого викладення є наступні відомі теореми (теорема про ізоморфізм та теорема про базис ППА), які в даній роботі можуть бути сформульовані наступним образом:

Теорема 1 (про ізоморфізм ППА)**.** Бієктивне відображення $\theta_\alpha : A^{\text{чр}}_{\mathbb{G}} \to A^{\text{чр}}_{\mathbb{N}}$, яке співставляє кожній функції на $\mathbb{G}$ певну арифметичну функцію (в заданій нумерації $\alpha_{\mathbb{G}}$), задає ізоморфізм ППА $A^{\text{чр}}_{\mathbb{G}}$ на ППА $A^{\text{чр}}_{\mathbb{N}}$, де $A^{\text{чр}}_{\mathbb{N}}$ – ППА усіх чр-функцій та -предикатів над $\mathbb{N}$.

Теорема 2 (про базис ППА)**.** Існує I^n_m-базис алгебри $A^{\text{чр}}_{\mathbb{G}}$, що складається з точністю до селекторних функцій з двох функцій та одного предиката.

При побудовах в ППА часто є зручними логічні зв'язки для предикатів; вони легко моделюються в ППА за допомогою всюди істинного і всюди хибного предикатів (p_{i}, p_{x}), наприклад

$$p(x_1,\ldots,x_n) \vee q(y_1,\ldots,y_m) = \Diamond(p(x_1,\ldots,x_n), p_{\text{i}}(x_1), \Diamond(q(y_1,\ldots,y_m), p_{\text{i}}(x_1), p_{\text{x}})).$$

Для сполучень $\neg$ та $\&$ аналогічно.

Позначимо через $[\sigma]_{\mathfrak{B}}$ замикання множини σ операціями сукупності $\mathfrak{B}$, а Ω – сукупність введених вище операцій ППА.

2. ППА чр-функцій і чр-предикатів на множині скінченних орієнтованих графів

Будь-якому графу поставимо у відповідність вектор наступним чином:

1. Першим елементом поставимо номер першої вершини (кореня графа).
2. Далі перерахуємо усі суміжні з першою вершини, які відповідають її від'ємно інцідентним дугам.
3. Поставимо нуль.
4. Якщо вершина не має від'ємно інцідентних дуг, то її пропускаємо.
5. Повторюємо той самий процес для усіх вершин графа.
6. В кінці перерахуємо номери усіх ізольованих вершин, також розділяючи їх нулями.

Позначимо це відображення через $\phi : \mathbb{G} \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{N}^i$, де $\mathbb{N}^0 = \{\Lambda\}$ – порожній вектор. Очевидно, ϕ – ін'єкція, але не сюр'єкція. Позначимо, $\mathscr{V} := \phi(\mathbb{G})$. Вочевидь, ця множина є рекурсивною в нумерації $\alpha_{\mathbb{G}}$.

Тоді для будь-якої граф-функції $\mathscr{F} : \mathbb{G}^n \to \mathbb{G}$ існує її *векторний образ* $F : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ такий що $F(\phi(g_1),\ldots,\phi(g_n)) \simeq \phi\mathscr{F}(g_1,\ldots,g_n)$ для усіх $g_1,\ldots,g_n$. Для предикатів аналогічно.

Розглянемо наступні функції на множині графів (граф-функції):

1. $C^{\mathbb{G}}_0$ – константна функція: $C^{\mathbb{G}}_0(g) = g^1_0$;
2. $S_{\mathbb{G}}$ – збільшення на одиницю номера першої вершини графа;
3. $\cup$ – об'єднання графів (об'єднання множин вершин та дуг);
4. $\setminus$ – різниця графів (різниця множин);
5. E_e – виділення першої дуги (підграфа з двох вершин та дуги);
6. R – утотожнення кореня графа з першою від'ємно інцідентною вершиною: ;
7. A – стягування першої вершини з тією від'ємно інцідентною їй, яка має найменший номер (нова вершина має номер від'ємно інцідентної);

8. $\cup^*$ – об'єднання графів g_1 та g_2 із додаванням дуги із кореня графа g_1 в корінь графа g_2;
9. E_v – виділення першої вершини графа;

Покладемо

$$\sigma_{\mathbb{G}} := \{C_0^{\mathbb{G}}, S_{\mathbb{G}}, \cup, \setminus, E_e, R, A, \cup^*, E_v, =_{\mathbb{G}}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\ldots}.$$

З метою моделювання векторних функцій граф-функціями побудємо кодуюче відображення $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{G}$ наступним чином

$$\Phi(\Lambda) = \Delta_{\mathbb{G}},$$
$$\Phi(v) = \{(1, v_1), \ldots, (n, v_n)\}$$

Таким чином отримаємо, що для довільної векторної функції $F(x_1, \ldots, x_n)$ функція $\mathscr{F}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ є її *граф-моделлю*, якщо $\mathscr{F}(\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_n)) \simeq \Phi(F(v_1, \ldots, v_n))$ для всіх $v_1, \ldots, v_n \subset \mathbb{N}^*$. Аналогічно для предиката.

Лема 1. Для будь-яких векторних чр-функцій та чр-предикатів існують їх граф-моделі, які належать замиканню $[\sigma_{\mathbb{G}}]_\Omega$.

Нехай $\psi := \phi \cdot \Phi$. Очевидно, що $\psi : \mathbb{G} \to \Phi(\mathscr{V})$ – бієкція. Через χ позначимо яке-небудь розширення відображення ψ^{-1}. Граф-функції ψ та χ грають ролі кодуючої та декодуючої функцій відповідно.

Істина наступна лема.

Лема 2. Нехай $\mathscr{F}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – чр-граф-функція, а $\mathscr{H}(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ – граф-модель векторного образа функції $\mathscr{F}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тоді

$$\mathscr{F}(A_1, \ldots, A_n) = \chi(\mathscr{H}(\psi(A_1), \ldots, \psi(A_n)))$$

для усіх A_i, $i = \overline{1, n}$.

Аналогічно, нехай $\mathscr{P}(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ – чр-граф-предикат, а $\mathscr{K}(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ – граф-модель векторного образа цього предиката. Тоді

$$\mathscr{P}(A_1, \ldots, A_n) = \mathscr{K}(\psi(A_1), \ldots, \psi(A_n))$$

для усіх A_i, $i = \overline{1, n}$.

Справедлива така теорема

Теорема 3. $\sigma_{\mathbb{G}}$ є породжуючою множиною алгебри $A_{\mathbb{G}}^{\text{чр}}$.

Ідея доведення. Скористаємось результатом, отриманим для векторних функцій в [5], а саме, множина $\sigma_{\mathbb{N}^*} = \{\Pi, \circ, C_0, S, =_{\mathbb{N}^*}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\ldots}$ є базисом ППА $A_{\mathbb{N}^*}^{\text{чр}}$, де $\Pi(au) = u$, $u_1 \circ u_2 = u_1 u_2$, $C_0(u) = 0, S(au) = (a+1)u$.

За допомогою граф-функцій $\sigma_{\mathbb{G}}$ можна побудувати граф-моделі усіх векторних базисних функцій, а отже, й граф-моделі усіх частково-рекурсивних векторних функцій.

Окрім того, також справедливе включення $\psi, \chi \in [\sigma_{\mathbb{G}}]$. А отже, в силу леми 2, твердження теореми доведено. □

Висновки

В представленій роботі дано короткий огляд результатів автора, які стосуються вивчення ППА чр-функцій над графами $A^{\text{чр}}_{\mathbb{G}}$. Зокрема, знайдено породжуючу множину алгебри $A^{\text{чр}}_{\mathbb{G}}$.

В якості наступного кроку здійснюваного дослідження планується знайти I^n_m-базис вказаної ППА, в міру можливості скоротивши кількість базисних функцій.

Також видається корисним розглянути таку саму задачу для інших класів частково-рекурсивних функцій з огляду на різні практичні застосування.

Список литературы

1. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 304 с.
2. *Мальцев А. И.* Алгорнтмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
3. *Буй Д. Б., Редько В. Н.* Прнмитнвные программные алгебры целочисленных и словарных функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – №10. – С. 69–71.
4. *Буй Д. Б., Мавлянов А. В.* К теории программных алгебр // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, №6. – С. 761–764.
5. *Буй Д. Б., Редько В. Н.* Примитивные программные алгебры. 1, II // Кибернетика. – 1984. – №5. – С. 1–7; – 1985. – №1. – С.28–33.
6. *Буй Д. Б.* Примитивные программные алгебры: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 22с.
7. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. – М. : Наука, 1977.— 416 с.

Статья поступила в редакцию 09.10.2009