

УДК 004.94

DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.131-145

Д. А. Верлань*, канд. техн. наук,

В. В. Понеділок**, канд. техн. наук

* ТОВ «Науково-виробниче підприємство «ІНФОТЕХ», м. Київ

** Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ВИРОДЖЕНИХ ЯДЕР

Використання математичних моделей динамічних об'єктів у вигляді інтегральних рівнянь типу Вольтерри дозволяє ефективно розв'язувати широкий клас теоретичних та практичних дослідницьких задач. Традиційним підходом щодо розв'язання цих рівнянь є застосування квадратурних алгоритмів різного порядку точності, яка залежить від вигляду ядра Вольтерри та кроку дискретизації, що часто призводить до значної кількості обчислювальних операцій та труднощів програмної реалізації в загальному випадку. Перспективним є використання алгоритмів методу вироджених ядер для розв'язання рівнянь Вольтерри II роду, які мають суттєву перевагу за обсягом обчислювальних операцій по відношенню до традиційних алгоритмів прямого методу квадратур. Розглянуто алгоритми побудови резольвенти, що дозволяє забезпечити ефективність резольвентного методу розв'язування рівнянь даного класу. Задача застосування даного методу до розв'язування рівнянь Вольтерри (або рівнянь іншого типу) призводить до отримання низки нових чисельних алгоритмів, властивості яких повинні бути дослідженими. Практична цінність алгоритмів, що розробляються, полягає у можливості створення на їх основі відповідних програмних засобів, які не містяться у існуючих серійних пакетах комп'ютерного моделювання. При цьому з'являється можливість порівнювати отримані алгоритми з відомими квадратурними алгоритмами за швидкодією, як найбільш важливому показнику для динамічних моделей систем керування.

Ключові слова: *інтегральне рівняння Вольтерри II роду, квадратурний метод, метод вироджених ядер, резольвента.*

Вступ. Традиційним призначенням методу вироджених ядер є розв'язок лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма II роду. Тому задача застосування даного методу до розв'язування рівнянь Вольтерри (або рівнянь іншого типу) приводить до отримання низки нових чисельних алгоритмів, властивості яких повинні бути дослідженими. При цьому з'являється можливість порівнювати отримані алгоритми з відомими квадратурними алгоритмами за швидкодією,

як найбільш важливого показнику для динамічних моделей систем керування [1].

Практична цінність алгоритмів, що розробляються, полягає у можливості створення на їх основі відповідних програмних засобів, які не містяться у існуючих серійних пакетах комп'ютерного моделювання.

Основна частина. При чисельній реалізації інтегрального рівняння Вольтерри II роду

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, s)\varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

перехід до дискретних обчислювальних схем здійснюється за допомогою виразу

$$\varphi(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, s)\varphi(s) ds = f(x_i). \quad (2)$$

Беручи значення x_i в якості вузлів квадратурної формули і замінюючи інтеграл скінченною сумою, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь [2–5]

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) \tilde{\varphi}(x_j) \cong f(x_i), \quad (3)$$

де $x_j = j \cdot h$, h — крок квадратури, $\tilde{\varphi}(x_i)$ — наближені значення функції $\varphi(x_i)$ в вузлах x_i . Для побудови ефективного алгоритму доцільно отримати рекурентний вираз, користуючись тим, що це можна зробити саме для рівнянь Вольтерри, на відміну від рівнянь Фредгольма. Застосовуючи, наприклад, формулу трапецій можна записати наступні розрахункові вирази:

для змінного кроку (*загальний випадок*):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1), \quad \tilde{\varphi}(x_2) = \frac{\left(f(x_2) + \frac{h_2}{2} K(x_2, x_1) \cdot \varphi(x_1) \right)}{1 - \frac{h_2}{2} K(x_2, x_2)},$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{\left(f(x_i) + \frac{h_2}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h_i}{2} K(x_i, x_i)}, \quad (4)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; для постійного кроку ($h = const$):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1),$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{\left(f(x_i) + \frac{h}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + h \sum_{j=2}^{i-1} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h}{2} K(x_i, x_i)}. \quad (5)$$

Слід відзначити, що при використанні традиційного розрахункового виразу (5) час обчислення шуканої функції залежить від кількості кроків дискретизації, збільшення яких призводить до збільшення кількості обчислювальних операцій. Розрахунковий вираз, отриманий у випадку ядра, що розділяється, із застосуванням формули трапецій, має вигляд: при змінному кроці дискретизації (загальний випадок):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1),$$

$$\tilde{\varphi}(x_2) = \frac{f(x_2) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m a_l(x_2) \cdot \beta_l(x_1) \cdot \varphi(x_1)}{1 - \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m a_l(x_1) \cdot \beta_l(x_1)},$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) =$$

$$= \frac{f(x_i) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \beta_l(x_1) \varphi(x_1) + \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \beta_l(x_j) \varphi(x_j)}{1 - \frac{h_i}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \beta_l(x_i)}, \quad (6)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; при постійному кроці дискретизації ($h = \text{Const}$):

$$\tilde{\varphi}(0) = f(0),$$

$$\tilde{\varphi}(x_i) = \frac{f(x_i) + h \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(x_j) \cdot \varphi(x_j)}{1 - \frac{h}{2} K(0)}, \quad (7)$$

де $i = 2, 3, \dots, n$; $A_j = \begin{cases} 0,5, & \text{при } j = 1, \\ 1, & \text{при } j > 1. \end{cases}$

Аналогічно можуть бути отримані розрахункові вирази для розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду.

Приклад 1. Розв'язується інтегральне рівняння Вольтерри II роду

$$\varphi(x) = x \cdot 3^x - \int_0^x 3^{x-s} \cdot \varphi(s) \cdot ds \quad (8)$$

в інтервалі від 0 до 0,4 з кроком дискретизації $h = 0,02$. Використовуючи традиційний алгоритм (5), отримуємо співвідношення відносно $\varphi_T(x_i)$

$$\varphi_T(0) = (0),$$

$$\varphi_T(x_i) = \frac{x_i \cdot 3^{x_i} - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{x_i - x_j} \cdot \varphi_n(x_j)}{1 - \frac{h}{2}}, \quad (9)$$

а при використанні властивостей виродженості ядра модифіковане розрахункове співвідношення маємо відносно $\varphi_M(x_i)$

$$\varphi_M(0) = (0),$$

$$\varphi_M(x_i) = \frac{\left[3^{x_i} \cdot \left(x_i - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{-x_j} \cdot \varphi_m(x_j) \right) \right]}{\left(1 - \frac{h}{2} \right)}. \quad (10)$$

У таблиці 1. представлені результати обчислень за розрахунковими співвідношеннями (9) і (10), а також точний розв'язок $\varphi_0(x_i)$. Як видно з таблиці 1. по точності обидва алгоритми збігаються; похибка отриманого розв'язку не перевищує 0,0008.

Таблиця 1

Результати дослідження для прикладу 1

x_i	$\varphi_T(x_i)$	$\varphi_0(x_i)$	$\varepsilon(x) = \varphi_T(x_i) - \varphi_0(x_i) $	$\varphi_M(x_i)$	$\varepsilon(x) = \varphi_T(x_i) - \tilde{\varphi}_0(x_i) $
0	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,02	0,0202	0,02024	0,00004	0,02024	0,00004
0,04	0,0409	0,04097	0,00007	0,04097	0,00007
0,06	0,0622	0,06221	0,00001	0,06221	0,00001
0,08	0,0839	0,08395	0,00005	0,08395	0,00005
0,1	0,1062	0,10622	0,00002	0,10622	0,00002
0,12	0,1290	0,12902	0,00002	0,12902	0,00002
0,14	0,1523	0,15237	0,00007	0,15237	0,00007
0,16	0,1762	0,17628	0,00008	0,17628	0,00008
0,18	0,2007	0,20076	0,00006	0,20076	0,00006

Час розв'язання за алгоритмом (9) при кроці $h = 0,02$ становить 0,08 секунди, а за алгоритмом (10) — становить 0,06 секунди, тобто алгоритми, отримані на основі використання роздільності ядра є більш швидкодіючими, ніж традиційні алгоритми.

Резольвентний метод. Резольвента. Загальною аналітичною формою розв'язання рівняння Вольтерри II роду є вираз [4, 6]

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,s) f(s) ds, \quad (11)$$

де функція $R(x,s)$ є резольвентою (резольвентним або розв'язуючим ядром).

Ітеровані ядра. Резольвента рівняння (11) визначається виразом

$$R(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,s), \quad (12)$$

де $K_n(x,s)$ — ітеровані (повторні) ядра, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$K_1(x,s) = K(x,s),$$

$$K_{n+1}(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_n(t,s) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Визначення резольвенти і чисельна або аналітична реалізація виразу (12) означає, по суті, операцію обернення оператора об'єкта, що моделюється, представленого лівою частиною рівняння (11). Крім того, такий підхід до пошуку розв'язку відкриває можливості отримання ряду нових чисельних алгоритмів моделювання, що реалізують явне подання оберненого оператора задачі.

Приклад 2. Техніку дій з ітерованими ядрами можна проілюструвати на прикладі визначення резольвенти ядра $K(x,s) = K_1(x,s) = e^{x-s}$.

Згідно (13)

$$K_2(x,s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s} \int_s^x dz = e^{x-s} (x-s),$$

$$K_3(x,s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z-s) dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^2}{2},$$

$$K_4(x,s) = \frac{1}{2} \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z-s)^2 dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^3}{3!},$$

або в загальному вигляді

$$K_{n+1}(x,s) = e^{x-s} \frac{(x-s)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тепер за виразом (12) можна знайти

$$R(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-s)^n}{n!} = e^{x-s} e^{x-s} = e^{2(x-s)}.$$

Рівняння відносно резольвенти. Для резольвенти може бути отримано інтегральне рівняння, яке її визначає:

$$R(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, t) R(s, t) dt. \quad (14)$$

Структура отриманого рівняння (14) збігається зі структурою рівняння (12), яке розв'язується, причому вихідною інформацією, що породжує резольвенту, є задане ядро $K(x, s)$. Використання резольвенти виявляється виключно корисним при якісному аналізі задач і виконанні різного роду еквівалентних і спрощуючих перетворень. Можливі також випадки, коли головною задачею дослідження є саме знаходження резольвенти, тобто аналітичного або чисельного розв'язку рівняння (14), що має значний практичний сенс. Велике значення має знаходження резольвенти в задачах, які доводиться розв'язувати багато разів при різних варіантах правої частини $f(x)$ і при одному і тому ж ядрі. Наявність виразу для резольвенти у багатьох випадках дозволяє отримати розв'язок вихідного рівняння в аналітичному вигляді.

Метод виродженої резольвенти. Розглянемо інтегральне рівняння

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x, s) f(s) ds \quad (15)$$

Введемо поняття виродженої резольвенти

$$R(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s), \quad (16)$$

тоді рівняння (11) матиме вигляд

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s) f(s) ds \quad (17)$$

або

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \int_0^x \beta_{Ri}(s) f(s) ds. \quad (18)$$

Таким чином, при розв'язанні інтегрального рівняння немає необхідності знаходити інтеграл від функції двох змінних, а лише інтеграл від функцій однієї змінної. При чисельній реалізації методу виродженої резольвенти маємо співвідношення $m \ll n$ (n - кількість

дискретизуючих алгебраїчних рівнянь для методу квадратур), тобто маємо відповідне скорочення кількості операцій при задіянні методу виродженої резольвенти.

Є два наступні способи отримання виродженої резольвенти за допомогою методу ітерованих ядер [7–10].

Перший спосіб. Апроксимуємо вхідне ядро інтегрального рівняння (15) $K(x, s) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(s)$, а потім застосується метод ітерованих ядер до виродженого ядра. У такому випадку маємо:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, s) &= \int_s^x \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(z) \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{K_{n,j}}(z) \beta_{K_{n,j}}(z) dz = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_{n,j}}(z) \int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_{n,j}}(z) dz \end{aligned} \quad (19)$$

Враховуючи співвідношення

$$\int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_{n,j}}(z) dz = \int_s^x \gamma_{iK_{n,j}}(z) dz = \gamma_{iK_{n,j}}(x) - \gamma_{iK_{n,j}}(s), \quad (20)$$

рівняння (19) запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, s) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_{n,j}}(s) (\gamma_{iK_{n,j}}(x) - \gamma_{iK_{n,j}}(s)) = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} [\alpha_i(x) \gamma_{iK_{n,j}}(x)] \beta_{K_{n,j}}(s) - \alpha_i(x) [\beta_{K_{n,j}}(s)] \gamma_{iK_{n,j}}(s). \end{aligned} \quad (21)$$

Отже, після проведених перетворень ітероване ядро приймає вигляд виродженого:

$$K_{n+1}(x, s) = \sum_{i=1}^{m_3} \alpha_{K_{n+1,i}}(x) \beta_{K_{n+1,i}}(s), \quad (22)$$

де $m_3 = 2m_1m_2$. Це свідчить про істотні витрати ресурсів пам'яті і процесорного часу на кожному кроці обчислення ітерованого ядра.

Другий спосіб. Будуємо резольвенту $R(x, s)$ за допомогою методу ітерованих ядер згідно з (13). Далі використовуємо метод апроксимації резольвенти у вигляді білінійного ряду [10] (наприклад, ітераційно-варіаційним або градієнтним методом) і отримаємо резольвенту у вигляді $R(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s)$. Оскільки при цьому безпосередньо отримуємо співвідношення $m \ll n$, то даний варіант мето-

ду виродженої резольвенти буде ефективним щодо використання пам'яті та комп'ютерного часу.

Отримані висновки підтверджуються багатьма обчислювальними експериментами, в тому числі при розв'язуванні наступного прикладу.

Приклад 3. Інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x) - \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds = e^x,$$

з точним розв'язком $y = 1$ у квадраті $[0, 0.1] \times [0, 0.1]$ (квadrатури за формулами трапецій при постійному кроці $h=0,005$) розв'язувалось із застосуванням наступних методів.

1. Методом квадратур: знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с.
2. Резольвентний метод: резольвента визначається методом ітеративних ядер, потрібно було 5 ітеративних ядер. Витрати часу — $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с.
3. Метод вироджених ядер: знадобилося $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с.
4. Метод виродженої резольвенти, резольвента отримана методом ітеративних ядер (2-й спосіб), знадобилося 5 ітеративних ядер, потрібно було $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с.

Графіки похибок використаних методів наведені на рис. 1. Результати розв'язування прикладу достатньо об'єктивно характеризують властивості методів, які застосовувались, в тому числі перевагу методів вироджених ядер і методу виродженої резольвенти.

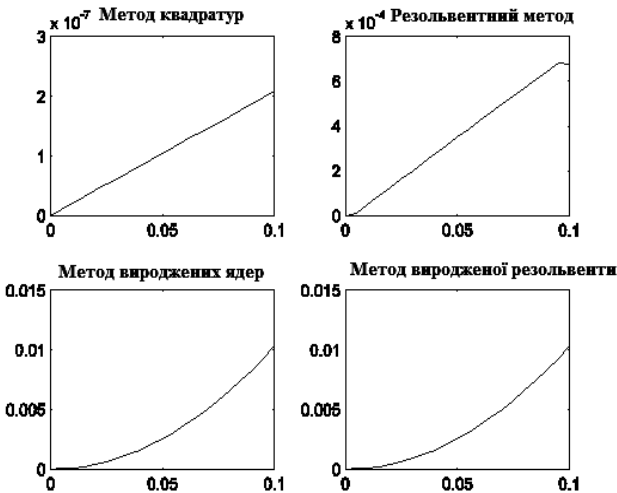


Рис. 1. Графіки похибок до прикладу 3

Суттєве практичне значення мають задачі моделювання з табличним поданням вихідних даних. Цей випадок розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 4. Ядро $K(x, s)$ і права частина $f_T(x)$ рівняння

$$y(x) + \int_0^x K_T(x, s)y(s) = f_T(x)$$

подаються таблично відповідно до таблиці 2 і таблиці 3.

Розв'язки отримані: методом квадратур за $0,9353 \cdot 10^{-2}$ с, резольвентним методом (19 ітерованих ядер) за $0,7945 \cdot 10^{-2}$ с, методом вироджених ядер за $0,9924 \cdot 10^{-2}$ с, методом виродженої резольвенти за $0,6399 \cdot 10^{-2}$ с.

Результати розв'язків рівняння наведені в таблиці 4, а похибки розв'язків представлені в таблиці 5.

Графіки апроксимуючих функцій для ядра наведені на рис. 2. Можна бачити, що у функціях $\alpha_3(x)$ і $\beta_3(s)$ проявляється кусково-лінійний вигляд. Графіки похибок, отриманих вказаними методами, наведені на рис. 3. Приклад ілюструє працездатність алгоритмів при табличному поданні вихідних даних.

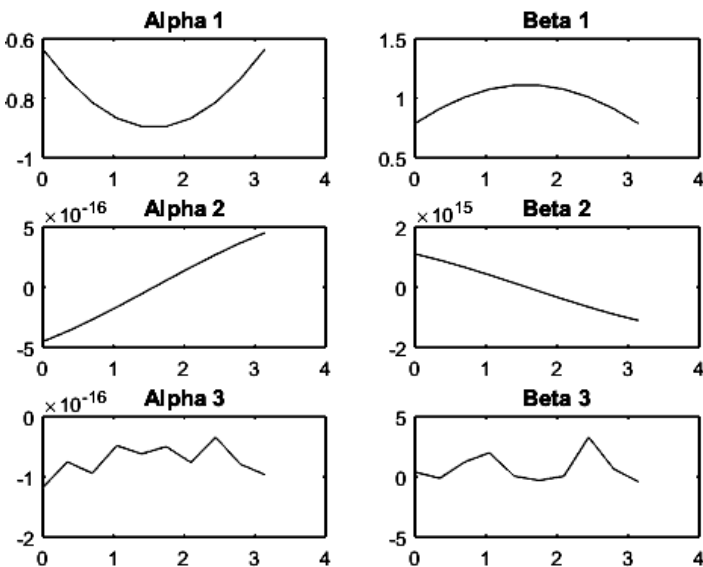


Рис. 2. Графіки апроксимуючих функцій

Таблиця 2

Таблицне подання ядра $K(x, s)$

$K(x, s)$	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
0,0000	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736	0,0000
0,3491	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736
0,6981	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420
1,0472	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000
1,3963	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428
1,7453	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660
2,0944	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660
2,4435	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397
2,7925	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848
3,1416	0,0000	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000

Таблиця 3

Таблицне подання правої частини $f_T(x)$

x	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
$f(x)$	1,0000	0,7053	0,4975	0,3509	0,2475	0,1746	0,1231	0,0869	0,0613	0,0432

Таблиця 4

Отримані результати

x	0	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
у точне	1	0,4605	0,15861	0,0054	-0,0578	-0,0691	-0,053	-0,0244	0,00746	0,03762
<i>М.</i> Квад- ратур	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
<i>М.</i> ре- зольв.	1	0,41001	0,08849	-0,0666	-0,1223	-0,1218	-0,0927	-0,0517	-0,0088	0,03061
<i>М.</i> вир. ядер	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
<i>М.</i> вир. рез.	1	0,46144	0,16036	0,00764	-0,0554	-0,067	-0,0512	-0,0232	0,00804	0,03758

Таблиця 5

Похибки розв'язків

<i>М.</i> Квад- ратур	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
<i>М.</i> ре- зольв.	0	-0,0505	-0,0701	-0,072	-0,0645	-0,0527	-0,0397	-0,0273	-0,0162	-0,007
<i>М.</i> вир. ядер	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
<i>М.</i> вир. рез.	0	0,00094	0,00175	0,00224	0,00236	0,00218	0,00177	0,00121	0,00058	-5E-05

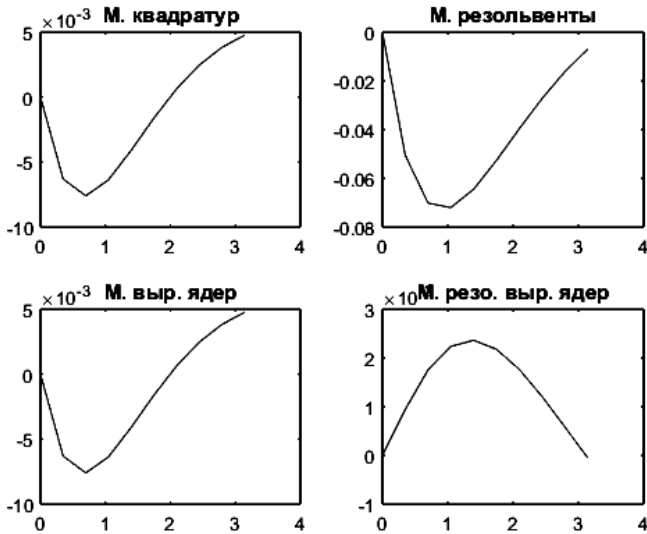


Рис. 3. Графіки отриманих похибок

Випадак різницевого степеневого ядра. Для знаходження резольвенти можна скласти та розв'язати визначальне диференціальне рівняння. Це можливо в одному з важливих для практики випадків, коли ядро рівняння (1) є різницевим і має вигляд

$$K(x, s) = a_0(x) + a_1(x)(x-s) + \dots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1}. \quad (15)$$

За умови безперервності коефіцієнтів $a_k(x), k = 0, n-1$ в $(a, b]$ резольвента для (15) визначається виразом

$$R(x, s) = \frac{d^n g(x, s)}{dx^n}, \quad (16)$$

де функція $g(x, s)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \left[a_0(x) \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(x) g \right] = 0 \quad (17)$$

при

$$g|_{x=s} \frac{dg}{dx}|_{x=s} = \dots = \frac{d^{n-2} g}{dx^{n-2}}|_{x=s} = 0, \quad \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}}|_{x=s} = 1. \quad (18)$$

Приклад 5. Знайдемо резольвенту рівняння з ядром $K(x, s) = x - s$, яке є окремим випадком ядра (15) при $a_1(x) = 1$ і рівних нулю інших коефіцієнтах. Рівняння (17) приймає вигляд

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - g(x, s) = 0,$$

звідки

$$g(x, s) = C_1(s)e^x + C_2(s)e^{-x}.$$

Умови (18) приводять до системи

$$C_1(s)e^s + C_2(s)e^{-s} = 0,$$

$$C_1(s)e^s - C_2(s)e^{-s} = 0,$$

розв'язок якої $C_1(s) = \frac{1}{2}e^{-s}$, $C_2(s) = \frac{1}{2}e^s$, що дозволяє записати

$$g(x, s) = \frac{1}{2} \left[e^{x-s} - e^{-(x-s)} \right] = sh(x-s).$$

Згідно (16) остаточно маємо

$$R(x, s) = [sh(x-s)]_{x^2}^n = sh(x-s).$$

Незважаючи на обмеженість аналітичних способів знаходження резольвенти, її застосування виявляється доцільним для побудови наближених і чисельних алгоритмів розв'язання інтегральних рівнянь. Розрахункові вирази для чисельного отримання резольвенти можуть бути отримані з виразів (13) і (14), якщо в них покласти $s = s_i$, $i = 0, 1, \dots, S$, тобто розбити проміжок $[a, b]$ зміни змінної s на S відрізків. Тоді згідно (13) і (14) отримаємо

$$K_{n+1}(x, s_i) = \int_{s_i}^x K(x, t) K_n(t, s_i) dt, \quad (19)$$

$$R(x, s_i) = K(x, s_i) + \int_{s_i}^x K(x, t) R(t, s_i) dt. \quad (20)$$

Вираз (19) зводить задачу отримання ітерованих ядер до обчислення інтегрального оператора Вольтерри, а вираз (20) являє собою рівняння Вольтерри II роду, де ядро є функцією однієї змінної і збігається з правою частиною.

Деяко інший шлях застосування резольвенти має місце при такій апроксимації ядра, коли можна визначити наближену резольвенту аналітично. Прикладом застосування такого підходу є наступний метод.

Якщо для рівняння (12) розбити проміжок зміни змінної x точками $x = x_i = a + ih, i = \overline{0, n}$, з кроком $h = \frac{b-a}{n}$ на n однакових проміжків X_i , де $x_{i-1} \leq x < x_i$ і X_n — закритий проміжок, тоді прямі

$x = x_i, i = \overline{1, n}, s = s_j = x_j, j = \overline{0, n-1}$, розділять основний трикутник $D(a \leq s \leq x \leq b)$ на n трикутників $D_i(x_{i-1} \leq x \leq x_i, s_{i-1} \leq s \leq s_j)$. Після заміни $K(x, s)$ і $f(x)$ в рівнянні (1) функціями:

$$k(x, s) = \begin{cases} K(\bar{x}_i, \bar{s}_i) K_i, & x, s \in D_i, i = \overline{1, n} \\ K(\bar{x}_i, \bar{s}_i) K_{ij}, & x, s \in D_{ij}, i = \overline{2, n}, j = \overline{0, n-1} \end{cases}, \quad (21)$$

$\tilde{f}(x) = f(\bar{x}_i) = f_i, x \in X_i, i = \overline{1, n}, \bar{x}_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}, \bar{s}_j = \bar{x}_j$, отримаємо рівняння

$$\bar{y}(x) - \int_0^x k(x, s) \bar{y}(s) ds = \bar{f}(x). \quad (22)$$

Резольвента ядра (21) має вигляд

$$r(x, s) = \begin{cases} K_i e^{K_i(x-s)}, & x, s \in D_i, i = \overline{1, n} \\ L_{ij} e^{K_i(x-x_{i-1}) + K_j(s_j-s)}, & x, s \in D_{ij}, i = \overline{2, n}, j = \overline{0, n-1}, \end{cases}$$

де

$$L_{i,i-1} = K_{i,i-1}, i = \overline{2, n}, \\ L_{ij} = K_{ij} + \sum_{l=j+1}^{i-1} K_{il} \frac{e^{K_l h} - 1}{K_l} L_{il}, i = \overline{3, n}, j = 2$$

(при $K_l = 0$ дріб $\frac{e^{K_l h} - 1}{K_l}$ замінюється на h).

Розв'язок наближеного рівняння (22) має вигляд

$$\bar{y}(x) = C_i e^{K_i(x-x_{i-1})}, x \in X_i, i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

де

$$C_1 = f_1, C_i = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} \frac{e^{K_j h} - 1}{K_j}, i = \overline{2, n}.$$

Функція $\bar{y}(x)$ має розриви в точках $x = x_i, j = \overline{1, n-1}$, зі стрибком $\varepsilon_i = |C_{i+1} - C_i e^{K_i h}|$.

Висновок. Вдосконалено алгоритм методу вироджених ядер для розв'язання рівнянь Вольтерри II роду, які мають суттєву перевагу за обсягом обчислювальних операцій по відношенню до традиційних алгоритмів прямого методу квадратур; розроблено алгоритми

побудови резольвенти, що дозволяє забезпечити ефективність резольвентного методу розв'язування рівнянь даного класу.

Таким чином, можливість ефективної апроксимації ядер довільного вигляду дозволяє задіяти продуктивний потенціал резольвентного методу розв'язування інтегральних рівнянь чисельними методами з побудовою відповідних програмних засобів комп'ютерного моделювання динамічних об'єктів. Крім того, даний підхід дозволяє в багатьох випадках використовувати аналітичні перетворення з отриманням спрощених шляхів розв'язання задач моделювання.

Список використаних джерел:

1. Беллман Р. Некоторые вопросы математической теории процессов управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. — 336 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 543 с.
3. Никольский С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1974. — 223 с.
4. Baker С. Т. Н. Volterra Equations and their Numerical Treatment / С. Т. Н. Baker // MCCM Technical Report. — 2000. — №366.
5. Pupkov K. A. Functional series in the theory of nonlinear systems / К. А. Pupkov, V. I. Kapalin, A.S. Yushchenko. — М. : Nauka, 1976. — 448 p.
6. Brunner Н. Open problems in the discretization of Volterra integral equations / Н. Brunner // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1996. — № 17. — P. 717–736.
7. Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 608 с.
8. Іванюк В.А. Аналітичне подання рядів Вольтерри на основі експериментальних даних [Текст] / В.А. Іванюк, В.В. Понеділок // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 43–50.
9. Верлань Д.А. Апроксимація функції двох змінних у задачах керування / Д. А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 62–70.
10. Верлань Д. А. Гладка апроксимація функції двох змінних білінійним рядом / Д. А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г. Є. Пухова (м. Київ, 15–16 січня 2012 р.). — К. : ІПМЕ НАНУ, 2012. — С. 15.
11. Верлань Д. А. Методи білінійної апроксимації ядер інтегральних рівнянь Вольтери 2-го роду / Д. А. Верлань // Тези доповідей річної звітної конференції ІПМЕ імені Г. Є. Пухова (м. Київ, 13-14 січня 2013 р.). — К. : ІПМЕ НАНУ, 2013. — С. 8.

NUMERICAL REALIZATION OF INTEGRAL DYNAMIC MODELS BASED ON THE METHOD OF DEGRADE KERNELS

The use of mathematical models of dynamic objects in the form of Volterra-type integral equations enables us to effectively solve a wide range of theoretical and practical research problems. The traditional approach to solving these equations is to use quadrature algorithms of different order of accuracy, which depends on the form of the Volterra kernel and the sampling step, which often leads to a lot of computational operations and software implementation problems in the general case. It is promising to use degenerate-kernels method algorithms to solve Volterra II kind equations, which have a significant advantage over the volume of computational operations over traditional direct-square algorithms. Algorithms for resolvent construction are considered, which helps to ensure the efficiency of the resolvent method of solving equations of this class. Therefore, the task of applying this method to solving Volterra equations (or equations of another type) leads to several new numerical algorithms whose properties need to be investigated. The practical value of the algorithms under development is the ability to build on them based software that is not contained in existing serial computer simulation packages. This gives the opportunity to compare the obtained algorithms with the known quadrature algorithms for performance, as the most important indicator for dynamic models of control systems.

Keywords: *Volterra integral equation II kind, quadrature method, degenerate kernels method, resolvent.*

Отримано: 19.08.2019