УДК 519.8

И.В. СЕРГИЕНКО, Н.В. СЕМЕНОВА, В.В. СЕМЕНОВ

ДВУХУРОВНЕВАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕЖБЮДЖЕТНЫХ ТРАНСФЕРТОВ ПРИ ЗАДАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Аннотция. Сформулированы и исследованы задачи оптимального распределения трансфертов при заданных бюджетных ограничениях. Математическая модель представлена как двухуровневая линейная задача, содержащая линейные задачи целочисленной оптимизации нижнего уровня. Рассмотрены оптимистическая и пессимистическая постановки задачи. Для приближенного решения оптимистической постановки предложен алгоритм нахождения локальных решений параметрических задач целочисленного программирования нижнего уровня на основе метода направляющих окрестностей. Решение вспомогательной целочисленной задачи с булевыми переменными для отыскания решений задачи верхнего уровня осуществляется алгоритмами локального поиска.

Ключевые слова: двухуровневая задача оптимизации, целочисленная оптимизация, параметрическое программирование, булевые переменные, локальный алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Двухуровневые задачи оптимизации являются инструментом моделирования процессов принятия решений в сложных экономических, экологических и финансовых системах, имеющих, как правило, иерархическую структуру. Анализ таких задач не укладывается в рамки обычной теории оптимизации и требует развития новых математических подходов. Несмотря на внешнюю простоту постановок, решение данных задач весьма сложно и значительная часть исследований в двухуровневом программировании сводится к выделению отдельных классов задач, решаемых эффективно. В настоящее время дискретные двухуровневые задачи широко используются в качестве математических моделей формирования и выбора решений во многих прикладных областях, поэтому такие задачи актуальны и требуют дальнейшего изучения.

В данной работе сформулированы и исследованы задачи оптимального распределения трансфертов при заданных бюджетных ограничениях в целях максимизации социального благосостояния, описываемые иерархическими дискретными моделями. Для построения математической модели и решения таких задач в [1–9] рассмотрены перераспределительные свойства системы межбюджетных трансфертов Украины относительно сокращения межрегионального неравенства доходов региональных бюджетов на душу населения; в [3–5] проанализировано влияние межбюджетных трансфертов на уровень финансирования основных отраслей социальной инфраструктуры: образования, здравоохранения и социальной защиты, а также сформулированы предложения относительно оптимизации системы межбюджетных трансфертов и направлений дальнейших исследований [2–4, 7].

Математическая модель оптимального распределения трансфертов при заданных бюджетных ограничениях представлена как двухуровневая задача, содержащая линейную оптимизационную задачу верхнего уровня и линейные задачи целочисленной оптимизации нижнего уровня, оптимальные решения которых используются при определении области допустимых решений задачи верхнего уровня. Для приближенного решения оптимистической постановки двухуровневой задачи на основе метода направляющих окрестностей [10, 11] предложен алгоритм нахождения локальных решений параметрической задачи целочисленного программирования нижнего уровня. Решение вспомогательной целочисленной задачи с булевыми переменными для отыскания решений задачи верхнего уровня осуществляется на основе алгоритмов локального поиска [12].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСФЕРТОВ ПРИ ЗАДАННЫХ БЮДЖЕТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Задачи оптимального распределения трансфертов при заданных бюджетных ограничениях в целях максимизации социального благосостояния включаются в широкий класс прикладных задач, связанный с распределением ограниченных ресурсов в иерархических системах [13, 14]. В наиболее общей постановке проблему распределения ресурсов в иерархических системах сформулируем следующим образом. Имеется многоуровневая иерархическая система, элементы которой вырабатывают, передают или потребляют однородный ресурс. Элементы системы и связи между ними характеризуются ограничениями, определяющими объемы ресурсов, которые могут циркулировать в системе. Задача состоит в поиске таких допустимых объемов ресурсов, при которых критерии оптимальности, определяющие эффективность функционирования системы, принимают оптимальные значения.

Верхний уровень в иерархических системах (центральное правительство, руководство корпорации и другие) не определяет полностью поведение нижних уровней иерархии (местные органы самоуправления, филиалы и другие). У каждого уровня иерархии имеется возможность влиять только на множество допустимых решений нижних уровней, но не на их критерии. Цели разных уровней, как правило, могут не совпадать. Процесс принятия решений в таких системах структурирован следующим образом. Первым принимает решение верхний уровень иерархии. Это решение передается нижним уровням. Каждый уровень иерархии, получив решения вышестоящих уровней, представляющих собой ограничения в задачах нижестоящих уровней, принимает решение, преследуя свои цели, и использует имеющиеся у него возможности и ресурсы. Деятельность всей системы направлена на достижение определенной глобальной цели. Результат зависит от работы всех уровней иерархии. Задача состоит в том, чтобы найти такое решение верхнего уровня, которое приводит систему к достижению глобальной цели.

В соответствии с [14, 15] приведем математическую постановку одной задачи распределения ресурсов в двухуровневой системе управления.

Административный центр (центр управления, правительство) R_0 должен распределить ограниченный объем ресурсов между регионами (административно-территориальными образованиями) $R_1, R_2, \dots, R_m$, которые будут их использовать для удовлетворения собственных нужд (например, финансирование основных областей социальной инфраструктуры: образования, здравоохранения, социальной защиты и других), что даст максимальный эффект по определенным регионами критериям. В данной модели полагаем, что центр R_0 влияет только на множество допустимых управлений подчиненных регионов и не определяет их критерии.

Пусть центр R_0 выделяет для каждого региона R_i, $i \in N_m$, $N_m = \{1, \dots, m\}$, вектор ресурсов $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_\ell^i)$, включающий ℓ наименований, т.е. центр выбирает набор $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ из m векторов, удовлетворяющих условиям $x^i \geq 0,\ i \in N_m,\ \sum_{i=1}^{m} x^i \leq b,$ где $b = (b_1, b_2, \dots, b_\ell) > 0$ — вектор максимально возможных объемов ℓ ресурсов центра. Каждый регион R_i, $i \in N_m$, исходя из выбора центра R_0, определяет вектор $y^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i) \in Z^n$, удовлетворяющий неравенствам $y^i A^i \leq x^i + g^i$, $y^i \geq 0$, $g^i \geq 0$, $x^i \geq 0$, Z^n — множество целочисленных векторов в R^n. Здесь вектор y^i интерпретируется как программа, включающая мероприятия, рекомендуемые к внедрению в данном регионе R_i; y_j^i, $j \in N_n$, — количество j-х мероприятий программы y^i региона R_i, которые будут реализовываться, $i \in N_m$, $j \in N_n$; $A^i = [a_{kj}^i]$ — производственная (технологическая) матрица для региона R_i; a_{kj}^i — затраты k-го, $k \in N_\ell$, ресурса, необходимые для внедрения j-го мероприятия программы y^i; $g^i = (g_1^i, g_2^i, \ldots, g_\ell^i)$ — вектор объемов ℓ видов собственных ресурсов региона R_i.

Целевую функцию центра R_0 определим следующим образом:

$$f_0(x, y) = f_0(x^1, \ldots, x^m, y^1(x^1), \ldots, y^m(x^m)) = \sum_{i=1}^m \langle c^i, y^i(x^i) \rangle,$$

где $c = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_n^i) \geq 0$ — вектор полезности для центра R_0 от внедрения программы мероприятий, рекомендуемых для региона R_i; $\langle c^i, y^i(x^i) \rangle$ — скалярное произведение векторов c^i и $y^i(x^i)$.

Целевую функцию региона $R_i, i \in N_m$, определим как

$$f_i(x^i, y^i(x^i)) = \langle d^i, y^i(x^i) \rangle, \; i \in N_m,$$

где $d^i = (d_1^i, d_2^i, \ldots, d_n^i) \geq 0$ — вектор полезности для региона $R_i, i \in N_m$, от внедрения своих мероприятий. Центр R_0 и каждый регион R_i стремятся максимизировать свои критерии.

С использованием введенных обозначений двухуровневую задачу запишем таким образом: найти

$$\max f_0(x, y) = \sum_{i=1}^m \langle c^i, y^i(x^i) \rangle \tag{1}$$

при условиях

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in X = \left\{ x^i \in R^\ell, \; x^i \geq 0, \; i \in N_m \mid \sum_{i=1}^m x^i \leq b \right\}, \tag{2}$$

$$y^i(x^i) \in \overline{Y}_i(x^i) = \operatorname{Arg\,max} \{ f_i(x^i, y^i(x^i)) \mid y^i(x^i) \in G_i(x^i) \}, \tag{3}$$

$$G_i(x^i) = \{ y^i \in Z^n \mid y^i A^i \leq x^i + g^i, \; y^i \geq 0, \; g^i \geq 0, \; x^i \geq 0 \}, \; i \in N_m. \tag{4}$$

Здесь $G_i(x^i)$ — множество допустимых программ мероприятий региона R_i при выделенном центром R_0 векторе ресурсов x^i. Обозначим $G(x) = \prod_{i=1}^m G_i(x^i)$, где $\prod_{i=1}^m G_i(x^i)$ — декартово произведение множеств $G_i(x^i)$.

Описанная математическая модель (1)–(4) (обозначим ее $P(L, F)$) является задачей двухуровневого программирования. Она имеет следующую структуру: задача верхнего уровня $P(L)$

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^m \langle c^i, \overline{y}^i(x^i) \rangle \mid x = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in X \right\};$$

задачи нижнего уровня $P^i(F)$

$$\max \{ \langle d^i, y^i(x^i) \rangle \mid y^i(x^i) \in G_i(x^i) \}, \; i \in N_m.$$

Здесь $\overline{y}^i(x^i)$ — оптимальное решение задачи нижнего уровня $P^i(F)$ при фиксированном $x^i \in X$. Следовательно, допустимыми для задачи оптимизации $P(L)$ верхнего уровня являются решения, оптимальные для задач $P^i(F)$, $i \in N_m$, нижнего уровня и удовлетворяющие ограничениям верхнего уровня. Оптимальные решения задач $P^i(F)$ нижнего уровня зависят от допустимого решения задачи $P(L)$ верхнего уровня и используются для вычисления значения ее целевой функции.

СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАДАЧ ДВУХУРОВНЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Развитие исследований двухуровневых задач принятия решений можно проследить на основе двух источников. Первый относится к области теории игр: при изучении моделей олигополистического рынка Штакельберг [16] использовал иерархию игроков для построения описательных моделей принятия решений и установления теоретико-игровых равновесий. Второй информационный источник относится к области математического программирования, где возникли задачи двухуровневой оптимизации, содержащие вложенную задачу внутренней оптимизации как ограничение задачи внешней оптимизации [17]. С того времени появился значительный объем литературы, посвященной задачам двухуровневой оптимизации, интенсивные исследования которых проводятся последние три десятилетия. Основные результаты, полученные в теории двухуровневой оптимизации, содержатся, в частности, в [16–26].

Известно, что задачи двухуровневого программирования являются многоэкстремальными и сильно NP-сложными [18, 24], даже если все функции, входящие в их формулировку, линейны [19, 20]. Дополнительные трудности при исследовании таких моделей возникают и в силу возможной неединственности оптимального решения задач нижнего уровня. Центр R_0 в таком случае, принимая решение, находится в условиях неопределенности, что приводит к различным постановкам задач двухуровневого программирования и требует конкретизации понятия оптимального решения таких задач на основе различных предположений о характере реакций регионов R_i, $i \in N_m$, на управление центра R_0.

При наличии нескольких оптимальных решений задач регионов R_i, $i \in N_m$, (задач нижнего уровня) неопределенность, возникающую на верхнем уровне при отсутствии ясности относительно того, какое оптимальное решение задачи нижнего уровня следует использовать, можно снять определением различных стратегий, которые применяет центр R_0. Известны две основные стратегии: оптимистическая и пессимистическая [25–30].

В случае использования оптимистической стратегии при наличии нескольких оптимальных решений нижнего уровня центр R_0 ожидает, что регионы выберут такие решения $\bar{y}^i(x^i)$ из множеств оптимальных решений $\bar{Y}_i(x^i)$, которые обусловят наилучшее значение целевой функции задачи верхнего уровня $P(L)$ для R_0. Следовательно,

$$f_0(x, \bar{y}(x)) = \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \bar{y}^i(x^i)\rangle = \max\left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i)\rangle \mid y^i(x^i) \in \bar{Y}_i(x^i) \right\}.$$

Тогда естественно, что центр R_0 будет выбирать свое решение $(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$ из условия

$$f_0(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})) = \max\left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \bar{y}^i(x^i)\rangle \mid x \in X \right\} =$$

$$= \max\left\{ \max\left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i)\rangle \mid y^i(x^i) \in \bar{Y}_i(x^i) \right\} \mid x \in X \right\}.$$

Оптимистическая формулировка двухуровневой задачи оптимизации предполагает определенную степень сотрудничества между центром и регионами, поэтому оптимальные решения $(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$ называют оптимальными кооперативными решениями. Оптимистический подход предпочтительнее по сравнению с пессимистическим; в связи с этим большинство исследований посвящено оптимистической версии задачи двухуровневой оптимизации. Для оптимистической формулировки задачи гарантированно существуют оптимальные решения при предположениях регулярности и компактности, сформулированных в следующей теореме [26].

Теорема 1. Если функции, описывающие целевую функцию и ограничения двухуровневой задачи, достаточно гладкие, допустимая область задачи нижнего уровня, описывающей ограничения задачи двухуровневой оптимизации, не пуста, компактна и условие регулярности (ограничение квалификации) Мангасаряна–Фромовица выполняется во всех точках ее допустимой области, то двухуровневая задача гарантированно имеет оптимистический оптимум при условии, что существует хотя бы одно ее допустимое решение.

В случае пессимистической стратегии при наличии нескольких оптимальных решений нижнего уровня центр R_0 решает задачу оптимизации, полагая, что регионы могут выбрать наихудшее для него решение $\bar{\bar{y}}^i(x^i)$ из оптимального множества $\bar{Y}_i(x^i)$, что приведет к неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \bar{\bar{y}}^i(x^i) \rangle \le \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i) \rangle \quad \forall\, y^i \in \bar{Y}_i(x^i), \; i \in N_m.$$

В таких условиях для центра R_0 наилучшим будет выбор $\bar{\bar{x}} \in X$, удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$f_0(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(\bar{\bar{x}}^i) \rangle \,|\, y^i(x^i) \in \bar{Y}_i(\bar{\bar{x}}^i) \right\} \ge$$

$$\ge \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i) \rangle \,|\, y^i(x^i) \in \bar{Y}_i(x^i) \right\} \quad \forall x \in X.$$

Пессимистическая формулировка двухуровневой задачи не предполагает какой-либо формы сотрудничества с регионами, поэтому ее оптимальные решения называют оптимальными некооперативными решениями. Пессимистический подход относительно менее чувствителен к возмущениям исходных данных по сравнению с оптимистическим.

Справедливо очевидное неравенство

$$\max \left\{ \max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i) \rangle \,|\, y^i(x^i) \in \bar{Y}_i(x^i) \right\} \,|\, x \in X \right\} \ge$$

$$\ge \max \left\{ \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, y^i(x^i) \rangle \,|\, y^i(x^i) \in \bar{Y}_i(x^i) \right\} \,|\, x \in X \right\},$$

исходя из которого заключаем, что, действуя в условиях сотрудничества, центр R_0 получает большее значение целевой функции, чем при пессимистической стратегии.

В случае оптимистической формулировки с выпуклой задачей нижнего уровня двухуровневую задачу можно свести к одноуровневой, используя вариационное неравенство, соответствующее задаче нижнего уровня. Однако такое прямое сведение невозможно в случае пессимистической формулировки двухуровневой задачи. Это создает значительные проблемы при разработке методов для решения пессимистических двухуровневых задач. Для каждой решаемой задачи оптимизации нижнего уровня необходимо отслеживать оптимальное решение нижнего уровня, которое является худшим для верхнего. По сути, это делает пессимистическую двухуровневую оптимизацию трехуровневой задачей. Отметим, что при пессимистической формулировке оптимальные решения существуют при более строгих допущениях, сформулированных в теореме 1.

ОСОБЕННОСТИ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Дискретные задачи двухуровневого программирования по сравнению с непрерывными являются более сложными и недостаточно исследованными [31–33].

В работе [25] проанализированы свойства и условия существования оптимальных решений для различных видов дискретных задач, возникающих в разных ситуациях, когда переменные верхнего и нижнего уровней принадлежат непрерывным или дискретным множествам. Но если задача нижнего уровня дискретна, а задача верхнего уровня непрерывна, сложно определить условия существования оптимальных решений и такие, которые можно легко проверить до решения задачи. Существует различие между задачами двухуровневого программирования с дискретными и непрерывными задачами нижнего уровня не только относительно условий, гарантирующих существование оптимальных решений, но и подходов для нахождения разного вида оптимальных решений. Если задача нижнего уровня выпуклая, то можно использовать, например, необходимые и достаточные условия оптимальности первого порядка для преобразования двухуровневой задачи в одноуровневую. Ситуация будет иной, если в задачах двухуровневого программирования задачи оптимизации нижнего уровня дискретны. В этом случае не существует необходимых и достаточных условий оптимальности для трансформирования задач нижнего уровня в системы неравенств и уравнений. Кроме того, нельзя определить границы оптимального значения целевой функции двухуровневой задачи, рассматривая релаксированную задачу, полученную без учета условия целочисленности переменных.

Отметим, что, несмотря на известные попытки разработки алгоритмов решения дискретных двухуровневых задач, исследования в этой области открыты для новых идей и методов, поскольку ни один из предложенных алгоритмов не подходит для решения задач с большим числом переменных.

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСФЕРТОВ

Содержательно сформулированная ранее двухуровневая задача $P(L,F)$ отражает ситуацию применения оптимистической стратегии, т.е. если множество $\bar{Y}_i(x)$, $i\in N_m$, наилучших назначений мероприятий программы региона R_i содержит более одного варианта, то регион выбирает вариант, наиболее выгодный для центра.

Для решения двухуровневой задачи $P(L,F)$ в оптимистической постановке применим подход, описанный в [15] для задач с непрерывными переменными, учитывая, что рассматриваемые в данной статье задачи $P^i(F)$, $i\in N_m$, нижнего уровня дискретны. Сформулируем задачу $P_t^i(F)$ дискретного параметрического программирования нижнего уровня для региона R_i. Полагаем вектор x^i зависящим от параметра $t\in[0,1]$. Таким образом, имеем

$$P_t^i(F):\max\{\langle d^i, y^i\rangle \mid y^i \in G_t^i(x^i)\},$$

$$G_t^i(x^i)=\{y^i\in Z^n \mid y^i\ge 0,\ y^iA^i\le tx^i+g^i,\ x^i\ge 0,\ g^i\ge 0\},\ t\in[0,1].$$

Полагаем $x^i=(x_1^i,x_2^i,\ldots,x_\ell^i)=(b_1,b_2,\ldots,b_\ell)$. Решение задачи $P_t^i(F)$ обозначим $\bar{y}^i(x^i)$. Проведем параметрический анализ задач $P_t^i(F)$, $i\in N_m$, для определения интервалов значений параметра $t\in[0,1]$, в пределах которых решения $\bar{y}^i(x^i)$ указанных задач остаются оптимальными. Решив m задач вида $P_t^i(F), i\in N_m$, $t\in[0,1]$, находим решения $\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\ldots,\bar{x}^m)$ задачи $P(L)$ верхнего уровня с помощью решения вспомогательной целочисленной задачи с булевыми переменными, приведенной далее.

Справедливы неравенства

$$f_0(\bar{x},\bar{y}(\bar{x}))\ge f_0(x,\bar{y}(x)),\ x\in X,$$

$$f_i(\bar{x}^i,\bar{y}^i(\bar{x}^i))\ge f_i(\bar{x}^i,y^i),\quad y^i\in G^i(\bar{x}^i),\ \forall i\in N_m,$$

свидетельствующие о том, что $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m, \bar{y}^1(\bar{x}^1), \dots, \bar{y}^m(\bar{x}^m))$ — оптимальное решение двухуровневой задачи $P(L, F)$, если в процессе решения задач верхнего и нижнего уровней достигается оптимальность.

Опишем более детально процесс решения двухуровневой задачи $P(L, F)$. Рассмотрим задачу $P_t^i(F)$, $i \in N_m$, нижнего уровня, являющуюся задачей целочисленного параметрического программирования с параметром $t \in [0, 1]$ в правых частях ограничений, описывающих ее допустимую область $G_t^i(x^i)$. Предположим, что $G_0^i(x^i) \neq \varnothing$. Из описания задачи следует, что для всех $t', t'' \in [0, 1]$, таких, что $t' \le t''$, выполняются включения $G_{t'}^i(x^i) \subseteq G_{t''}^i(x^i)$, поэтому $G_t^i(x^i) \neq \varnothing$ для всех $t \in [0, 1]$. В дальнейшем предположим, что множество $G_1^i(x^i)$ ограничено, следовательно, ограничены и $G_t^i(x^i)$ при всех $t \in [0, 1]$. Для решения параметрических задач вида $P_t^i(F)$ используем подход, заключающийся в приближенном решении серии задач целочисленного линейного программирования методом направляющих окрестностей [10, 11]. Следуя указанным работам, введем обозначения и сформулируем утверждения.

Пусть $S = \{s \in Z^n \,|\, \alpha s \notin Z^n \;\; \forall \alpha \in (0, 1)\}$. Таким образом, любую точку $y \in Z^n$ ($y \neq x, x \in Z^n$) можно представить в виде $y = x + \lambda s$, где $s \in S$, $\lambda \in Z^1$, $\lambda > 0$. Множество Z^n рассматривается как метрическое пространство с некоторой метрикой $\rho(y, z)$, определенной $\forall\, y, z \in Z^n$. Пусть G — произвольное подмножество в Z^n.

Окрестностью $O_G(y, r)$ с центром в точке $y \in Z^n$ и радиусом $r > 0$ называют множество всех точек $z \in G$, удовлетворяющих неравенству $\rho(y, z) < r$. Под направляющей окрестностью S_r радиуса $r > 0$ будем понимать подмножество тех элементов из S, которые принадлежат окрестности $O_{Z^n}(x_0, r)$, где x_0 — нулевой элемент в Z^n. Для любой точки $y^i \in Z^n$ в направляющей окрестности S_r выделим множество направлений, ведущих к возрастанию значений целевой функции задачи $P_t^i(F)$:

$$S_r(y^i) = \{s \in S_r \,|\, \langle d^i, s \rangle > 0,\; y^i + s \ge 0,\; \langle a_v^i, y^i + s \rangle \le g_v^i \;\; \forall v \in N_\ell : x_v^i = 0\},$$

где a_v^i — v-я строка матрицы A^i, $v \in N_\ell$.

Очевидно, что точка $\tilde{y}^i \in G_t^i(x^i)$ является точкой локального максимума функции $f_i(x^i, y^i(x^i)) = \langle d^i, y^i(x^i) \rangle$ относительно окрестности $O_{G_t^i}(\tilde{y}^i, r)$ тогда и только тогда, когда в точке $\tilde{y}^i$ не существует ни одного подходящего направления $s \in S_r(y^i)$. В соответствии с [11] справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если точка $\tilde{y}^i(x^i) = \arg\max \{\langle d^i, y^i \rangle \,|\, y^i \in G_{t'}^i(x^i)\}$ относительно окрестности радиуса r при фиксированном $t' \in [0, 1]$, то $\tilde{y}^i(x^i)$ является точкой максимума относительно окрестности радиуса r для всех $t \in [\underline{t}, \bar{t})$ (и только для этих значений параметра):

$$\underline{t} = \max \left\{ \frac{\langle a_v^i, \tilde{y}^i \rangle - g_v^i}{x_v^i} \,\middle|\, x_v^i > 0,\, 1 \le v \le \ell \right\},$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \left\{ \min\limits_{s \in S_r(\tilde{y}^i)} \max \dfrac{\langle a_v^i, \tilde{y}^i + s^i \rangle - g_v^i}{x_v^i} \,\middle|\, x_v^i > 0,\, 1 \le v \le \ell \right\}, & \text{если } S_r(\tilde{y}^i) \neq \varnothing, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при этом $\underline{t} \le t' < \bar{t}$.

Опишем алгоритм нахождения локальных решений параметрической задачи $P_t^i(F)$ нижнего уровня, построенный на основе метода направляющих окрестностей [11].

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ $P_t^i(F)$

1. Выбираем начальное приближение $\widetilde{y}^{i,0} \in G_0^i$ и задаем целочисленный радиус $r > 0$. Полагаем $k = 1$, $\bar{t}_0 = 0$.

2. На каждой k-й ($k = 1, 2, \ldots$) итерации алгоритма применяем для поиска локального решения задачи $P^i(F)$ при $t = \bar{t}_{k-1}$ метод направляющих окрестностей, задавая в качестве начального приближения $y^{i,0} = \widetilde{y}^{i,k-1}$. В результате на некотором h-м шаге его работы получаем точку $y^{i,h}$ максимума функции $f(y^i)$ относительно окрестности радиуса r.

3. Вычисляем величины

$$\underline{t}_k = \max\left\{\frac{\langle a_v^i, y^{i,h}\rangle - g_v^i}{x_v^i}, 1 \le v \le \ell\right\}, \tag{5}$$

$$\bar{t}_k = \begin{cases} \left\{\min\limits_{s \in S_r(y^{i,h})} \max \dfrac{\langle a_v^i, y^{i,h} + s\rangle - g_v^i}{x_v^i}, 1 \le v \le \ell\right\}, & \text{если } S_r(y^{i,h}) \ne \varnothing, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{6}$$

такие, что $y^{i,h}$ будет точкой локального максимума функции $f_i(y^i)$ для всех значений $t \in [\underline{t}_k, \bar{t}_k)$. Полагаем $\widetilde{y}^{i,k} = y^{i,h}$. Если $\bar{t}_k \le 1$, то заменяем k на $k+1$ и переходим к п. 2, в противном случае — к п. 4.

4. Работа по алгоритму заканчивается, поскольку исследован весь отрезок $[0, 1]$ изменения параметра t.

В результате работы алгоритма построена последовательность точек локальных максимумов $\widetilde{y}^{i,1}, \widetilde{y}^{i,2}, \ldots, \widetilde{y}^{i,k}, \ldots$ и соответствующая ей последовательность интервалов $[\underline{t}_1, \bar{t}_1), [\underline{t}_2, \bar{t}_2), \ldots, [\underline{t}_k, \bar{t}_k), \ldots$ таких, что $\widetilde{y}^{i,k}$ — точка локального максимума для всех значений t из интервала $[\underline{t}_k, \bar{t}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Согласно [11] справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Последовательности $\{\underline{t}_k\}$ и $\{\bar{t}_k\}$ значений t, построенные по формулам (5), (6) согласно алгоритму решения задачи $P_t^i(F)$, конечны, а количество итераций алгоритма не превышает величины $h = (\alpha - f_i(\widetilde{y}^{i,1})) / \min\{\langle d^i, s\rangle \mid s \in S_r, \langle d^i, s\rangle > 0\}$, где α — постоянное число, такое, что $f_i(y^i) \le \alpha$ для всех $y^i \in G_1^i(x^i)$.

Доказательство. Выполнение для задачи $P_t^i(F)$ условий $x_v^i \ge 0$, $v \in N_\ell$, влечет за собой построение согласно алгоритму последовательности $\{\widetilde{y}^{i,k}\}$ локальных решений задачи $P_t^i(F)$, являющейся одновременно последовательностью точек из области $G_1^i(x^i)$. Поскольку переход от точки к точке осуществляется только при условии возрастания значений целевой функции $f_i(x^i, y^i(x^i)) = \langle d^i, y^i(x^i)\rangle$ (т.е. вдоль перспективных направлений возрастания), выполняются неравенства

$$f_i(\widetilde{y}^{i,1}) < f_i(\widetilde{y}^{i,2}) < \ldots < f_i(\widetilde{y}^{i,k}) < f_i(\widetilde{y}^{i,k+1}) < \ldots,$$

$$f_i(\widetilde{y}^{k+1}) - f_i(\widetilde{y}^k) \ge \min\{\langle d^i, s\rangle \mid s \in S_r, \langle d^i, s\rangle > 0\} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots$$

С учетом ограниченности множества $G_1^i(x^i)$ из последних неравенств следует справедливость теоремы.

В процессе решения задачи целочисленного программирования $P_t^i(F)$ нижнего уровня для каждого региона $R_i, i \in N_m$, получили множества $\widetilde{Y}_i(x^i) = \{\widetilde{y}^{i,k}(x^i), k = 1, \ldots, q_i\}, i \in N_m$, локально оптимальных решений и соответствующих им значений параметра $T^i = \{\underline{t}_k^i, \bar{t}_k^i, k = 1, \ldots, q_i\}, i \in N_m$, при которых решения сохраняют оптимальность. Здесь q_i — мощность множества $\widetilde{Y}_i(x^i)$, $i \in N_m$. Далее среди решений, содержащихся во множествах $\widetilde{Y}_i(x^i), i \in N_m$, нужно выбрать те решения, на которых достигается максимум целевой функции задачи $P(L)$ верхнего уровня при ее ограничениях, т.е. решить задачу

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \langle c^i, \widetilde{y}^i(x^i) \rangle \mid \widetilde{y}^i(x^i) \in \widetilde{Y}_i(x^i), i \in N_m, x = (x^1, x^2, \ldots, x^m) \in X \right\}.$$

Такой выбор можно осуществить на основе решения вспомогательной задачи целочисленной оптимизации с булевыми переменными

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{q_i} \langle c^i, \widetilde{y}^{i,k} \rangle z_{ik} \tag{7}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{q_i} \underline{t}_k^i z_{ik} \le 1, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{q_i} z_{ik} = 1, \; i \in N_m, \tag{9}$$

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если решение } \widetilde{y}^{i,k} \text{ выбирается из множества } \widetilde{Y}_i(x^i), \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{10}$$

$$i \in N_m, \; k \in N_{q_i}.$$

Отметим, что задача (7)–(10) принадлежит к классу труднорешаемых задач [12], поэтому найти эффективный алгоритм для получения ее точного решения сложно. Для этой задачи можно использовать приближенные методы решения задач линейного целочисленного программирования с булевыми переменными, широко представленные в [12, 34]. В качестве приближенного решения двухуровневой задачи $P(L, F)$ выбираем те векторы $\widetilde{y}^{i,k} \in \widetilde{Y}_i$, $i \in N_m$, $k = 1, \ldots, q_i$, которым соответствуют значения переменных $z_{ik} = 1$. Векторы $\widetilde{x}^i$, $i \in N_m$, вычисляем таким образом: $\widetilde{x}^i = \underline{t}_k^i b$, $i \in N_m$, $k \in N_{q_i}$, где $\underline{t}_k^i \in T^i$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье исследованы задачи оптимального распределения трансфертов при заданных бюджетных ограничениях в целях максимизации социального благосостояния, определенного в соответствии с заданным критерием. Математическая модель представлена в виде двухуровневой линейной задачи, содержащей задачи целочисленной оптимизации нижнего уровня, оптимальные решения которых используются при задании области допустимых решений задачи верхнего уровня. Предложенный в статье подход к решению оптимистической постановки двухуровневой задачи позволяет получать приближенные решения двухуровневых дискретных задач с использованием эффективных алгоритмов локального поиска. Направлением дальнейших исследований предполагается адаптация предложенных алгоритмов для многопроцессорных сред. Также одно из перспективных направлений — двухуровневая многокритериальная оптимизация, открывающая возможности для новых фундаментальных и прикладных исследований, порождаемых значительным количеством современных приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалевич М.В., Сергиенко И.В. Моделирование переходной экономики: модели, методы, информационные технологии. Киев: Наук. думка, 2005. 672 с.
2. Сергиенко И.В., Семенов В.В. Моделирование системы межбюджетных трансфертов в Украине. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 4. С. 129–138.
3. Семенов В.В. Моделювання впливу міжбюджетних трансфертів України на фінансування соціальної інфраструктури. *Доповіді НАН України*. 2013. № 10. С. 47–53.
4. Sergienko I.V. Topical directions of informatics. In memory of V.M. Glushkov. New York; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2014. 286 p.
5. Семенов В.В. Економіко-статистичні моделі та методи дослідження соціальних процесів: нерівність, бідність, поляризація. Київ: РВВ ПУСКУ, 2008. Т. 1. 238 с.; Т. 2. 270 с.
6. Сергієнко І.В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності. Київ: Академперіодика, 2010. 318 с.
7. Семенов В.В., Семенова Н.В. Прогресивний перерозподіл у системі міжбюджетних трансфертів України. *Теорія оптимальних рішень*. Київ: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2014. С. 68–75.
8. Семенов В.В. Вирівнюючі властивості системи міжбюджетних трансфертів України. *Spoleczno-ekonomiczne problemy gospodarowania w warunkach transformacji*. Warszawa, 2011. P. 117–131.
9. Семенов В.В., Семенова Н.В. Прогресивність податкових систем. *Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право.* 2011. № 2. С. 69–75.
10. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наук. думка, 1988. 472 с.
11. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
12. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы, решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 262 с.
13. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. Москва: Мир, 1973. 344 с.
14. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. Москва: Наука, 1976. 326 с.
15. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Рівне: РВВ НУВВП, 2011. 624 с.
16. Stackelberg H.F. Marktform und Gleichgewicht. Berlin: Springer-Verlag, 1934.
17. Bracken J., McGill J.T. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Operations Research*. 1973. Vol. 21, N 1. P. 37–44.
18. Ben-Ayed O. Bilevel linear programming. *Comput. Oper. Res*. 1993. Vol. 20, N 5. P. 485–501.
19. Bard J. Practical bilevel optimization. Algorithms and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. 476 p.
20. Dempe S. Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
21. Vicente L.N., Calamai P.H. Bilevel and multilevel programming. A bibliography review. *J. Global Optim*. 1994. Vol. 5, N 3. P. 291–306.
22. Dempe S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints. *Optimization*. 2003. Vol. 52, N 3. P. 33–35.
23. Dempe S. Bilevel programming. A Survey. Preprint TU Bergakademie Freiberg Nr. 2003-11. Fakultat fur Mathematik und Informatik.
24. Hansen P., Jaumard B., and Savard G. New branch-and-bound rules for linear bilevel programming. *SIAM. Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1992. Vol. 13. P. 1194–1217.
25. Vicente L., Savard G., Judice J. Discrete linear bilevel programming problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1996. Vol. 89, N 3. P. 597–614.
26. Sinha A., Malo P., Deb K. A review on bilevel optimization: From classical to evolutionary approaches and applications. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2018. Vol. 22, N 2. P. 278–295.
27. Semenova N.V. Methods of searching for guaranteeing and optimistic solutions to integer optimization problems under uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 1. P. 85–93.

28. Sergienko I.V., Semenova N.V. Integer programming problems with inexact data: Exact and approximate solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1995. Vol. 31, N 6. P. 842–851.
29. Roshchin V.A., Semenova N.V., Sergienko I.V. Solution and investigation of one class of inexact integer programming problems. *Cybernetics*. 1989. Vol. 25, N 2. P. 185–193.
30. Semenova N.V. Solution of a generalized integer-valued programming problem. *Cybernetics*. 1984. Vol. 20, N 5. P. 641–651.
31. Bard J.F., Moore J. An algorithm for the discrete bilevel programming problem. *Naval Research Logistics*. 1992. Vol. 39. P. 419–435.
32. Caprara A., Fischetti M. Odd cut-sets, odd cycles, and 0-1/2 Chvata–Gomory cuts. Working Paper. Univ. Padua, Italy, 1994.
33. Vicente L.N., Savard G., Judice J.J. The discrete linear bilevel programming problem. Report N. G-94–12, GERAD, École Polytechnique Université McGill, Montréal, 1994.
34. Сергиенко И.В., Шило В.П. Проблемы дискретной оптимизации: сложные задачи, основные подходы к их решению. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. Т. 42, № 4. С. 3–25.

Надійшла до редакції 07.02.2019

І.В. Сергієнко, Н.В. Семенова, В.В. Семенов

ДВОРІВНЕВА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗПОДІЛУ МІЖБЮДЖЕТНИХ ТРАНСФЕРТІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Анотація. Сформульовано і досліджено задачі оптимального розподілу трансфертів із заданими бюджетними обмеженнями. Математичну модель представлено як дворівневу лінійну задачу, що містить лінійні задачі цілочислової оптимізації нижнього рівня. Розглянуто оптимістичну і песимістичну постановки задачі. Для наближеного розв'язання оптимістичної постановки запропоновано алгоритм знаходження локальних розв'язків параметричних задач цілочислового програмування нижнього рівня на основі методу напрямних околів. Розв'язання допоміжної цілочислової задачі з булевими змінними для знаходження розв'язків задачі верхнього рівня здійснюється алгоритмами локального пошуку.

Ключові слова: дворівнева оптимізаційна задача, цілочислова оптимізація, параметричне програмування, булеві змінні, локальний алгоритм.

I.V. Sergienko, N.V. Semenova, V.V. Semenov

BILEVEL OPTIMIZATION PROBLEMS OF DISTRIBUTION OF INTERBUDGETARY TRANSFERS UNDER GIVEN LIMITATIONS

Abstract. The problems of optimal distributing of transfers within given budget limitations are defined and investigated. The mathematical model is presented as a bilevel linear optimization problem that contain linear problems of integer optimization at the bottom level. Both optimistic and pessimistic versions of the problem were considered. For the approximate solution of the optimistic version the algorithm of finding local solutions for parametric lower-level integer programming problems on the basis of the method of directing neighborhoods was proposed. The auxiliary integer programming problem with Boolean variables of a higher level is solved based on local algorithms.

Keywords: bilevel optimization problem, integer optimization, parametric programming, Boolean variables, local algorithm.

Сергиенко Иван Васильевич,
академик НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, директор Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: incyb@incyb.kiev.ua.

Семенова Наталия Владимировна,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: nvsemenova@meta.ua.

Семенов Виктор Викторович,
младший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: semenov.jr@gmail.com.