УДК 519.872

Е.В. КОБА

СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ВРЕМЕНЕМ ВОЗВРАЩЕНИЯ ЗАЯВОК И ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИЕЙ

Аннотация. Рассмотрены системы обслуживания с циклическим возвращением $M/D/1$ и $GI/D/m$. В отличие от систем типа Лакатоша введена диспетчеризация заявок, отправленных на орбиту, и не предусмотрено условие обслуживания в порядке очереди. Для этих систем построены вложенные цепи Маркова и выведены достаточные условия их эргодичности.

Ключевые слова: системы массового обслуживания с возвращением, системы типа Лакатоша, орбита, цикл орбиты, устойчивость систем обслуживания, эргодичность систем обслуживания, вложенная цепь Маркова, диспетчеризация.

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания (СМО) с возвращением заявок начали активно изучать с середины XX столетия [1–3]. Этому способствовало стремительное развитие информационных технологий, что повлекло за собой рост интенсивности как сетевого, так и транспортного трафика. В свою очередь увеличение объема трафика привело к возможным повторениям соответствующих запросов на обслуживание. Это обусловило построение новых моделей в теории массового обслуживания, а именно учитывающих фактор повторения запроса (возвращения заявки).

Венгерский математик Ласло Лакатош в [4] рассмотрел интересную задачу моделирования реальной ситуации при заходе воздушного судна на посадку, когда по той или иной причине оно идет на второй круг. Эти системы Лакатош назвал системами с циклическим временем ожидания (возвращения), а в литературе они известны как системы типа Лакатоша.

Специфика модели Лакатоша заключается, во-первых, в том, что вновь поступившая в систему заявка обслуживается в порядке очереди, т.е. если на орбите находятся заявки, отправленные туда ранее, то вновь поступившая в систему заявка также отправляется в очередь, даже если канал обслуживания свободен. Отметим, что согласно терминологии СМО с возвращением заявок орбита — это виртуальная среда, где находятся заявки, ожидающие повторного запроса на обслуживание. Орбита в модели Лакатоша — это круг, где воздушные суда ждут своей очереди на посадку. Во-вторых, время пребывания на орбите кратно некоторому постоянному T, что соответствует реальной системе, которую он рассматривал, т.е. время облета круга воздушным судном (цикла орбиты) можно считать постоянным (T).

Отметим также, что модель Лакатоша изучалась с входящим потоком Пуассона с параметром λ, а время обслуживания имело экспоненциальное распределение с параметром μ. Для такой системы Лакатош получил условие эргодичности

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}{(1-e^{-\lambda T})}.$$

Модифицированная модель Лакатоша рассматривалась в [5–8]. Особенно отметим работу И.Н. Коваленко [9], в которой орбита представляется как два последовательно размещенных круга, каждый со своими временными циклами.

Одной из самых важных задач в теории массового обслуживания является установление условия устойчивости системы. Отметим, что в теории массового обслуживания под устойчивостью обычно понимают свойство, состоящее в том, что вложенная цепь Маркова, описывающая поведение системы, имеет эргодическое распределение.

При решении задач установления условий устойчивости систем с возвращением случай общего распределения времени возвращения заявки (времени ее пребывания на цикле орбиты) существенно отличается от частного случая, когда распределение времени цикла орбиты экспоненциальное. Это связано с тем, что в общем случае необходимо изучать процесс с дополнительными переменными, которые обозначают время, прошедшее с момента отправления имеющихся заявок на орбиту, либо остаточное время до возвращения их с орбиты.

Как уже отмечалось, СМО с возвращением заявок рассматриваются в связи со значительным ростом интенсивности входящего потока, поэтому для таких систем важна диспетчеризация заявок.

Далее описаны две системы, в которых не предусмотрено условие обслуживания в порядке очереди, сохранена цикличность орбиты и введена диспетчеризация задержанных заявок.

СИСТЕМА $M/D/1$ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ВОЗВРАЩЕНИЕМ И ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИЕЙ

Рассмотрим одноканальную систему обслуживания с входящим потоком Пуассона с параметром λ. Время обслуживания в данной системе — постоянная величина τ. При поступлении заявки в систему она либо немедленно принимается на обслуживание, либо отправляется на орбиту и при этом задается время, когда заявка должна возвратиться и приняться на обслуживание. Таким образом, время начала обслуживания заявок, отправленных на орбиту, детерминировано. В любом случае время заявки на орбите кратно заданному $T>\tau$.

Назовем такие системы массового обслуживания системами с циклическим возвращением заявок.

Пусть $t+s_i$ — моменты окончания обслуживания заявок, которые в момент t находятся либо на орбите, либо на обслуживании. Если в этот момент поступит новая заявка, то момент t^* принятия ее на обслуживание определяется равенством $t^*=t+lT$, где $l=\min\left\{k:(t,t+\tau)\bigcap\left(\bigcup_i (s_i-\tau, s_i)\right)=\varnothing\right\}$. Таким образом, заявки, возвращаясь в систему с орбиты, имеют приоритет по отношению ко вновь поступившей заявке. Последняя принимается на обслуживание только в том случае, если она не будет препятствовать обслуживанию заявок, находящихся на орбите.

Как правило, в теории массового обслуживания основной интерес представляет условие эргодичности некоторого случайного процесса, который описывает поведение системы.

Докажем достаточное условие эргодичности приведенной системы. Она описывается однородным марковским процессом $Z(t)=(Q(t);U_1(t),\dots,U_{Q(t)}(t))$, где $Q(t)$ — число заявок на орбите и в канале обслуживания, $U_i(t)$ — времена до окончания их обслуживания. В интервалах между поступлением заявок переменные $U_j(t)$ убывают с единичной скоростью, а достигнув значения 0, исчезают; порядковые номера оставшихся уменьшаются на единицу.

Далее используем коэффициент нагрузки системы $\rho=\lambda\tau$, обычный в теории массового обслуживания, и назовем заявки, которые поступают в систему в любом интервале $(t+nT-\tau, t+nT+\tau)$, $n=0,\pm1,\dots$, заявками типа $(t-\tau, t+\tau)$.

Теорема 1. Если $\rho<1/2$, то случайный процесс $Z(t)$ имеет эргодическое распределение.

Доказательство. Основная часть доказательства состоит в установлении неравенства для некоторого случайного процесса $L(t)$, свойство которого заключается в том, что при $L(t)=0$ заявок на орбите и в канале обслуживания не имеется, т.е. $Z(t)=0$. Остальные этапы доказательства ввиду их стандартности опускаются.

Введем случайный процесс

$$L(t)=\min\{l\geq 0: \text{все заявки, поступившие ранее } t, \text{ будут обслужены раньше } t+lT\}.$$

Пусть $L(t_0)=i$. Рассмотрим случайный процесс $L(t_0+nT)$. Обозначим $A_m=\{L(t_0+nT)>i+m\}$, где $-i\leq m<\infty$.

Событие A_m происходит только в том случае, если в некоторый момент $t\in(t_0, t_0+nT)$ поступит заявка, которая не будет обслужена до момента $t_0+(n+i+m)T$.

Имеем

$$\mathbf{P}\{A_m\}\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{A_{mk}\},$$

где $A_{mk}=A_m\bigcap\{t_0+(k-1)T<t<t_0+kT\}$.

Событие A_{mk} означает, что данная заявка не принята на обслуживание в моменты $t_j=t+jT$ при $0\leq j\leq n+i+m-k-1$; следовательно, некоторую заявку типа $(t-\tau, t+\tau)$, поступившую до момента t, начнут обслуживать в интервале $(t_j-\tau, t_j+\tau)$. Так как все заявки, поступившие до момента t_0, будут обслужены до момента t_0+iT, то в интервалах $(t_j-\tau, t_j+\tau)$ при $i-k+2\leq j\leq n+i+m-k-1$ начнется обслуживание новых заявок типа $(t-\tau, t+\tau)$, поступивших до момента t.

Общее число заявок данного типа, поступивших до момента t, распределено по закону Пуассона с параметром, не большим, чем $\alpha_k=(2k-1)\rho$.

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{A_{mk}\}\leq\lambda Te^{-\alpha_k}\sum_{s=n+m-2}^{\infty}\alpha_k^s/s!,$$

где множитель λT учитывает возможность выбора точки t в интервале длины T.

Используем известное неравенство

$$\mathbf{P}\{N\geq c\}\leq z^{-c}\mathbf{E}\{z^N\},\ z>1,$$

для любой целочисленной случайной величины N при условии, что правая часть этого неравенства конечна.

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{E}\{z^N\}=\exp\{\alpha_k(z-1)\},\ c=n+m-2.$$

Тогда при $z=1/2\rho$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{A_{mk}\}\leq\lambda T(2\rho)^{n+m-2}e^{k(1-2\rho)}=\lambda T(2\rho)^{m-2}\exp\{n\{(1-2\rho)+\ln(2\rho)\}-(n-k)(1-2\rho)\}.$$

Дифференцированием получаем, что при заданном $\rho\in(0,1/2)$ имеем

$$1-2\rho+\ln(2\rho)=-\sigma<0,$$

следовательно,

$$\mathbf{P}\{A_{mk}\}\leq\lambda T(2\rho)^{m-2}\exp\{-n\sigma-(n-k)(1-2\rho)\}.$$

Суммируя по $1\leq k\leq n$, находим

$$\mathbf{P}\{A_m\}\leq\frac{\lambda Te}{(1-2\rho)}(2\rho)^{m-2}e^{-n\sigma}.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\{L(t_0+nT)\,|\,L(t_0)=i\}\leq\sum_{m=-i}^{\infty}\mathbf{P}\{A_m\}\leq i-1+\sum_{m=-1}^{\infty}\mathbf{P}\{A_m\}\leq i-1+\frac{\lambda Te}{(1-2\rho)^2\rho^3}e^{-n\sigma}.$$

При достаточно большом n получаем, что при всех $i \ge n$

$$\mathbf{E}\{L(t_0+nT)\,|\,L(t_0)=i\} \le i-1/2.$$

Неравенство установлено.

СИСТЕМА $GI/D/m$ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ВОЗВРАЩЕНИЕМ И ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИЕЙ

Рассмотрим следующую модель. Каждой заявке, поступающей в систему, отводится время пребывания на орбите, равное kT, где k определяется тем, что обслуживание данной заявки не мешает обслуживанию заявок, которые поступили раньше. Указывается также канал обслуживания, в который направлена данная заявка. Ограничимся случаем, когда время обслуживания равно постоянной $\tau < T$. Обозначим $z_1^i < z_2^i < \ldots$ времена от момента t до окончания обслуживания заявок, которые в данный момент находятся в i-м канале обслуживания или на орбите и будут направлены в этот канал.

Определим

$$k_i = \min\{l \ge 0 : \forall j \ge 1\ (kT, kT+\tau) \bigcap (z_j^i(t)-\tau, z_j^i(t)) = \varnothing\}$$

и положим $k = \min\{k_1, \ldots, k_m\}$.

В частности, если $k=0$, заявка принимается на обслуживание немедленно. Номер i' канала, куда направляется вновь поступившая заявка, можно для определенности задать так: $i' = \min\{i : k_i = k\}$.

Мотивация описанной дисциплины обслуживания состоит в следующем. Во-первых, обслуживающиеся обьекты часто инерционные (как, например, в случае посадки воздушных судов). Во-вторых, повторное отправление на орбиту может быть нецелесообразным ввиду энергетических затрат. В-третьих, в определенных системах обслуживания потребителю важнее знать время поступления в канал обслуживания заблаговременно, чем несколько раз возвращаться через время T.

Обобщим результат, полученный для системы $M/D/1$ на m-канальную систему с рекуррентным входящим потоком заявок с параметорм λ. Обозначим $A(x)$ функцию распределения времени между поступлением заявок; пусть $a = \int_0^\infty x\,dA(x) < \infty$ и $A(x)$ — нерешетчатая функция.

Докажем достаточное условие эргодичности описанной системы. Введем случайны процесс

$$Z(t) = (z_0(t); \bar{z}(t); \upsilon(t)),$$

где $z_0(t)$ — текущее число заявок в каналах обслуживания и на орбите, $\bar{z}(t) = (z_j(t), 1 \le j \le z_0(t))$ — упорядоченный по возрастанию компонент вектор времен до окончания обслуживания имеющихся заявок, $\upsilon(t)$ — время от момента t до поступления следующей заявки. В точках разрыва $Z(t)$ доопределим его по непрерывности слева. Процесс $Z(t)$ — однородный марковский процесс. Доказательства требует только тот факт, что при поступлении новой заявки в момент t новое состояние $Z(t+)$ является функцией $Z(t)$. Для этого отметим, что количество каналов $Q_t(s)$, которые будут заняты в момент $s \ge t$ заявками, поступившими ранее t, определяется по $Z(t)$ однозначно, а именно

$$Q_t(s) = \#\{j : s < z_j(t) < s+\tau\},$$

где # — число элементов множества.

Пусть k — минимальное целое неотрицательное число, для которого $Q_t(s) < m$, $kT < s < kT + \tau$. Это означает, что интервалом обслуживания новой заявки является $(k + kT, t + kT + \tau)$. Состояние $Z(t+)$ определяется следующим образом: $z_0(t+) = z_0(t) + 1$ (если исключить совпадение момента поступления заявки с моментом окончания обслуживания другой заявки); $z_j(t+) = z_j(t)$ при $z_j(t) < kT + \tau$; $z_j(t+) = kT + \tau$ при $j = \#\{r : z_r(t) < kT + \tau\}$; $z_j(t+) = z_{j-1}(t)$ для других значений j.

Введем случайный процесс $L(t) = \min\{k \geq 0 : z_j(t) \leq kT, j \geq 1\}$. Следовательно, если, начиная с момента t, поток заявок прекратится, то все имеющиеся заявки будут обслужены не позднее момента $t + TL(t)$.

Теорема 2. Пусть $A(0+) = 0$; $A(x) < 1$, $x > 0$ (групповое поступление заявок исключается и интервал между заявками в потоке может быть сколь угодно большим). Тогда при условии $\frac{\tau}{a} < \frac{m}{2}$ марковский процесс $Z(t)$ имеет эргодическое распределение.

Доказательство. Основным этапом доказательства является изучение условного математического ожидания $\mathbf{E}\{L(nT) \mid L(0) = i; Z_0\}$, где Z_0 — любое возможное значение $Z(0)$.

По данным s, $0 < s < T$, и $\Delta > 0$ определим множество

$$A_n^s = \bigcup_{k=0}^{n-1} (kT + s - \Delta, kT + s + \Delta)$$

и обозначим $N(A_n^s)$ количество заявок, которые поступают в систему при $t \in A_n^s$. Докажем неравенство

$$L(nT) \leq (L(0) - n)_+ + 2 + \frac{1}{m} \max_{1 \leq j \leq J} \{N(A_n^{s_j})\}, \tag{1}$$

где $J \geq 1$, $s_j = (j - 1/2)T / J$, $\Delta = \tau + T / (2J)$. Если заявка поступила в момент $t = lT + \theta$, где $l \leq n - 1$ и $|\theta - s_j| \leq T / (2J)$, то примем, что это заявка типа j. Тогда $L(nT) \leq \max\limits_{1 \leq j \leq J} L_j$, где L_j — наименьшее число вида kT, при котором все заявки типа j обслужены раньше kT.

Пусть t^* — момент окончания обслуживания произвольной заявки типа j, поступившей в момент $t = lt + \theta$. Если $t < 0$, то по определениям $L(0)$ имеем $t^* \leq L(0) = i$. Если $0 \leq t < nT$, то

$$\frac{t^*}{T} \leq i + U + 2, \tag{2}$$

где U — число отправлений данной заявки на орбиту после момента iT. Легко видеть, что в каждый из таких моментов происходит обслуживание m заявок; все mU заявок разные и поступили во множество A_n^j. Таким образом,

$$N(A_n^j) \geq mU, \; U \leq [N(A_n^j) / m]. \tag{3}$$

Поскольку правая часть (2) — целое число, а рассматриваемая заявка произвольного типа j, из (2) и (3) получаем $L_j \leq ((i - n) + 2 + [N(A_n^j) / m])$, откуда и следует (1).

Лемма 1. Пусть $N_1, \ldots, N_J$ — случайные величины с положительными математическими ожиданиями $a_1, \ldots, a_J$, дисперсиями $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_J^2$ и коэффициентами вариации $c_j = \sigma_j / a_j$, $1 \leq j \leq J$.

Тогда

$$\mathbf{E}\{\max\{N_1, \ldots, N_J\}\} \le a(1 + c\sqrt{J}), \tag{4}$$

где $a = \max\{a_1, \ldots, a_J\}$, $c = \max\{c_1, \ldots, c_J\}$.

Доказательство. Неравенство (4) вытекает из того, что при $\delta > 0$

$$\max\{N_1, \ldots, N_j\} \le a(1+\delta) + \sum_{j=1}^{J}(N_j - a(1+\delta))_+ \le a(1+\delta) + \sum_{j=1}^{J}(N_j - a_j(1+\delta))_+ \le$$

$$\le a(1+\delta) + \frac{1}{4\delta}\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{a_j}(N_j - a_j)^2,$$

что проверяется дифференцированием. Отсюда

$$\mathbf{E}\{\max\{N_1, \ldots, N_J\}\} \le a\left(1 + \delta + \frac{J}{4\delta}c^2\right),$$

из чего вытекает (4) при $\delta = \frac{1}{2}c\sqrt{J}$.

Одновременно со случайной величиной $N(A_n^s)$ рассмотрим величину $N_0(A_n^s)$ — число точек процесса восстановления (без сдвига) в множестве A_n^s при условии, что первая из них является $kT + \kappa$, где $|\kappa - s| \le \Delta$. Тогда справедливо неравенство

$$N(A_n^s) \le N_0(A_n^{s-\kappa}). \tag{5}$$

Примем, что

$$A_n^{s-\kappa} = \bigcup_{l=0}^{n-1}((k+l)T + s - \kappa - \Delta, (k+l)T + s - \kappa + \Delta),$$

и для общности положим $\kappa = s$ в случае, если $N(A_n^s) = 0$.

Случайная величина $N_0(A_n^{s-\kappa})$ — это число восстановлений на n непересекающихся отрезках G_l длины 2Δ. По локальной теореме восстановления [10]

$$\mathbf{E}\{N_0(A_n^{s-\kappa})\} \sim \frac{2\Delta n}{a}, \quad n \to \infty, \tag{6}$$

поскольку

$$\mathbf{E}\{N_0(A_n^{s-\kappa})\} = \sum_{l=0}^{n-1}\int_{G_l} dH(t),$$

где $H(t)$ — функция восстановления,

$$H(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A^{*(k)}(t).$$

Аналогично

$$\mathbf{E}\{N(A_n^{s-\kappa}))^2\} = \mathbf{E}\{N(A_n^{s-\kappa})\} + 2\sum_{l=0}^{n-1}\iint_{\substack{x<y \\ x,\, y \in G_k}} dH(x)\,dH(y-x) +$$

$$+ 2\sum_{0 \le k < l \le n-1}\int_{G_k} dH(x)\int_{G_l} dH(y-x). \tag{7}$$

Все слагаемые сумм в правой части (7) ограничены и по локальной теореме восстановления

$$\int_{G_k} dH(x)\int_{G_l} dH(y-x) \to \left(\frac{2\Delta}{a}\right)^2$$

при $k \to \infty$, $l-k \to \infty$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\{N_0(A_n^{s-\kappa})\} \sim \left(\frac{2n\Delta}{a}\right)^2, \ n \to \infty. \tag{8}$$

Отсюда коэффициент вариации

$$\sigma\{N_0(A_n^{s-\kappa})\} / \mathbf{E}\{N_0(A_n^{s-\kappa})\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{9}$$

Из леммы 1, формул (5), (6), (8) и (9) получаем, что при $n \to \infty$

$$\max_{1\le j\le J} \{N(A_n^{s_j})\} \le \frac{2\Delta n}{a} + o(n).$$

Теперь на основе неравенства (1) имеем

$$\mathbf{E}\{L(nT) \mid L(0)=i; Z(0)=Z_0\} \le (i-n)_+ + \frac{2n\Delta}{ma} + o(n). \tag{10}$$

Поскольку $2\tau < a$ и $\Delta = \tau + (1/J)$, при достаточно больших J, n и любых $i \ge n$ из (10) вытекает, что

$$\mathbf{E}\{L(nT) - L(0) \mid L(0)=i; Z(0)=Z_0\} < -\varepsilon, \tag{11}$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число, а также при $i < n$

$$\mathbf{E}\{L(nT) \mid L(0)=i; Z(0)=Z_0\} \le C, \tag{12}$$

где C — константа при данном n.

Из (11) и (12) вытекает, что при достаточно большом n

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \mathbf{P}\{L_0(knT) \le n \mid L(0)=i, Z(0)=Z_0\} \ge \frac{\varepsilon}{C+\varepsilon} \tag{13}$$

при любых i и Z_0.

Пусть $L(0)=i$, момент поступления первой заявки $\nu(0)=\nu_0$, время поступления второй заявки равно $\nu_0 + y$. Если $\nu_0 + y > (i+1)T$, то будем иметь $Z(x+y)=0$. Таким образом, событие $\{Z(t)=0\}$ рекуррентное; тогда очевидно

$$\mathbf{P}\{\nu_0 + y > t\} \ge \mathbf{P}\{y > t\} = 1 - A(t) > 0. \tag{14}$$

Далее из (13) и (14) стандартным методом регенерирующих процессов, учитывая нерешетчатость $A(x)$, выводим существование эргодического распределения случайного процесса $Z(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучаются новые типы систем обслуживания заявок с возвращением $M/D/1$ и $GI/D/m$, которые являются модифицированными системами типа Лакатоша, т.е. системами с циклическим возвращением заявок и обслуживанием их в порядке очереди. В рассматриваемых системах для заявок, попавших на орбиту, введена диспетчеризация, а также не предусмотрено условие обслуживания в порядке очереди: вновь поступившая заявка может обслуживаться немедленно при наличии хотя бы одного свободного канала. Построены вложенные цепи Маркова и выведены достаточные условия их эргодичности.

Приведенные модели систем обслуживания с возвращением заявок являются моделями некоторых реальных процессов обслуживания; например, в авиации при упорядочении захода на посадку воздушных судов, в информационных и телекоммуникационных системах при высокой интенсивности трафика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queues. *Queueing Systems*. 1987. Vol. 2, N 3. P. 201–233.
2. Artalejo J.R. A classified bibliography of research in retrial queueing. Progress in 1990–1999. *TOP*. 1999. Vol. 7, N 2. P. 187–211.
3. Artalejo J.R. A classified bibliography of research in retrial queueing. Progress in 2000–2009. *Mathematical and Computer Modeling*. 2010. Vol. 51, N 9–10. P.1071–1081.
4. Lakatos L. On a simple continuous cyclic-waiting problem. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.* 1994. Vol. 14. P. 105–113.
5. Коба Е.В., Пустовая С.В. Системы обслуживания типа Лакатоша, их обобщение и применение. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 3. С. 78–90.
6. Lakatos L., Szeidl L., Telek M. Introduction to queueing systems with telecommunication applications. Springer, 2013. 388 p.
7. Kovalenko I. The FCFS-RQ system by Lakatos and its modifications. *RT&A*. 2018. Vol. 13, N 2 (49). P. 51–56.
8. Коба Е.В. Система типа $M / M / 1 / 0$ с повторением и комбинированной дисциплиной обслуживания. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 67–72.
9. Коваленко И.Н. О двухциклической системе обслуживания. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 1. С. 59–65.
10. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. Москва: Сов. радио, 1967. 288 с.

Надійшла до редакції 18.04.2019

О.В. Коба

СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ З ЦИКЛІЧНИМ ЧАСОМ ПОВЕРНЕННЯ ЗАЯВОК І ДИСПЕТЧЕРИЗАЦІЄЮ

Анотація. Розглянуто системи обслуговування $M / D / 1$ і $GI / D / m$ з циклічним часом повернення заявок. На відміну від систем типу Лакатоша, введено диспетчеризацію заявок, що були відправлені на орбіту, та знято умову обслуговування у порядку черги. Для цих систем побудовано вкладені ланцюги Маркова та виведено достатні умови їхньої ергодичності.

Ключові слова: системи масового обслуговування з поверненням, системи типу Лакатоша, орбіта, цикл орбіти, стійкість систем обслуговування, ергодичність систем обслуговування, вкладений ланцюг Маркова, диспетчеризація.

E.V. Koba

CYCLIC-RETRIAL QUEUEING SYSTEMS WITH DISPATCHING

Abstract. Cyclic-retrial queueing systems $M / D / 1$ and $GI / D / m$ are considered. Unlike Lakatos-type systems, dispatching of customers sent to orbit is introduced, and FIFO service is not considered. Embedded Markov chains are constructed for these systems and their sufficient ergodicity conditions are deduced.

Keywords: retrial queues, Lakatosh type systems, orbit, orbit cycle, stability of queues, ergodicity of queues, embedded Markov chain, dispatching.

Коба Елена Викторовна,
доктор физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, профессор кафедры Национального авиационного университета, Киев,
e-mail: ekoba2056@gmail.com.