УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ ВИРОДЖУЄТЬСЯ В ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

© Чухрай Л.В.

Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка,
факультет кібернетики
пр-т академіка Глушкова-2, корпус 6, м.Київ 03680, Україна
e-mail: *l.chukhray@mail.ru*

Abstract. The inverse problem for a parabolic equation which degenerates at the initial time is studied. Representation of the decision in the integral equation system is received. The solution method is constructed by a method of Green's function. Using Schauder fixed point theorem the existence and uniqueness of solution are proved.

Вступ

Теорія обернених задач теплопровідності почала розвиватись відносно недавно – на початку 70-их років, але завдяки складності відповідних математичних моделей та широкому їх застосуванню у різноманітних галузях науки й техніки привернула до себе увагу багатьох авторів. За час розвитку задач такого типу багато авторів займались їхнім дослідженням. Найближчі за тематикою дослідження проводили М.І. Іванчов, Н.В. Салдіна, Т.Д. Джураєв, Г.Н. Смірнова та інші. В загальному випадку науковці розглядають лінійні параболічні рівняння другого порядку $u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$ в області $Q = -\infty < t \le T;\ 0 < x < +\infty$. Ними було досягнуто значних результатів у встановлені умов існування та єдиності розв'язку задач такого типу.

Завдання даної роботи полягає у встановленні умов існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння, яке вироджується в початковий момент часу: $t^2u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),\ \ (x,t) \in \Omega_T$, де $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h; 0 < t < T\}$.

Особливістю даної роботи є те, що невідомий коефіцієнт $a(t)$ залежить лише від часу та коефіцієнт при похідній вироджується в нулі. Результат цієї роботи може допомогти в розгляді задачі, де коефіцієнт при u_t буде $t^\gamma,\ -\infty < \gamma < +\infty$.

1. Формулювання задачі

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h; 0 < t < T\}$ розглядаємо обернену задачу для параболічного рівняння:

$$t^2u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{1.1}$$

коли задано крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad t \in (0,T], \tag{1.2}$$

$$u(h,t) = \mu_2(t), \qquad t \in (0,T] \tag{1.3}$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \qquad t \in (0,T]. \tag{1.4}$$

В роботі встановлюються умови існування та єдиності розв'язку $(a(t), u(x,t), u_x(x,t))$ з класу $C[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \bigcap C^{1,0}\overline{(\Omega_T)}$, $a(t) > 0$, що задовольняють рівняння (1.1), крайові умови (1.2),(1.3) і умову перевизначення (1.4).

2. Зведення задачі до системи інтегральних рівнянь

Спочатку розглянемо частковий випадок задачі (1.1)-(1.4).

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h; 0 < t < T\}$ розглядаємо задачу для параболічного рівняння

$$t^2 u_{0t} = a(t) u_{0xx} + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T \tag{2.1}$$

з умовами (1.2),(1.3).

Побудуємо розв'язок задачі (2.1),(1.2),(1.3) методом функції Гріна.

Для відшукування $u_0(x;t)$ використаємо функцію $G_1(x;t;\xi;\tau)$:

$$G_1(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{-(x-\xi+2hn)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(\frac{-(x+\xi+2hn)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right)$$

де $\theta(t) = \int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^2} d\tau$, $(\theta(t) - \theta(\tau)) = \int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)}{\sigma^2} d\sigma.$

Запишемо $u_0(x,t)$ у наступному вигляді:

$$u_0(x,t) = \int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^2} \mu_1(\tau) G_{1\xi}(x,t,0,\tau) d\tau - \int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{\tau^2} \mu_2(\tau) G_{1\xi}(x,t,h,\tau) d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau) \frac{f(\xi,\tau)}{\tau^2} d\xi d\tau. \tag{2.2}$$

Теорема 1. Нехай функції $\mu_1(t), \mu_2(t) \in C[0,T]$, $f(x,t) \in C\overline{(Q_T)}$ і задовольняють умову:

$$|f(x,t)| \le C_4 t^{\gamma+1}; \quad \forall t \quad \gamma > 0 \tag{2.3}$$

Тоді $|u_0(x,t)| \le C_1$.

Доведення. Скористаємось деякими нерівностями:

$$\int\limits_0^{\theta(t)} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x+2hn) \exp\left(\frac{-(x+2hn)^2}{4z} \right) dz \le C_5; \tag{2.4}$$

$$\int\limits_0^{\theta(t)} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x+h(2n-1)) \exp\left(\frac{-(x+h(2n-1))^2}{4z} \right) dz \le C_6; \tag{2.5}$$

$$\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi \le 1. \tag{2.6}$$

Досліджуємо I_1 використовуючи (2.4):

$$|I_1| \le \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau)\mu_1(\tau)}{\tau^2(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(x+2hn)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)(x+2hn)d\tau \right| \le$$

$$\le \left| \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(x+2hn)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)(x+2hn)d\theta(\tau) \right|.$$

Провівши заміну змінних $\theta(t)-\theta(\tau)=z; dz=-d\theta(\tau)$ отримаємо:

$$|I_1| \le \left| \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta(\tau)} \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x+2hn)\exp\left(\frac{-(x+2hn)^2}{4z}\right)dz \right| \le C_7.$$

Аналогічно досліджуємо I_2 використовуючи (2.5). Досліджуємо I_3:
Оскільки виконується (2.6), то

$$|I_3| \le \left| \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi;\tau)}{\tau^2}d\xi d\tau \right| \le C_3 \int_0^t \tau^{\gamma-1}d\tau \le C_9 t^{\gamma}.$$

Отже $u_0(x;t) \le C_7 + C_8 + C_9 t^{\gamma} \le C_1$. □

З умови перевизначення (1.4) випливає:

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{u_x(0,t)}$$

Тому потрібно знайти $u_{0x}(0,t)$. Похідну будемо шукати з $u_0(x,t)$, яка подана в (2.2). Для цього використаємо відомі властивості $G_1(x,t,\xi,\tau)$:

$$G_{1x} = -G_{2\xi};\ G_{1\xi} = -G_{2x};\ G_{1x\xi} = -G_{2\xi\xi};\ \ \frac{a(\tau)}{\tau^2}G_{2\xi\xi} = -G_{2\tau}.$$

де

$$G_2(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(\frac{-(x-\xi+2hn)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(\frac{-(x+\xi+2hn)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right).$$

Можемо записати $u_{0x}(x,t)$:

$$u_{0x}(0,t) = \int_0^t \left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^2} - \mu_1'(\tau)\right)G_2(0,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t \left(\mu_2'(\tau) - \frac{f(h,\tau)}{\tau^2}\right) G_2(0,t,h,\tau)d\tau + \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^2} \int_0^h f_x(\xi,\tau) G_2(0,t,\xi,\tau)d\xi. \qquad (2.7)$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

$$1)\frac{f(0,\tau)}{\tau^2} - \mu_1'(\tau) \le C_2\tau^{\gamma-1}, 0<\gamma<1 \qquad (2.8)$$

$$2)\mu_2'(\tau) - \frac{f(h,\tau)}{\tau^2} \le C_3\tau^{\gamma-1}, 0<\gamma<1 \qquad (2.9)$$

$$3)f_x(\xi,\tau) \le C_4\tau^{\gamma+1}, 0<\gamma<1 \qquad (2.10)$$

Тоді $u_{0x}(0,t) \le C_1 t^{\gamma}$.

Доведення. Використаємо нерівності:

$$G_2(0,t,\xi,\tau) \le C_5 + \frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}; \qquad (2.16)$$

$$\int_0^h |G_2(x,t,\xi,\tau)|d\xi = 1. \qquad (2.17)$$

Доведення проводиться аналогічно, як у теоремі 1.

□

З теорем 1 та 2 можна зробити висновок про поведінку $u_0(x;t)$ та $u_{0x}(x;t)$. Маючи зображення розв'язку задачі (2.1),(1.2),(1.3) можна звести задачу (1.1)-(1.4) до системи інтегральних рівнянь наступним чином. Позначимо $v(x,t) = u_x(x,t)$. Тоді $u(x,t)$ подамо у вигляді:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau))d\xi d\tau. \qquad (2.13)$$

Відповідно можна знайти $v(x,t) = u_x(x,t)$ з рівності (2.13):

$$v(x,t) = u_{0x}(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau))d\xi d\tau. \qquad (2.14)$$

Відповідно до нових позначень умову перевизначення (1.4) можна переписати у вигляді:

$$a(t)v(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in (0,T]. \qquad (2.15)$$

Ми отримали систему трьох рівнянь (2.13)-(2.15). Розв'язком цієї системи рівнянь буде $(a(t), u(x,t), v(x,t)) \in C[0,\mathrm{T}] \times C^{2,1}\overline{(\Omega_T)} \times C^{1,0}\overline{(\Omega_T)}$.

3. Існування розв'язку

В попередньому розділі ми звели задачу (1.1)-(1.4) до системи рівнянь. Розв'язком цієї системи є трійка $(a(t), u(x,t), v(x,t))$. Тепер потрібно довести існування цього розв'язку.

З теорем 1 та 2 ми маємо поведінку для $u_{0x}(x,t)$ та $u_0(x,t)$. Враховуючи ці результати можемо сформулювати дві теореми.

Теорема 3. Нехай функції $b(\xi,\tau)$ та $c(\xi,\tau)$ неперервні і задовольняють умови:

$$|b(\xi;\tau)| \leq C_2\tau^{\alpha}, \alpha > 1-\gamma \tag{3.1}$$

$$|c(\xi;\tau)| \leq C_3\tau^{\beta}, \beta > 1 \tag{3.2}$$

тоді $u(x;t) \leq C_6$.

Доведення. Використовуючи (2.13) запишемо:

$$\left|\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}u_{\xi}(\xi,\tau)+\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}u_{\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| + \left|\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau)d\xi d\tau\right| \leq$$

$$\leq C_1C_2\int_0^t \tau^{\alpha+\gamma-2}d\tau + C_1C_3\int_0^t \tau^{\beta-2}d\tau \leq C_4t^{\alpha+\gamma-1}+C_5t^{\beta-1}. \tag{3.3}$$

З рівності (3.3) можна зробити висновок:

$$|u(x;t)| \leq C_1 + C_4t^{\alpha+\gamma-1}+C_5t^{\beta-1} \leq C_6.$$

де C_6 - деяка константа. □

Теорема 4. Нехай функції $b(\xi,\tau)$ та $c(\xi,\tau)$ неперервні і задовольняють умови:

$$|b(\xi,\tau)| \leq C_2\tau^{\alpha}, \alpha > \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

$$|c(\xi,\tau)| \leq C_3\tau^{\beta}, \beta > \frac{1}{2}+\gamma. \tag{3.5}$$

тоді $u_x(x,t) \leq C_7t^{\gamma}$.

Доведення. Використаємо нерівність:

$$\int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|d\xi \leq \frac{C_4}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{3.6}$$

Доведення проводиться аналогічно, як у теоремі 3. □

З теорем (3.1) та (3.2) можна визначити α та β, які б задовольняли обидві теореми. Отже, $\alpha > 1$ та $\beta > 1$.

Запишемо умову перевизначення:

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{u_x(0,t)}, \quad t \in (0,T]. \tag{1.4}$$

Для того, щоб оцінити $a(t)$ знизу і зверху потрібно відповідно оцінити $u_x(0,t)$.

Теорема 5. Нехай виконуються умови:

1)
$$C_1 t^{\gamma-1} \leq \frac{f(0;t)}{t^2} - \mu_1'(t),\ \forall t \leq t_1,\ 0 < \gamma < 1 \tag{3.7}$$

2)
$$0 \leq (\mu_2'(t) - \frac{f(h,t)}{t^2}),\ \forall t \leq t_1 \tag{3.8}$$

3)
$$0 \leq f_x(x,t), \quad \forall\ t \leq t_1,\ \ 0 \leq x \leq h \tag{3.9}$$

Тоді $u_x(0,t) \geq \frac{C_2}{2} t^\gamma; \quad 0 < \gamma < 1; \quad t \in [0, t_1]$.

Доведення.

$$u_x(0,t) = \int\limits_0^t \left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^2} - \mu_1'(\tau)\right) G_2(0,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\mu_2'(\tau) - \frac{f(h,\tau)}{\tau^2}\right) G_2(0,t,h,\tau)d\tau + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau^2} \int\limits_0^h f_x(\xi,\tau) G_2(0,t,\xi,\tau)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2} u_\xi(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2} u(\xi,\tau)\right) d\xi d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Достатньо дослідити знизу I_1, бо з (3.8), (3.9) $I_2 \geq 0$ та $I_3 \geq 0$:

Використаємо нерівність:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{z}\right) \geq \frac{1}{h} \int\limits_{\frac{h}{\sqrt{z}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma.$$

При $n \neq 0$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{(f(0,\tau) - \mu_1'(\tau)\tau^2)}{\tau^2 \sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(\frac{-h^2 n^2}{\theta(t) - \theta(\tau)}\right) d\tau \geq C_1 \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{h}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma \geq C_1 \int\limits_0^t \tau^{\gamma-1} d\tau \int\limits_{\frac{C_3\sqrt{t\tau}}{\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma.$$

Проведемо заміну змінних: $\tau = zt; \quad d\tau = tdz$

$$I_1 \geq C_4 t^\gamma \int_0^1 z^{\gamma-1} dz \int_{\frac{C_2\sqrt{tz}}{\sqrt{1-z}}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma \geq C_4 t^\gamma \int_0^{\frac{1}{2}} z^{\gamma-1} dz \int_{C_2\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma \geq C_5 t^\gamma.$$

При $n = 0$: $I_1 \geq 0$.

Отже, $u_{0x}(0,t) \geq \dfrac{C_2}{2} t^\gamma$.

Оскільки

$$\int_0^t \int_0^h \left| G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2} u_\xi(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2} u(\xi,\tau)) d\xi d\tau \right| \leq \frac{C_2}{2} t^{\gamma+\alpha}, \alpha > 0.$$

Тому звідси випливає те, що $\exists t_1 > 0; t_1 \leq T$: $u_x(0,t) \geq \dfrac{C_2}{2} t^\gamma; 0 < \gamma < 1; t \in [0, t_1]$. □

$\mu_3(t)$ представимо у вигляді $\mu_3(t) = \nu_0(t) t^\gamma;\ \ \nu_0(t) > 0$.

Тоді $a(t) \leq \dfrac{2\nu_0(t)}{C_2} \leq A_1$.

Для того, щоб оцінити $a(t)$ знизу потрібно $u_x(x;t)$ оцінити зверху.

$$u_x(x,t) \leq C_1 t^\gamma + \int_0^t \int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)| (C_2 \tau^{\alpha-2} u_\xi(\xi,\tau) + C_3 \tau^{\beta-2} u(\xi,\tau)) d\xi d\tau.$$

Позначимо: $v(t) = \max\limits_{0 \leq x \leq h} |u_x(x,t)|$ та $a_{\min}(t) = \min\limits_{0<\tau<t} a(\tau)$.

З відповідних позначень можна записати наступні нерівності:

$$v(t) \leq C_1 t^\gamma + C_5 \int_0^t \frac{\tau^{\beta-2}}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau + C_6 \int_0^t \frac{v(\tau)\tau^{\alpha-2}}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} d\tau.$$

$$v(t) \leq C_1 t^\gamma + \frac{C_5}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{t^{\frac{1}{2}} \tau^{\beta-\frac{3}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{C_6}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int_0^t \frac{v(\tau) t^{\frac{1}{2}} \tau^{\alpha-\frac{3}{2}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Провівши певні перетворення, отримаємо наступну нерівність:

$$a_{\min}(t) \geq \frac{\nu_0(t)}{C_{11} + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} t^{\beta-\gamma-\frac{1}{2}} + \left(C_{11} + \frac{C_{12}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} t^{\beta-\gamma-\frac{1}{2}} \right) \frac{C_8 t^{\alpha-1}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \exp\left(\int_0^t \frac{C_8 t^\alpha}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \right)}.$$

Перетворимо цю нерівність до наступного вигляду:

$$C_{11} a_{\min}(t) + \sqrt{a_{\min}(t)} \left(C_{12} t^{\beta-\gamma-\frac{1}{2}} + C_{13} t^{\gamma+\alpha-1} \right) \exp\left(\int_0^t \frac{C_8 t^\alpha}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \right) +$$

$$C_{14}t^{\gamma+\alpha+\frac{1}{2}}\exp\left(\int\limits_0^t \frac{C_8 t^\alpha}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\right) \geq \nu_0(t). \tag{3.10}$$

Отже, $\exists t_2 > 0$; $t_2 \leq T$: $t^{\alpha-1}\exp\left(\int\limits_0^t \frac{C_8 t^\alpha}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\right) \leq 1.$

Тоді (3.10) подамо у вигляді:

$$C_{11}a_{\min}(t) + C_{15}\sqrt{a_{\min}(t)}t^\gamma + C_{14}t^{\beta-\frac{1}{2}} \geq \nu_0(t). \tag{3.11}$$

Ми отримали квадратну нерівність відносно $\sqrt{a_{\min}(t)}$ (3.11). Для того, щоб розв'язати цю нерівність потрібно знайти дискримінант.

$$D = (C_{15}t^\gamma)^2 + 4C_{11}(\nu_0(t) - C_{14}t^{\beta-\frac{1}{2}}).$$

Отже, $\exists t_3 > 0$; $t_3 \leq t$: $C_{14}t^{\beta-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\nu_0(t)$, то $a_{\min}(t) \geq A_0 > 0$.

Звідси та з попередньо доведеного випливає, що $A_0 \leq a(t) \leq A_1$ на $[0, t_4]$,

де $t_4 = \min\{t_1, t_2, t_3\}$.

Позначимо через U множину функцій $\{(a, u, v) \in C[0, t_4] \times (C(\overline{\Omega_T}))^2\}$: $A_0 \leq a(t) \leq A_1$, $|u(x,t)| \leq C_1$, $\frac{C_2 t^\gamma}{2} \leq v(x,t) \leq C_1 t^\gamma$. Очевидно, що множина U є опуклою обмеженою замкненою. Введемо відображення P, що визначено на множині U наступним чином:

$$P\psi(x,t) = (\psi_1(x,t), \psi_2(x,t), \psi_3(t))$$

де

$$\psi_1(x,t) = u_0(x,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau))d\xi d\tau$$

$$\psi_2(x,t) = u_{0x}(x,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau))d\xi d\tau$$

$$\psi_3(t) = \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)}$$

Доведемо існування розвязку за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку. Згідно з отриманими оцінками в теоремах 3, 4, 5 оператор P переводить множину U в себе Покажемо, що оператор P є неперервним на U. Для цього використаємо теорему Арцела. Покажемо, що для довільного $\epsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$|P_i(x_2,t_2) - P_i(x_1,t_1)| < \varepsilon, i = 1,2$ $|P_3(t_2) - P_3(t_1)| < \varepsilon$ $\forall(\psi_1(x,t), \psi_2(x,t), \psi_3(t)) \in U$ якщо $|t_2 - t_1| < \delta, |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \omega_{t_0}$. Доведення компактності покажемо на прикладі одного рівняння, що входить до інтегрального оператора P_3 Потрібно показати, що $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\forall\psi_3(t) \in U$ виконується оцінка

$$|P_3(\psi_3(t+\delta)) - P_3(\psi_3(t))| < \varepsilon; \qquad \forall t \in (0,T]$$

$$P_3(\psi_3(t) = \frac{\mu_3(t)t^\gamma}{t^\gamma u_x(0,t)} = \frac{\nu(t)}{u_x^0(0,t)}$$

де $\dfrac{u_x(0,t)}{t^\gamma} = u_x^0(0,t)$; $\nu(0) \neq 0$; $u_x^0(0,0) \neq 0$.

Зводимо попередню оцінку до оцінки різниці значень доданків, що входять до $P(a(t))$ у точках $t+\delta$ і t.

$$|P_3(\psi_3(t+\delta)) - P_3(\psi_3(t))| = \left|\frac{\nu(t+\delta)}{u_x^0(0,t+\delta)} - \frac{\nu(t)}{u_x^0(0,t)}\right| =$$

$$\left|\frac{\nu(t+\delta)u_x^0(0,t) - \nu(t)u_x^0(0,t+\delta)}{u_x^0(0,t+\delta)u_x^0(0,t)}\right|.$$

Покажемо, що знаменник обмежений знизу:

Оскільки $\dfrac{u_x(0;t)}{t^\gamma} = u_x^0(0;t) \geq \dfrac{\mathrm{const}\cdot t^\gamma}{t^\gamma}$, то $|u_x^0(0;t+\delta)u_x^0(0;t)| \geq \mathrm{const}$:

В чисельнику додавши і віднявши $\nu(t)u_x^0(0;t)$ отримаємо:

$$|\nu(t+\delta)u_x^0(0;t) - \nu(t)u_x^0(0;t) + \nu(t)u_x^0(0;t) - \nu(t)u_x^0(0;t+\delta)| \leq |u_x^0(0;t)||\nu(t+\delta) -$$

$$\nu(t)| + |\nu(t)||u_x^0(0;t+\delta) - u_x^0(0;t)| \leq \mathrm{const}\frac{\varepsilon}{2} + |\nu(t)||u_x^0(0;t+\delta) - u_x^0(0;t)|.$$

Потрібно показати, що $|u_x^0(0;t+\delta) - u_x^0(0;t)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Подамо $u_x(0;t)$ у вигляді:

$$u_x(0,t) = \int_0^t \left(\frac{f(0,\tau)}{\tau^2} - \mu_1'(\tau)\right) G_2(0,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left(\mu_2'(\tau) - \frac{f(h,\tau)}{\tau^2}\right) G_2(0,t,h,\tau)d\tau + \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^2} \int_0^h f_x(\xi,\tau)G_2(0,t,\xi,\tau)d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}u_\xi(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.12)$$

де $I_k \sim I_k(t), k = 1,2,3,4$.

$$|u_x^0(0,t+\delta) - u_x^0(0,t)| = \left|\frac{u_x(0,t+\delta)}{t+\delta^\gamma} - \frac{u_x(0,t)}{t^\gamma}\right| \leq \left|\frac{I_1(t+\delta)}{(t+\delta)^\gamma} - \frac{I_1(t)}{t^\gamma}\right| + \left|\frac{I_2(t+\delta)}{(t+\delta)^\gamma} -\right.$$

$$\left.\frac{I_2(t)}{t^\gamma}\right| + \left|\frac{I_3(t+\delta)}{(t+\delta)^\gamma} - \frac{I_3(t)}{t^\gamma}\right| + \left|\frac{I_4(t+\delta)}{(t+\delta)^\gamma} - \frac{I_4(t)}{t^\gamma}\right|. \quad (3.13)$$

Для подальшого доведення нерівності (3.13) будемо користуватись (2.8)-(2.10) та відомою нерівністю:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n \neq 0} \exp \frac{-n^2h^2}{z} \leq \mathrm{const}. \quad (3.14)$$

Також накладемо обмеження на значення t: $t \in [T_0, t_0]$ де $T_0 > 0$. Отже, кожен з доданків, що входять у нерівність (3.13) розглянемо окремо:

$$\left|\frac{I_1(t+\delta)}{(t+\delta)^\gamma} - \frac{I_1(t)}{t^\gamma}\right| = \left|\frac{1}{(t+\delta)^\gamma\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t+\delta}\frac{(f(0,\tau)-\tau^2\mu_1'(\tau))}{\tau^2\sqrt{\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}}\times\right.$$

$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-h^2n^2}{\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}\right)d\tau - \frac{1}{t^\gamma\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t}\frac{(f(0,\tau)-\tau^2\mu_1'(\tau))}{\tau^2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\times$$

$$\left.\times\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-h^2n^2}{(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)d\tau\right| \le \left|\frac{1}{(t+\delta)^\gamma\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{t+\delta}\frac{(f(0,\tau)-\tau^2\mu_1'(\tau))}{\tau^2\sqrt{\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-h^2n^2}{\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}\right)d\tau\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t}\left[\frac{(f(0;\tau)-\tau^2\mu_1'(\tau))}{(t+\delta)^\gamma\tau^2\sqrt{\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}}\times\right.\right.$$

$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-h^2n^2}{\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}\right) - \frac{(f(0,\tau)-\tau^2\mu_1'(\tau))}{t^\gamma\tau^2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\times$$

$$\left.\left.\times\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-h^2n^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)\right]d\tau\right| = |L_1| + |L_2|.$$

Розглянемо окремо $|L_1|$ при $n = 0$:

$$|L_1| = \left|\frac{1}{(t+\delta)^\gamma\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{t+\delta}\frac{(f(0,\tau)-\tau^2\mu_1'(\tau))}{\sqrt{\tau^2\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}}d\tau\right| \le \frac{C_2}{(t+\delta)^\gamma\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{t+\delta}\frac{\sqrt{t+\delta}\tau^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t+\delta-\tau}}d\tau \le$$

$$\le \frac{C_2T^{\gamma-\frac{1}{2}}}{(t+\delta)^{\gamma-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{t+\delta}\frac{d\tau}{\sqrt{t+\delta-\tau}} \le \text{const}\cdot\delta^{1/2}.$$

Використавши (2.8) та (3.14)розглянемо окремо L_1 при $n \ne 0$:

$$|L_1| = \left|\frac{2}{(t+\delta)^\gamma\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{t+\delta}\frac{(f(0,\tau)-\tau^2\mu_1'(\tau))}{\sqrt{\tau^2\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{-h^2n^2}{\theta(t+\delta)-\theta(\tau)}\right)d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{2C_2C_5}{\sqrt{\pi}}\int\limits_t^{t+\delta}\tau^{\gamma-1}d\tau \le \text{const}\cdot\delta.$$

Аналогічно для $|L_2|$.

Отже, $|I_1(t+\delta) - I_1(t)| < \text{const}\cdot\delta$, де const-константа, що залежить від $A; A_0; T; T_0; C_k$, $k = 1,2,3,4,5$.

Аналогічно, розглянувши $|I_k(t+\delta) - I_k(t)|$ отримаємо:

$$|u_x(0,t+\delta) - u_x(0,t)| \le \text{const}\cdot\delta.$$

Нам потрібно було показати, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \psi_3(t) \in N$ виконується оцінка

$$|P_3(\psi_3(t+\delta)) - P_3(\psi_3(t))| < \varepsilon; \qquad \forall t \in (0,T].$$

Тобто

$$\left| \frac{u_x(0,t+\delta) - u_x(0,t)}{u_x(0,t+\delta)u_x(0,t)} \right| < \varepsilon.$$

Для інших доданків операторів P_1, P_2, P_3 доведення проводиться аналогічно. Отже, існування розв'язку доведено.

4. Єдиність розв'язку

Припускаючи, що існує два розв'язки задачі (1.1)-(1.4) доведемо єдиність розв'язку цієї задачі.

Теорема 6. Нехай виконується умова:

$$1)\mu_3(t) \neq 0; \qquad \forall t \in (0,T] \tag{4.1}$$

Тоді розв'язок задачі (1.1)-(1.4) - єдиний.

Доведення. Припустимо, що існує два різні розв'язки задачі (1.1)-(1.4). Позначимо ці розв'язки через $(a_1(t), u_1(x,t))$ та $(a_2(t), u_2(x,t))$. Розглянемо задачу для їх різниці $(m(t), j(x,t))$:

де $m(t) = a_1(t) - a_2(t)$; $j(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$t^2(u_{1t} - u_{2t}) = a_1(t)u_{1xx} - a_2(t)u_{2xx} + c(x,t)(u_1(x,t) -$$

$$u_2(x,t)) + b(x,t)(u_{1x}(x,t) - u_{2x}(x,t)).$$

Додамо і віднімемо до правої частини рівняння $a_1(t)u_{2xx}$. Отримаємо

$$t^2 j_t(x,t) = a_1(t)j_{xx}(x,t) + m(t)u_{2xx}(x,t) + c(x,t)j(x,t) + b(x,t)j_x(x,t), (x,t) \in \Omega_T \tag{4.2}$$

$$j(0,t) = 0, \qquad t \in (0,T] \tag{4.3}$$

$$j(h,t) = 0, \qquad t \in (0,T] \tag{4.4}$$

$$a_1(t)j_x + m(t)u_{2x} = 0, \qquad t \in (0,T] \tag{4.5}$$

Оскільки ми маємо розв'язок задачі (1.1)-(1.4), то аналогічно можемо записати розв'язок задачі (4.2)-(4.5). Позначимо $n(x,t) = j_x(x,t)$. Використовуючи (2.19):

$$j(x,t) = \int\limits_0^t \frac{m(\tau)}{\tau^2} d\tau \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau) u_{2xx}(\xi,\tau) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau) \left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2} n(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2} j(\xi,\tau) \right) d\xi d\tau. \tag{4.6}$$

$$n(x,t) = \int\limits_0^t \frac{m(\tau)}{\tau^2} d\tau \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) u_{2xx}(\xi,\tau) d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}n(\xi,\tau)+\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}j(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau. \qquad (4.7)$$

$j_x(x;t)$ підставимо в умову перевизначення

$$m(t)u_{2x}(0,t)=-a_1(t)\int\limits_0^t\frac{m(\tau)}{\tau^2}d\tau\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)u_{2xx}(\xi,\tau)d\xi+$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi;\tau)}{\tau^2}u_\xi(\xi;\tau)+\frac{c(\xi;\tau)}{\tau^2}u(\xi;\tau)\right)d\xi d\tau.$$

Ми одержали інтегральне рівняння. Запишемо його в наступному вигляді:

$$m(t)u_{2x}(0,t)=-a_1(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^h\left[\frac{m(\tau)}{\tau^2}u_{2xx}(\xi,\tau)+\right.$$

$$\left.\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}n(\xi,\tau)+\frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}j(\xi,\tau)\right]G_{1x}(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (4.8)$$

Якщо ми покажемо, що $u_{2xx}\le t^{\gamma+\frac{1}{2}}$, то умовою, при якій задача матиме єдиний розв'язок буде умова $u_{2x}(0,t)\neq 0$, де

$$u_{2x}(0,t)=\frac{\mu_3(t)}{a_2(t)}.$$

Це випливає з розв'язку для системи (4.2)-(4.5) та рівняння (4.8). Доведення того, що $u_{2xx}\le t^{\gamma+\frac{1}{2}}$ проводиться аналогічно як і для $u_x(x,t)$.

Запишемо умову перевизначення, враховуючи $u_{2xx}(x,t)\sim t^{\gamma+\frac{1}{2}}$ і $u_{2x}(x,t)\sim t^{\gamma}$:

$$m(t)u_{2x}(0,t)=-a_1(t)\int\limits_0^t\frac{m(\tau)}{\tau^2}d\tau\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)u_{2xx}(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\frac{b(\xi;\tau)}{\tau^2}u_\xi(\xi;\tau)+\frac{c(\xi;\tau)}{\tau^2}u(\xi;\tau)\right)d\xi d\tau. \qquad (4.9)$$

де

$$u_{2x}(0,t)=\frac{\mu_3(t)}{a_2(t)}$$

Ми одержали систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (4.6), (4.7), (4.9). Ця система матиме єдиний розв'язок при умові $u_{2x}(0,t)\neq 0$. Це виконуватиметься за рахунок $u_{2xx}(x,t)\sim t^{\gamma+\frac{1}{2}}$ і $u_{2x}(x,t)\sim t^{\gamma}$. Права частина (4.9) матиме таку ж поведінку, як $u_{2x}(0,t)$. Це очевидно, якщо в (4.9) підставити $u_{2xx}(x,t)$. □

Висновки

У даній роботі розглядалось питання існування та єдиності розв'язку задачі

$$t^2u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_t \tag{1.1}$$

коли задано крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad t \in (0,T] \tag{1.2}$$

$$u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T] \tag{1.3}$$

та умову перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in (0,T] \tag{1.4}$$

Отже, можна зробити висновок про отримані результати:

1. Задача (1.1)-(1.4) зводиться до системи інтегральних рівнянь:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau))d\xi d\tau. \tag{2.13}$$

$$v(x,t) = u_{0x}(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(\frac{b(\xi,\tau)}{\tau^2}v(\xi,\tau) + \frac{c(\xi,\tau)}{\tau^2}u(\xi,\tau))d\xi d\tau. \tag{2.14}$$

$$a(t)v(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in (0,T]. \tag{2.15}$$

Розв'язком цієї системи рівнянь буде

$$(a(t), u(x,t), v(x,t)) \in C[0,t] \times C^{2,1}\overline{(\Omega_T)} \times C^{1,0}\overline{(\Omega_T)}.$$

2. Доводиться існування розв'язку. Сформульовано 3 теореми які доводять існування розв'язку задачі (1.1)-(1.4):
3. Доводиться єдиність розв'язку задачі (1.1)-(1.4). Сформульовано теорему, яка доводить єдиність розв'язку.

Список литературы

1. *Тихонов А.Н.,Самарський А.А.* Уравнения математической физики// М:Наука – 1972. – 762с.
2. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами: Препринт. - К.: ІСДО, – 1995. – 84с.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ// М:Наука, – 1977. – 744с.
4. *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин* Элементи теории функции и функционального анализа// М:Наука – 1976. – 543с.

Статья поступила в редакцию 26.03.2010