УДК 519.86

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЕНЕЖНЫХ РЕСУРСОВ, ПОСТУПАЮЩИХ ПО ИНВЕСТИЦИОННЫМ КОНТРАКТАМ

© Блыщик В.Ф., Донской Д.В.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *donskoy2_simf@mail.ru*

Abstract. The mathematical model of the optimum planning of the use of monies facilities acting from investors is represented in the article, with the purpose of implementation of some great number of projects providing the receipt of income. By the decision of tasks proper to this model, there is the optimum sequence of start of the chosen projects in time, providing a maximum of income.

Введение и постановка задачи

Наиболее общий случай функционирования экономического объекта, ведущего предпринимательскую деятельность, сводится к учету и планированию финансовых потоков. Абстрагируясь от конкретных видов экономической деятельности предприятия, можно говорить, что предприятие – формальный объект, который получает денежные ресурсы, расходует их и извлекает прибыль. Указанные действия происходят последовательно во времени.

Получение денежных ресурсов обычно называют инвестированием – вложением капитала с целью получения дохода. Инвестирование влечет денежные расходы, определяемые вложениями и согласованной прибылью инвесторов. Прибыль определяется аналогично: она возникает, когда само предприятие – объект управления – является инвестором.

Задача, рассматриваемая в статье, состоит в построении динамичской модели оптимизации прибыли предприятия, работающего с инвесторами и являющегося инвестором для других предприятий. Модель должна учитывать движение только денежных ресурсов.

1. Построение математической модели

Будем рассматривать временной промежуток планирования $(0;T]$, разбивая его на T интервалов $(0;1];(1;2];\ldots;(j-1;j];\ldots;(T-1;T]$ условной длины, равной единице.

Инвесторы, сотрудничающие с предприятием, предоставляют ему определенные денежные средства. Эти средства, вместе с другими имеющимися у предприятия активами, составляют начальную сумму S_0, которой предприятие обладает к началу планирования (временной промежуток $(0;1]$). Согласно договорам с инвесторами, предприятие должно выплачивать инвесторам суммы V_j, $j \in \overline{1,T}$, в промежутках планирования $(j-1;j]$.

Суммы V_j известны и определены согласно договорам инвестирования. В эти суммы входят дивиденды. Согласно договорам определен срок выплат, который и определяет номер j полуинтервала $(j-1;j]$ в промежутке планирования. Таким образом известна величина V_j и, собственно, индекс j.

Модель должна обеспечить покрытие исходной суммой средств S_0 и суммой денежных поступлений за период планирования всех суммарных выплат за этот период. При этом необходимо, чтобы все выплаты инвесторам были произведены своевременно (по известным индексам j в суммах V_j).

Введем следующие обозначения.

$A_1,\dots,A_i,\dots,A_m$ – проекты (экономические мероприятия, в которых данное предприятие может выступить инвестором в промежутке планирования с целью извлечения прибыли);

$\Pi_1,\dots,\Pi_i,\dots,\Pi_m$ – прибыль по этим проектам;

$C_1,\dots,C_i,\dots,C_m$ – затраты денежных средств по этим проектам;

$R_1,\dots,R_i,\dots,R_m$ – возвращаемые суммы: $R_i = C_i + \Pi_i$;

$\tau_1,\dots,\tau_i,\dots,\tau_m$ – время оборота денег: через τ_i единиц времени затраты C_i «вернутся» с прибылью Π_i, обеспечивая вклад R_i;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый проект начат в промежутке планирования } j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Потребуем выполнения следующих ограничений

1. Каждый проект в промежутке планирования может быть реализован не более одного раза:

$$\sum_{j=1}^{T} x_{ij} \le 1, \quad i=\overline{1,m}. \tag{1}$$

2. Некоторые проекты с номерами из множества $I^* \subset \{1,2,\dots,m\}$ являются обязательными для реализации. Множество I^*, вообще говоря, может быть и пустым.

$$\sum_{j=1}^{T} x_{ij} = 1, \quad i \in I^*. \tag{2}$$

Для формализации дальнейших ограничений будем использовать обозначение

$$Sg^+(a) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } a \ge 0; \\ 0, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Тогда $Sg^+(t-j-\tau_i)=1$, если проект с номером i завершится в промежутке времени $(t-1;t]$ возвращением суммы $R_i = C_i + \Pi_i$; здесь j определяет промежуток $(j-1;j]$ начала проекта A_i, если он будет выбран для реализации.

Сумма

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} R_i x_{ij} Sg^+(t-j-\tau_i)$$

определяет объем денежных средств, которые будут возвращены от начала планирования до промежутка $(t-1;t]$ включительно.

Сумма

$$\sum_{j=1}^{t} V_j$$

определяет денежные средства, которые согласно обязательствам должны быть выплачены инвесторам данного предприятия за время $(0;t]$. Сумма

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} C_i x_{ij}$$

определяет суммарные затраты на запуск проектов за время $(0;t]$.

Объем выплат за время от 0 до t составит

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} C_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{t} V_j$$

3. Условие, обеспечивающее возможность всех выплат по договорам с инвесторами, приводит к T неравенствам

$$S_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} R_i Sg^{+}(t-j-\tau_i)x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t} C_i x_{ij} - \sum_{j=1}^{t} V_j \geq 0, \quad t=\overline{1,T} \tag{3}$$

Требуется максимизировать линейную целевую функцию от $m \times T$ булевых переменных

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{T} \Pi_i x_{ij} \to \max, \tag{4}$$

что соответствует максимизации прибыли за период планирования $(0;T]$, при одновременном выполнении ограничений (1),(2) и (3).

2. Вычислительные особенности семейства задач, определенных моделью (1)-(4), и их решение

Значения $Sg^{+}(t-j-\tau_i)$, входящие в левые части неравенств (3) заранее вычислить невозможно, поскольку для проекта A_i начало его выполнения, которое определяется номером j промежутка $(j-1;j]$, неизвестно.

Этот номер становится известным, когда получено решение $\{x_{ij};\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,T}\}$. Выражения $Sg^{+}(t-j-\tau_i)$ вносят в ограничения (3) нелинейность, и рассматриваемое семейство задач, которое будет далее обозначаться $Z_{(1)-(4)}$, вообще говоря, является нелинейным. Следовательно, вычислительная проблема $Z_{(1)-(4)}$ не менее сложна чем $Z_{\text{ЦЛП}}$ с $\{0,1\}-$переменными, т.е. задачи, определяемые соотношениями (1)-(4), в целом не менее сложны, чем задачи целочисленного линейного программирования. Поэтому проблема $Z_{(1)-(4)}$ является по меньшей мере NP-трудной [1] и для решения задач, определяемых моделью (1)-(4), целесообразно использование алгоритма типа «GREEDY» [2].

Алгоритм решения задачи состоит в следующем.

1° $x_{ij} := 0, \quad i = \overline{1, m}$;
упорядочить номера проектов по неубыванию прибыльности:
$\frac{\Pi_{i_1}}{C_{i_1}} \geq \frac{\Pi_{i_2}}{C_{i_2}} \geq \cdots \geq \frac{\Pi_{i_m}}{C_{i_m}}$.
Полученный начальный нулевой набор значений переменных может не быть допустимым решением: ограничение (3), вообще говоря, может быть не выполненным из-за недостатка выбранных проектов.

2° В двойном цикле по $i = i_1, i_2, \ldots, i_m$ и $j = 1, 2, \ldots T$ осуществляется присваивание $x_{ij} := 1,\ i \notin I^*$, пока не будут удовлетворены все ограничения (1)-(3), и далее, пока выбранное решение остается допустимым.

Согласно приведенному алгоритму, в процессе его выполнения предикат «решение является допустимым» может принимать значение «0», затем – «1», а потом – снова «0», что является условием окончания решения. В частности может оказаться, что этот предикат в силу ограничения (2) сразу же примет значение «1», а затем, обратившись в «0», определит момент окончания алгоритма.

Очевидно, что сложность алгоритма не превышает $O(m^2T^3)$, т.е. он является полиномиальным, что является свойством «GREEDY» алгоритмов.

Заключение

Представленная в статье модель адекватно описывает процесс оптимального планирования использования денежных средств, поступающих по инвестиционным контрактам, для реализации проектов, обеспечивающих прибыль. Предполагается, что эта модель будет использоваться регулярно, так что промежутки планирования будут следовать непосредственно друг за другом.

Соответствующая построенной модели вычислительная проблема $Z_{(1)-(4)}$ по крайней мере не менее сложна, чем проблемы класса «NPH» [1]. Поэтому для ее решения разработан приближенный алгоритм типа «GREEDY», имеющий полиномиальную сложность (принадлежащий классу «PTIME»).

Алгоритм успешно используется одной из фирм, осуществляющей коммерческую деятельность.

В дальнейшем целесообразно провести исследование модификации приведенного в статье алгоритма, учитывающую «надежность» p_i партнера по проекту $A_i,\ i = \overline{1, m}$, и применения в пункте 1° упорядочения

$$\frac{p_{i_1}\Pi_{i_1}}{C_{i_1}\tau_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2}\Pi_{i_2}}{C_{i_2}\tau_{i_2}} \geq \cdots \geq \frac{p_{i_m}\Pi_{i_m}}{C_{i_m}\tau_{i_m}}.$$

Такое упорядочение дает предпочтение надежным, быстрым в реализации, высокоприбыльным проектам.

Список литературы

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. *Липский В.* Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 213 с.

Статья поступила в редакцию 15.11.2010