



МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Рассмотрена задача структурно-параметрической идентификации сложной многомерной многосвязной дискретной системы в классе моделей в пространстве состояний. Предполагается, что известны только входные и выходные координаты системы на некотором интервале времени и диапазон погрешности измерений. За основу принят метод выделяемого подпространства, который предполагает, что размерность системы (вектора состояния) известна. Однако это не всегда выполняется на практике. Кроме того, ввиду зависимости от уровня шума невозможно корректно идентифицировать систему большой размерности. Поэтому предложено рассматривать размерность в качестве регуляризирующего параметра. Разработаны три способа выбора приближенной размерности модели в зависимости от длительности интервала наблюдений и возможности активного эксперимента. Предлагаемые методы апробированы на примере задачи идентификации когнитивной карты коммерческого банка в импульсном процессе.

Ключевые слова: структурно-параметрическая идентификация, аппроксимирующая модель, метод выделяемого подпространства (4SID), регуляризация, многосвязная система, когнитивная карта, импульсный процесс.

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена проблеме идентификации линейных многосвязных дискретных систем большой размерности, в том числе таких, которые могут быть представлены в виде разложений, асимптотически приближающихся к точному описанию с увеличением их размерности. Наиболее приемлемым модельным классом для этих систем является описание в пространстве состояний, когда кроме входных и выходных переменных заданных размерностей используются внутренние переменные, характеризующие текущее состояние системы. Размерность внутренних переменных определяет структуру и сложность системы в классе моделей, который для линейного случая записывается в виде векторно-матричных уравнений. Для систем большой сложности размерность, как правило, неизвестна. Даже если она известна, то нет гарантий, что по исходным экспериментальным данным можно корректно построить модель именно этой размерности. Поэтому в настоящей статье рассматривается структурно-параметрическая идентификация с определением размерности модели и соответствующих ей основных матриц A , B , C , D . При этом находится приближенное решение задачи идентификации, согласованное по точности с погрешностью исходных данных.

Основанием именно такого подхода к проблеме идентификации систем большой размерности послужили результаты исследований качества идентифицируемых моделей, определяемого ошибками оценивания [1, 2]. Установлено,

что с увеличением размерности модели уменьшается отклонение измеряемого выхода от соответствующего выходного сигнала модели при одном и том же входе. Одновременно увеличение размерности искомой модели приводит к увеличению чувствительности решения к погрешностям данных. При определенной размерности наступает равенство погрешностей, обусловленных указанными факторами. Именно ее целесообразно считать оптимальной, поскольку дальнейшее увеличение размерности приведет к большим ошибкам вычисляемых параметров модели. Ввиду разных причин практически невозможно в реальных условиях определить эту эффективную по качеству модели размерность. Поэтому в данной статье предлагается иной способ нахождения размерности приближенной модели, основу которого составляет регуляризованное решение. В этом случае размерность модели будем считать регуляризирующим параметром, и тогда в соответствии с методами регуляризации некорректно поставленных задач порядок модели определяется исходя из принципа согласованности выбранного решения с погрешностью исходных данных. В определенных случаях для этого достаточно задать такую размерность, чтобы невязка выходного сигнала модели по отношению к измеренному была меньшей или равной ограничению на допустимую погрешность исходных данных. Для размерности, на единицу меньшей, это условие уже не должно выполняться. При таком выборе удовлетворяются требования, предъявляемые к регуляризованному решению. Действительно, при стремлении погрешности к нулю и объема данных к бесконечности определяемая размерность будет возрастать, приближаясь к точному решению. Когда уменьшение погрешности достигается при стремлении длительности эксперимента к бесконечности, можно приблизиться к случаю, при котором размерность определяется вычислительной погрешностью.

В настоящей статье на основе теории реализаций в пространстве состояний [3], оригинального матричного представления модели многосвязной системы, предложенного в [4], а также теоретических положений, используемых в методах стохастической идентификации (N4SID, RobustN4SID, PO-MOESP и других методах), описанных, например, в [5–8], рассмотрены различные способы построения регуляризованного решения задачи идентификации без использования стохастической трактовки погрешности данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исследуемый объект является дискретной линейной динамической системой с r входами и m выходами. Внутренние переменные связывают входные воздействия с измеряемыми выходами и определяют текущее состояние системы. В сложном объекте векторы состояния принадлежат конечномерному пространству большой размерности или бесконечномерному пространству. При таких условиях по данным с погрешностью может быть найдено только приближенное решение задачи идентификации. Приемлемым классом моделей, описывающих наблюдаемые динамические процессы в таких объектах, является следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + \eta(k), \\y(k) &= Cx(k) + Du(k) + \xi(k),\end{aligned}\tag{1}$$

где x — вектор состояния системы размерности n ; y — вектор измерений размерности m ; u — вектор входного воздействия размерности r ; A — квадратная, а B , C , D — прямоугольные матрицы размера $n \times n$, $n \times r$ и $m \times n$ соответственно. Для большого числа различных по своей природе объектов, в том числе непрерывных, согласно [9] описание (1) будет асимптотически приближаться к точному при увеличении размерности n вектора x и стремлении к нулю шага дискретизации. В определенных ситуациях, когда оперируем чисто дискретной динамикой, как, например, в случае с импульсными процессами в когнитивных картах, система (1) является классом моделей, в котором может содержаться точное описание.

Исходная система в классе моделей (1) будет идентифицирована на основе данных, получаемых в экспериментах, которые проводятся на исследуемом объекте. Это могут быть активные эксперименты, когда входное воздействие формируется экспериментатором, и пассивные, когда $u(k)$ является априори неизвестным, но измеряемым внешним воздействием. В результате проведенных экспериментов имеем временные векторные ряды $\{y(k)\}$ и $\{u(k)\}$, $k = 1, N$, где N — длительность эксперимента. В реальных условиях измерения осуществляются с погрешностью. Кроме того, на входе помимо контролируемых воздействий могут быть аддитивные возмущения. К ним относят также немоделируемую динамику, т.е. речь идет о наличии невязки выходных переменных модели и реальной системы, обусловленной приближенным описанием, например, за счет меньшей по сравнению с объектом размерности модели.

В данной статье рассматривается нестохастическая идентификация, когда реализуемые погрешности измерения $\xi(k)$ и возмущения $\eta(k)$ могут быть произвольными, но ограниченными по величине. Предположим, что каждая компонента вектора $\xi(k)$ ограничена неравенствами:

$$|\xi_i(k)| \leq \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Оценить в явном виде погрешности $\eta(k)$ достаточно сложно. Поэтому в основном будут рассматриваться случаи, когда возмущения отсутствуют. Если известно, что погрешности измерения и возмущения ограничены, а значения ограничений неизвестны, то под значением ε_i в (2) можно понимать сумму погрешностей измерения и вклад возмущенного движения в выходной сигнал, который остается малым и ограниченным по величине. Именно для этого случая предлагается находить регуляризованное решение из условия его устойчивости при такой неопределенности.

Рассмотрим следующую задачу. По данным (неточным), полученным на основании экспериментов, найти размерность модели и значения соответствующих ей элементов матриц A, B, C, D , которые наилучшим образом аппроксимируют эти данные, т.е. на любое допустимое входное воздействие модель и система дают на выходе близкие отклики. Близость определяется погрешностью (2).

ПЕРЕХОД К СООТНОШЕНИЯМ ВХОД-ВЫХОД

В большинстве 4SID-методов (subspace-based state space system identification) используются представления класса моделей (1) в виде соотношений вход-выход. Для этого с учетом измеренных значений $\{y(k)\}$, $k = 1, N$, формируется обобщенная матрица Ганкеля

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(N_1) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(N_1 + 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(K) & y(K + 1) & \cdots & y(K + N_1 - 1) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $K + N_1 = N$, а значение K должно превышать предполагаемую размерность искомой модели.

Если воспользоваться формулой Коши, записанной для дискретного случая, и с помощью ее и уравнения наблюдения в (1) перейти к выходным переменным, то получим

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k + 1) \\ \vdots \\ y(k + K - 1) \end{bmatrix} = \Gamma_K \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \Phi_K \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k + 1) \\ \vdots \\ u(k + K - 1) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $x_i(k)$ — соответствующая компонента вектора $x(k)$; Γ_K — матрица наблюдаемости; Φ_K — нижнетреугольная теплицева матрица импульсных откликов,

$$\Gamma_K = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}, \Phi_K = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ CA^{K-2}B & CA^{K-3}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получаем матричное уравнение

$$Y = \Gamma_K X + \Phi_K U, \quad (6)$$

где

$$X = [x(1) \dots x(N_1)], U = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(N_1) \\ u(2) & u(3) & \dots & u(N_1+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(K) & u(K+1) & \dots & u(N_1+K-1) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, матричное уравнение (6) является исходным для имеющихся и описанных в литературе прямых 4SID-методов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА

Суть всех 4SID-методов состоит в том, чтобы на основе (6) и положений теории реализаций получить оценку матриц Γ_K и Φ_K , исходя только из знания матриц Y и U . Был рассмотрен ряд способов трансформации этих матриц, позволяющих выделить сигнальные подпространства, которым для некоторой реализации принадлежит Γ_K . Опишем некоторые из них с ориентацией на нестохастическую идентификацию, т.е. когда погрешность описывается в виде (2).

В случае, когда квадратная матрица $U \cdot U^T$ не является вырожденной или плохо обусловленной, можно использовать ортогональную проекцию на нуль-пространство матрицы U . Таковой будет матрица

$$\Pi^\perp = I - U^T (U \cdot U^T)^{-1} \cdot U. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что для этой матрицы выполняется условие

$$U \cdot \Pi^\perp = 0.$$

Тогда если умножить уравнение (6) справа на матрицу Π^\perp , то получим

$$Y \cdot \Pi^\perp = \Gamma_K \cdot X \cdot \Pi^\perp = Y_1 \cdot Y_2, \quad (9)$$

где $Y_1 = \Gamma_K$, $Y_2 = X \cdot \Pi^\perp$.

Известно, что описание системы (1) не является единственным. Любой невырожденной квадратной матрице T размера, совпадающего с размерностью вектора x , согласно теории реализаций соответствует полностью эквивалентное по входу и выходу описание с матрицами A', B', C' тех же размеров, что и матрицы A, B, C . Эти эквивалентные описания связаны соотношениями

$$x = T^{-1}x', A' = TAT^{-1}, B' = TB, C' = CT^{-1}, D' = D, \Gamma'_K = \Gamma_K \cdot T,$$

$$X' = T^{-1}X, \det T \neq 0.$$

Тогда

$$Y \cdot \Pi^\perp = Y_1 \cdot Y_2 = Y'_1 \cdot Y'_2, \quad (10)$$

где $Y'_1 = \Gamma'_K$, $Y'_2 = X' \cdot \Pi^\perp$. Это означает, что при любом разложении (10) с матрицей Y_2 , имеющей полный ранг, равный n , первая матрица будет матрицей наблюдаемости для некоторой возможной реализации. Поэтому, чтобы найти Γ' , достаточно выполнить такое разложение. Обычно в 4SID-методе для этой цели используется SVD-разложение $Y \cdot \Pi^\perp$, т.е.

$$Y \cdot \Pi^\perp = Q\Sigma V^T, \quad (11)$$

где Q и V — ортогональные матрицы, Σ — диагональная матрица сингулярных чисел, расположенных в невозрастающем порядке на диагонали.

Если система, генерирующая данные, имеет размерность n , а исходные данные и проводимые вычисления являются точными, то матрица Σ будет иметь не равные нулю первые n сингулярных чисел, а остальные числа будут нулевыми. В этом случае число ненулевых сингулярных чисел определяет размерность модели. Наличие любой погрешности делает матрицу Σ полноранговой с вероятностью почти единица. При очень малых погрешностях и не очень больших размерностях исследуемой системы в некоторых случаях можно заметить разрыв между существенными (по величине) сингулярными числами и малосущественными. Однако в большинстве реальных ситуаций установить границу между сингулярными числами, соответствующими системе, и порождаемыми погрешностями практически не представляется возможным. Поэтому в данной статье предлагается находить в задачах идентификации приближенное регуляризованное решение, согласованное по точности с погрешностью данных (2). Такой подход основывается на идеях регуляризации [10] и обеспечивает асимптотическое приближение к точному решению при уменьшении погрешности и увеличении объема данных. Описание методов нахождения регуляризирующих решений дано в последующих разделах. В качестве регуляризирующего параметра задаем размерность искомой модели. После нахождения размерности приближенной модели можно воспользоваться формализмом 4SID-методов для вычисления соответствующих матриц A, B, C, D . Для этого представим разложение (11) в виде

$$Y \cdot \Pi^\perp = Q_m \Sigma_m V_m^T + Q_e \Sigma_e V_e^T, \quad (12)$$

где

$$Q = [Q_m, Q_e], \quad V = [V_m, V_e], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_m & 0 \\ 0 & \Sigma_e \end{bmatrix},$$

Q_m и V_m — матрицы, число столбцов которых равно установленной размерности модели, а Σ_m — квадратная матрица размерности модели. Согласно изложенному полагаем

$$\Gamma'_K = Q_m. \quad (13)$$

Таким образом, первое слагаемое в (12) соответствует модели, а второе включает погрешности данных и неучитываемую динамику.

Соотношение (13) позволяет достаточно легко вычислить оценки матриц A' и C' для некоторой реализации. Матрица C' — это первые m строк матрицы Q_m , а матрицу A' можно найти, воспользовавшись свойством сдвиговой инвариантности матрицы Γ_K . Тогда оценку A' получим из следующего приближенного матричного уравнения:

$$Q_{m,1:n} A' \approx Q_{m,2:n+1}, \quad (14)$$

где $Q_{m,1:n}$ — матрица, полученная из Q_m отбрасыванием последних m строк, а $Q_{m,2:n+1}$ — отбрасыванием первых m строк.

Система (14) является переопределенной ($K > n$), и ее решение находится с помощью обычного или обобщенного метода наименьших квадратов (МНК). После определения A' могут быть найдены матрицы B' и D' из уравнения (6), умноженного слева на матрицу Q_e^T из (12). Ввиду ортогональности матрицы Q имеем $Q_e^T \cdot Q_n = 0$; тогда из (6) получаем переопределенную систему уравнений для нахождения B' и D' :

$$Q_n^T \Phi U = Q_n^T Y. \quad (15)$$

Из (15) с помощью МНК находим оценку B' и D' . Более детально данный подход к идентификации изложен в [11].

Другой более общий и эффективный подход к идентификации описан в [5].

Согласно такому подходу из Y и U формируется составная матрица $\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix}$ и осу-

ществляется ее RQ-разложение, т.е. она представляется как

$$\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Одновременно с (6) рассматриваются матрица $\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}$ и ее RQ-разложение

$$\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{x1} & R_{x2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_x \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Очевидно, что матрицы R_{11} и Q_1 в разложениях (16), (17) одинаковые. На основе (16) и (17) с учетом (6) в работе [5] было установлено равенство

$$R_{22} = \Gamma_K \cdot Q_x \cdot Q_2^T \cdot R_{x2}. \quad (18)$$

Согласно теории реализаций матрицу R_{22} можно записать в виде, аналогичном (10). Это означает, что при любом представлении матрицы R_{22} в (18), которая является произведением двух полноранговых матриц, можно первую из них взять за Γ'_K для некоторой реализации. Принято в качестве такого разложения использовать SVD, а именно

$$R_{22} = Q \Sigma V^T, \quad (19)$$

где Q , Σ , V определяются по формуле (11). В результате имеем $\Gamma'_K = Q$, и после определения размерности регуляризованного решения изложенным в последующих разделах методом записываем разложение (12). Матрицы A' и C' для соответствующей реализации находятся по формулам, аналогичным (13), (14). Для нахождения матриц B' и D' следует воспользоваться формулами, приведенными в [5].

Для стохастической идентификации разработаны алгоритмы 4SID-метода, отличающиеся способами формирования информационных матриц. Многие из них доведены до практической реализации для использования в среде Matlab; этим можно воспользоваться при решении конкретных задач [12].

Третий оригинальный и более подходящий подход к нахождению решения, согласованного по точности с погрешностью (2), можно реализовать в активных экспериментах, когда имеем возможность формировать относительно произвольное входное воздействие.

Пусть длительность эксперимента $[0, N]$ достаточно велика и допускающая возможность его разбиения на последовательность интервалов $[k_j, k_{j+1}]$ так, что $k_0 = 0$ ($j = 0$) соответствует первому интервалу, а $j = K_1$ — последнему, т.е. точка k_{K_1+1} совпадает с N . Все четные интервалы ($j = 0, 2, 4, \dots$) являются интервалами возбуждения с ненулевым входным воздействием, а все нечетные являются интервалами релаксации или свободного движения. Число точек для всех j на интервале релаксации выбираем одинаковым и равным N_2 . Интервалы возбуждения могут иметь разную длину, в том числе случайную. Целесообразно входные последовательности на интервалах возбуждения формировать так, чтобы иметь большое разнообразие начальных состояний в моменты k_{j+1} , $j = 0, 2, 4, \dots$. В случае, если величина входных сигналов имеет ограничения по амплитуде $|u_i(k)| \leq u_0$, $i = 1, r$, достаточно подавать случайным образом минимальное и максимальное значения сигнала по каждой координате $u_i(k) = \pm u_0$ при условии, что длительность интервала возбуждения случайна.

В каждый момент времени измеряются выходные переменные, из которых формируется временная векторная последовательность $\{y(k)\}$. Кроме сигнала отклика системы каждое значение $y(k)$ содержит ошибки измерения. Из зашумленных измерений на интервалах релаксации формируем матрицу

$$Y_{\text{relax}} = \begin{bmatrix} y^1(1) & y^3(1) & \dots & y^{K_1}(1) \\ y^1(2) & y^3(2) & \dots & y^{K_1}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^1(N_2) & y^3(N_2) & \dots & y^{K_1}(N_2) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $y^s(k)$ — вектор измерений в точке k для s -го интервала релаксации ($s=1,3,\dots$), K_1 соответствует последнему интервалу релаксации на интервале $[0, N]$.

Матрице (20) согласно формуле Коши для дискретного процесса соответствует матричное уравнение

$$Y_{\text{relax}} = \Gamma_{N_2} \cdot X_0, \quad (21)$$

где Γ_{N_2} — матрица наблюдаемости,

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1^1(1) & x_1^3(1) & \dots & x_1^{K_1}(1) \\ x_2^1(1) & x_2^3(1) & \dots & x_2^{K_1}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1(1) & x_n^3(1) & \dots & x_n^{K_1}(1) \end{bmatrix}$$

является матрицей начальных состояний на интервалах релаксации, n — размерность вектора состояния.

Вначале необходимо восстановить размерность регуляризованного решения. Описание методов его нахождения дано в следующем разделе. Далее решается задача параметрического оценивания элементов матриц A, B, C, D . Для этого, как и в описанных выше случаях, используется сингулярное разложение матрицы Y_{relax} и разбиение соответствующих матриц SVD на блоки:

$$Y_{\text{relax}} = Q_m \Sigma_m V_m^T + Q_e \Sigma_e V_e^T, \quad (22)$$

где первое слагаемое есть аппроксимация зашумленной матрицы Y_{relax} матрицей неполного ранга n . Она и будет определять приближенную модель системы, по точности согласованную с погрешностью данных (1). (Определение дано в следующем разделе.)

После выполнения разбиения (22) полагаем

$$\Gamma'_{N_2} = Q_m, \quad X'_0 = \Sigma_m V_m. \quad (23)$$

Представление (23) позволяет найти матрицы A', B', C', D для некоторой реализации. Матрицы A' и C' находятся из первого соотношения в (23). Матрица C' представляет первые m строк Q_m , а матрица A' находится из уравнения, аналогичного уравнению (14).

Чтобы найти матрицы B' и D (матрица D инвариантна относительно неособого преобразования), запишем аналогичное (4) векторно-матричное уравнение для k -го интервала возбуждения:

$$y^k = \Gamma_{N_{k_3}} A^{N_2-1} x^{k-1} + \Phi_{N_{k_3}} u^k, \quad k=2, 4, \dots, K_1-1, \quad (24)$$

где N_{k_3} — количество точек на k -м интервале возбуждения,

$$y^k = \begin{pmatrix} y^k(1) \\ y^k(2) \\ \vdots \\ y^k(N_{k_3}) \end{pmatrix}, \quad x^{k-1} = \begin{pmatrix} x_1^{k-1}(1) \\ x_2^{k-1}(1) \\ \vdots \\ x_n^{k-1}(1) \end{pmatrix}, \quad u^k = \begin{pmatrix} u^k(1) \\ u^k(2) \\ \vdots \\ u^k(N_{k_3}) \end{pmatrix},$$

$y^k(j), u^k(j)$ — выход и вход в j -й точке k -го интервала возбуждения, x^{k-1} — $(k-1)$ -й столбец матрицы X_0 ,

$$\Gamma_{N_{k_3}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N_{k_3}-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{N_{k_3}} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & D & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ CA^{N_{k_3}-2}B & CA^{N_{k_3}-3}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}.$$

Пусть $y^k - \Gamma_{N_{k_3-1}} A^{N_2-1} x^{k-1} = \bar{y}^k$, а поскольку матрица X_0 определена в (23), то \bar{y}^k является известной величиной. Тогда матрицы B и D можно найти из переопределенной системы матричных уравнений

$$\Phi_{N_{k_3}} u^k = \bar{y}^k, \quad (25)$$

используя для этого обычный или обобщенный МНК.

В литературе описаны и другие модификации метода выделяемого подпространства; некоторые из них можно найти в [8, 11].

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Как сказано выше, важнейшей характеристикой, необходимой для определения в процессе идентификации системы, является ее размерность, которая в то же время выступает и регуляризирующим параметром в предлагаемом способе идентификации. Рассмотрим несколько подходов к определению размерности системы с учетом изложенных выше возможностей.

Регуляризованное решение на коротком интервале. Опишем метод, позволяющий находить регуляризованное решение задачи идентификации многомерной многосвязной (ММО) линейной системы по экспериментальным данным на относительно небольшом интервале наблюдения $[0, N]$. Будем находить размерность, соответствующую регуляризованному решению, путем изменения ее в определенных пределах и выберем некоторую начальную размерность $n_0 \geq m$. Для выбранного n_0 с использованием одного из описанных ранее подходов находим полное решение задачи идентификации, т.е. восстанавливаем по исходным данным матрицы A, B, C . Для построенной таким образом модели проводим вычислительный эксперимент. Подаем на ее вход точно такой же сигнал, как и при формировании данных для идентификации системы. Находим отклик модели на этот сигнал, т.е. вычисляем последовательность $\{y^m(k)\}$, $k = \overline{1, N}$, где $y^m(k)$ — выход модели в момент k . Повторяем эту процедуру для других $n > n_0$. Для каждого n проводим сравнение выходных сигналов модели и исследуемой системы, т.е. находим

$$|\tilde{y}_i(k) - y_i^m(k)|, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (26)$$

По каждому выходу определяем наибольшее рассогласование сигналов, а именно находим оценку

$$\max_k |\tilde{y}_i(k) - y_i^m(k)| = \varepsilon_i(n_0), \quad i = \overline{1, m}. \quad (27)$$

Теперь для каждой компоненты выхода проверяем выполнимость неравенства

$$\varepsilon_i(n_0) \leq \varepsilon_i. \quad (28)$$

Здесь возможны два подхода. В первом на множестве решений с разными n находится такое n^* , начиная с которого неравенство выполняется для всех координат. В таком случае размерность регуляризованного решения задачи идентификации равна n^* . Однако на практике часто выполнение неравенства (28) для всех выходных координат с разными n невозможно. В таком случае предлагается использовать другой подход, в котором рассматриваются два показателя. Первый показатель — это часть (процент) таких координат $\varepsilon_i(n_0)$ среди всех m , для которых неравенство (28) не выполняется, т.е. процент значений невязок (26), превышающих соответствующие ε_i . Второй показатель — максимальное значение $\max_i \varepsilon_i(n_0)$ по всем координатам. Можно построить зависимость этих показателей от выбираемой размерности модели, начиная со значения, равного размерности вектора измерений. Сначала наблюдается спад обоих показателей, а затем, начиная с определенного значения, они практически не

изменяются, т.е. наступает их стабилизация. Размерность, с которой наступает насыщение, будем выбирать в качестве искомой. Значения матриц A , B , C , ей соответствующие, дают полное решение задачи идентификации.

Идентификация при специальном входном воздействии. Рассмотрим активный эксперимент, описанный в предыдущем разделе. Применим итеративную схему нахождения размерности модели, определяющей регуляризованное решение. Для этого выполним сингулярное разложение матрицы Y_{relax} (20) и для некоторого начального значения размерности предполагаемой модели произведем декомпозицию (22).

Запишем по аналогии с (20) матрицу погрешностей

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi^1(1) & \xi^3(1) & \dots & \xi^{K_1}(1) \\ \xi^1(2) & \xi^3(2) & \dots & \xi^{K_1}(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi^1(N_2) & \xi^3(N_2) & \dots & \xi^{K_1}(N_2) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Примем следующее соглашение. Пусть имеем матрицы S и M размера $m \times n$. Тогда полагаем

$$S = |M| \Rightarrow s_{ij} = |m_{ij}| \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad \forall j = \overline{1, n},$$

$$S \leq |M| \Rightarrow s_{ij} \leq |m_{ij}| \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad \forall j = \overline{1, n},$$

где $|M|$ — матрица абсолютных значений. Тогда с учетом (2) можем записать

$$|\Xi| \leq E, \quad (30)$$

где E — матрица, в которой элементы $\xi^i(k)$ матрицы (29) заменены на ε_i из (2).

С учетом (22) и (30) запишем неравенство

$$|Y_e| = |Q_e \Sigma_e V_e^T| \leq E. \quad (31)$$

Для выбранного начального значения размерности модели проверяем выполнимость неравенства (31). Если для этой размерности оно выполняется, то уменьшаем ее на единицу, в противном случае увеличиваем на единицу. После этого вновь проверяем выполнимость (31). Если, начиная с некоторой размерности n , неравенство (31) выполняется, а для $n-1$ — не выполняется, то именно n следует выбрать в качестве искомой. Возможна ситуация, при которой (31) невыполнимо ни для какой размерности. Тогда следует применить подход, аналогичный описанному ранее, т.е. в качестве показателей выбрать процент координат матрицы Y_e , на которых нарушается неравенство (31), и максимальное значение элементов матрицы $|Y_e|$, рассматривая его как норму. Тогда в качестве искомого следует выбирать граничное значение n , разделяющее области спада и насыщения. После выбора размерности можно идентифицировать параметры системы описываемым выше методом, т.е. на основе (23)–(25).

Квазиоптимальное решение на длительном интервале. Определим квазиоптимальное значение размерности модели, соответствующее предельной размерности, после которой задачу идентификации трактуем как некорректно поставленную. Для ее нахождения имеющиеся данные разбиваем на два приблизительно равных интервала. На одном из них задаем размерность n_0 искомой модели и 4SID-методом находим только матрицу A для некоторой реализации. Вычисляем ее собственные значения. Затем смещаем первый интервал на q шагов вправо и для новых данных вычисляем матрицу A и ее собственные значения тем же способом. После этого вновь смещаем интервал на q шагов вправо и находим для него собственные значения. Продолжаем эту процедуру до того момента, пока смещаемый интервал практически не совпадает со вторым интервалом данных исходного разбиения. Для полученного таким образом множества собственных значений проводим оценку их разброса. Если он оказался небольшим, то увеличиваем на единицу n_0 и выполняем те же действия, что и при определении разброса собственных значений. Если для начальной размерности разброс оказался большим, то уменьшаем размерность моде-

ли. Процесс установления порядка приближенной модели заканчивается после нахождения границы устойчивости. Размерность, предельно допустимая при условии устойчивости, является квазиоптимальной. Для нее одним из 4SID-методов вычисляются все параметры приближенной модели.

Данный подход имеет два недостатка. Во-первых, он требует длительного интервала наблюдения. Во-вторых, в его основе лежит плохо формализуемое понятие разброса собственных значений. Считается разброс большим, когда изменяется структура собственных значений, например когда пара действительных значений преобразуется в комплексную пару или изменяется знак собственного значения, либо когда два очень близких собственных числа начинают быстро расходиться. Когда этого не происходит, можно рекомендовать следующую процедуру определения разброса собственных чисел: вычислить модули собственных значений и отсортировать их по убыванию, сформировать из них в устойчивой области кластеры близких значений, а затем по мере увеличения размерности отслеживать их поведение до появления признаков неустойчивости, т.е. существенного увеличения размеров одного из кластеров.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР НАХОЖДЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ КОГНИТИВНОЙ КАРТЫ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОЦЕССЕ

В качестве примера дискретной многомерной многосвязной системы рассмотрим когнитивные карты (КК) [13]. Они представляют собой взвешенные ориентированные графы, вершины которых отражают координаты сложных систем, а ребра с весовыми коэффициентами описывают влияние одной вершины на другую. КК широко применяются для анализа сложных систем различной природы, в том числе социальных, политических, экономических, экологических, финансовых и т.д. В процессе функционирования сложной системы под влиянием различных возмущений координаты вершин КК изменяются во времени. Процесс распространения возмущений по вершинам КК трактуется как импульсный процесс, для которого сформулировано правило изменения значений координат вершин КК в виде разностного уравнения первого порядка в приращениях переменных [14]:

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k), \quad (32)$$

где A — транспонированная весовая матрица смежности КК, состоящая из весовых коэффициентов ребер ориентированного графа; $\Delta x(k)$ — вектор приращений координат вершин КК в момент времени $t = kT_0$, координаты которого равны $\Delta x_i(k) = x_i(k) - x_i(k-1)$, $i = 1, \dots, n$, n — количество вершин (размерность) КК.

Предположим, что на часть измеряемых вершин КК можно непосредственно воздействовать, подавая на них внешние импульсы (тестовые сигналы). Пусть таких воздействий будет r , т.е. вектор u имеет размерность r . Тогда уравнение вынужденного движения в импульсном процессе КК записывается как

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + Bu(k), \quad (33)$$

где матрица B размера $n \times r$ составлена из нулей и единиц, так что при соответствующей нумерации она может быть представлена в виде $B = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$, I — единичная квадратная матрица размера r .

Предположим также, что m координат x_i измеряются. Тогда уравнение измерения примет вид

$$\Delta y(k) = C\Delta x(k) + \xi(k), \quad (34)$$

где матрица C имеет вид $(I \ 0)$ (I — также единичная матрица) при соответствующей нумерации вершин КК, вектор $\xi(k)$ — шум измерений.

Если принять приращения координат вершин КК в качестве переменных состояния, а их измеряемую часть — в качестве выходных переменных, то уравнения (33), (34) сводятся к (1) с учетом шума. Идентификации подлежат матрица A и ее размерность n (матрицы B и C известны, а $D = 0$).

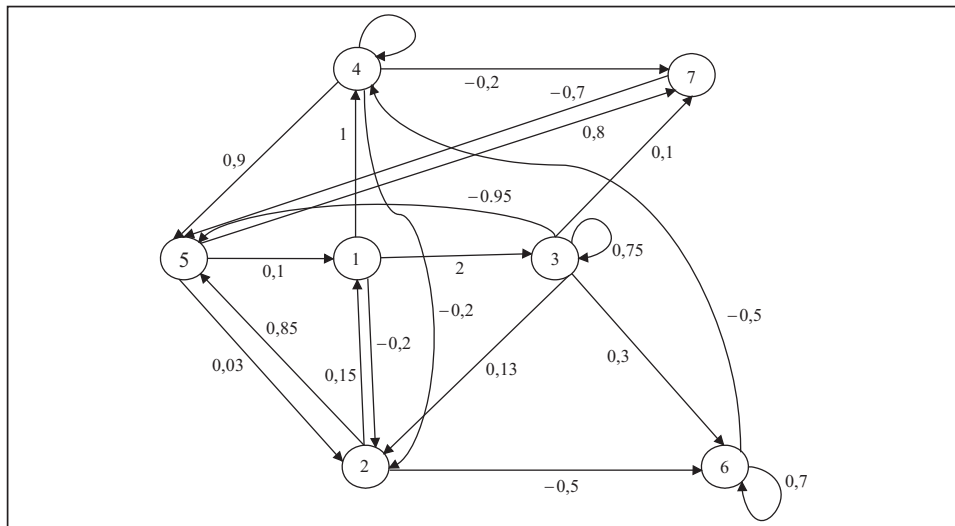


Рис. 1. Когнитивная карта

Задача идентификации исследовалась на примере КК, описывающей некоторые аспекты деятельности коммерческого банка. На рис. 1 показана когнитивная карта, вершины которой представляют: 1 — региональную сеть, 2 — капитал, 3 — кредиты, 4 — депозиты, 5 — ликвидные активы, 6 — меру риска стабильности, 7 — меру риска ликвидности.

Матрица смежности КК имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,13 & -0,2 & 0,03 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,85 & -0,95 & 0,9 & 0 & 0 & -0,7 \\ 0 & -0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,2 & 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы A соответствуют цифровым значениям на рис. 1.

В [15] при решении задачи идентификации предполагалось, что размерность n известна для такой КК и $m = r = n$. Эти условия не всегда выполняются. Поэтому предположим, что вершины 6 и 7 неизмеряемы и истинная размерность $n = 7$ априори неизвестна. Тогда для импульсного процесса, протекающего в КК и описываемого уравнениями (33), (34), можно применить рассмотренные выше методы идентификации, а именно определить размерности модели и элементы соответствующих матриц.

Найдем сначала регуляризованное решение задачи идентификации по данным на коротком интервале при тестовом воздействии в виде белого шума. При этом шум измерений принадлежит интервалу $[-0,01; 0,01]$, а число измерений равно 300. Размерность варьировалась, начиная с $n = 5$. Вычислительные эксперименты показали, что в данном случае не существует размерности, при которой неравенство (28) выполнялось бы для всех координат во всех точках. Поэтому оценка размерности проводилась по двум описанным выше показателям.

Из графиков на рис. 2, 3 видно, что размерность модели $n = 7$ определяется однозначно и она совпадает с размерностью генерирующей системы. При повышении уровня шума до интервала $[-0,5; 0,5]$ искомая размерность модели составляет $n = 6$.

Затем было найдено регуляризованное решение задачи идентификации по данным отклика на специальный входной сигнал с чередованием интервалов воз-

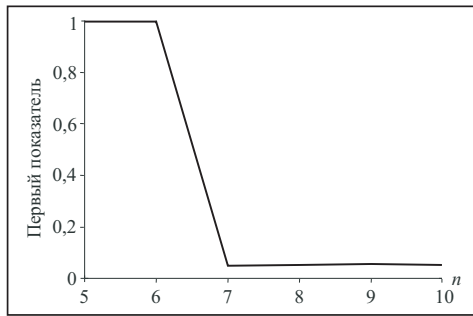


Рис. 2. Зависимость первого показателя от размерности на коротком интервале

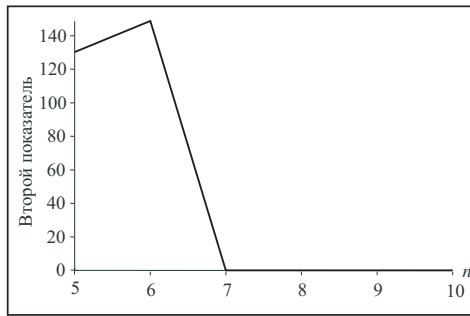


Рис. 3. Зависимость второго показателя от размерности на коротком интервале

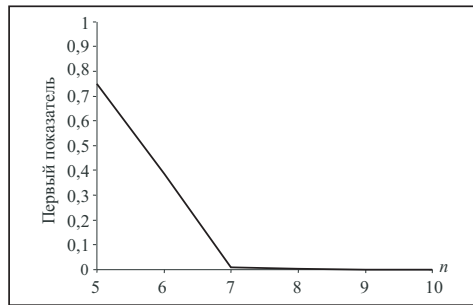


Рис. 4. Зависимость первого показателя от размерности при специальном сигнале

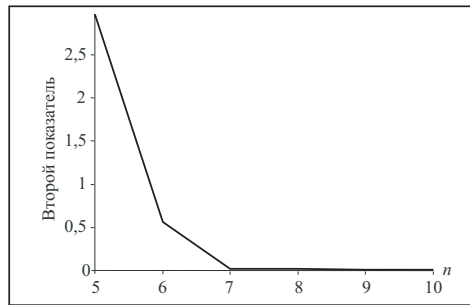


Рис. 5. Зависимость второго показателя от размерности при специальном сигнале

Таблица 1

Размерность, n	Собственные числа модели				
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
7	$0,8377 + 0,2661 i$	$0,8376 + 0,2660 i$	$0,8376 + 0,2661 i$	$0,8376 + 0,2661 i$	$0,8376 + 0,2661 i$
	$0,8377 - 0,2661 i$	$0,8376 - 0,2660 i$	$0,8376 - 0,2661 i$	$0,8376 - 0,2661 i$	$0,8376 - 0,2661 i$
	$0,0933 + 0,7130 i$	$0,0932 + 0,7129 i$	$0,0932 + 0,7131 i$	$0,0933 + 0,7131 i$	$0,0933 + 0,7133 i$
	$0,0933 - 0,7130 i$	$0,0932 - 0,7129 i$	$0,0932 - 0,7131 i$	$0,0933 - 0,7131 i$	$0,0933 - 0,7133 i$
	$0,6162 + 0,0000 i$	$0,6159 + 0,0000 i$	$0,6162 + 0,0000 i$	$0,6163 + 0,0000 i$	$0,6163 + 0,0000 i$
	$-0,1136 + 0,2285 i$	$-0,1133 + 0,2285 i$	$-0,1140 + 0,2283 i$	$-0,1139 + 0,2283 i$	$-0,1142 + 0,2278 i$
	$-0,1136 - 0,2285 i$	$-0,1133 - 0,2285 i$	$-0,1140 - 0,2283 i$	$-0,1139 - 0,2283 i$	$-0,1142 - 0,2278 i$
8	$0,8377 + 0,2660 i$	$0,8377 + 0,2660 i$	$0,8376 + 0,2661 i$	$0,8376 + 0,2661 i$	$0,8376 + 0,2661 i$
	$0,8377 - 0,2660 i$	$0,8377 - 0,2660 i$	$0,8376 - 0,2661 i$	$0,8376 - 0,2661 i$	$0,8376 - 0,2661 i$
	$0,0934 + 0,7130 i$	$0,0932 + 0,7129 i$	$0,0932 + 0,7131 i$	$0,0932 + 0,7132 i$	$0,0934 + 0,7133 i$
	$0,0934 - 0,7130 i$	$0,0932 - 0,7129 i$	$0,0932 - 0,7131 i$	$0,0932 - 0,7132 i$	$0,0934 - 0,7133 i$
	$0,6162 + 0,0000 i$	$0,6159 + 0,0000 i$	$0,6162 + 0,0000 i$	$0,6163 + 0,0000 i$	$0,6163 + 0,0000 i$
	$-0,1136 + 0,2284 i$	$-0,1132 + 0,2285 i$	$-0,1140 + 0,2283 i$	$-0,1139 + 0,2282 i$	$-0,1141 + 0,2277 i$
	$-0,1136 - 0,2284 i$	$-0,1132 - 0,2285 i$	$-0,1140 - 0,2283 i$	$-0,1139 - 0,2282 i$	$-0,1141 - 0,2277 i$
	$-0,6844 + 0,0000 i$	$-0,4930 + 0,0000 i$	$-0,5196 + 0,0000 i$	$-0,7922 + 0,0000 i$	$-0,7931 + 0,0000 i$

буждения и релаксации. Каждый интервал релаксации содержал 10 точек, а на интервале возбуждения их число варьировалось от 5 до 15. Входной последовательностью был случайный бинарный сигнал $(-5, 5)$. Такое возбуждение позволило получить достаточно разнообразные начальные условия для интервалов релаксации. Как и в предыдущем случае, строгого выполнения неравенства (31) достичь не удалось. Поэтому оценка размерности проводилась по двум описанным показателям. Их значения при шуме в интервале $[-0,01; 0,01]$ показаны на рис. 4, 5. При этом размерность определялась точно.

Были проведены также вычислительные эксперименты по определению размерности модели, соответствующей регуляризованному решению, на длительном интервале, содержащем 600 точек. Выбрано 295 точек, которые скользили по этому интервалу. Решения находили для пяти вариантов задачи идентификации, т.е. имели пять наборов собственных чисел для каждой выбранной размерности. Из табл. 1 видно, что для размерности $n = 7$ собственные числа этих пяти моделей отличаются несущественно. В то же время при размерности $n = 8$ появляется одно собственное число (в последней строке таблицы), которое принимает существенно различные значения, т.е. регуляризованное решение соответствует модели при $n = 7$.

Исследовалась зависимость размерности искомой модели от n при фиксированных m либо разности $n - m$. В обоих случаях с увеличением размерности системы увеличивался разрыв между размерностью n и размерностью модели, соответствующей регуляризованному решению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены методы идентификации многомерной дискретной системы в классе моделей, описывающих систему в пространстве состояний, в которых искомая размерность вектора состояния рассматривалась как регуляризирующий параметр. В зависимости от характера и числа данных предложено три способа определения размерности приближенной модели, т.е. структурной идентификации в заданном классе моделей. После установления размерности модели проводится параметрическая идентификация одним из имеющихся или модифицированных 4SID-методов, описанных в настоящей статье или, например, в [16]. Моделирование трех подходов проводилось на примере когнитивной карты в импульсном процессе. Было показано, что предложенные методы позволяют корректно найти размерность и весовые коэффициенты когнитивной карты в случае, когда измеряются не все координаты и эти измерения неточны. Все описанные способы дают регуляризированные решения, поскольку при стремлении погрешности к нулю и увеличении объема данных они асимптотически приближаются к точному решению, что следует непосредственно из способов их нахождения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ninness B., Goodwin G.C. Estimation of model quality. *Automatica*. 1995. Vol. 31, N 12. P. 1771–1797.
2. Giarre L., Kacewicz B.Z., Milanese M. Model quality evaluation in set membership identification. *Automatica*. 1997. Vol. 33, N 6. P. 1133–1139.
3. Kailath T. Linear systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1980. 680 p.
4. Но В., Kalman R.E. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*. 1966. Vol. 14. P. 545–548.
5. Verhaegen M., Dewilde P. Subspace model identification. Part 1: The output-error state space model identification class of algorithms. *International Journal of Control*. 1992. Vol. 56, N 5. P. 1187–1210.
6. Van Overschee P., De Moor B. N4SID: Subspace algorithms for identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*. 1994. Vol. 30, N 1. P. 75–93.
7. Verhaegen M. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*. 1994. Vol. 30, N 1. P. 61–74.
8. Van Overschee P., De Moor B. Subspace identification for linear systems. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academic Publications, 1996. 254 p.
9. Губарев В.Ф. Рациональная аппроксимация систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 99–116.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1986. 286 с.
11. Viberg M. Subspace-based method for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*. 1996. Vol. 31, N 12. P. 1835–1851.
12. Ljung L. System identification Toolbox. User's guide. Natick, MA: Mathworks, 2014. 886 p.
13. Горелова Г.В., Захарова Е.Н., Радченко С.А. Исследование слабоструктурированных проблем социально-экономических систем. Когнитивный подход. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 2006. 332 с.

14. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. Пер. с англ. Москва: Наука, 1986. 496 с.
15. Губарев В.Ф., Романенко В.Д., Милиявский Ю.Л. Идентификация в когнитивных картах в режиме импульсных процессов при полной информации. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 4. С. 30–43.
16. Miliavskiy Yu.L. Identification in cognitive maps in impulse process mode with incomplete measurement of nodes coordinates. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2019. № 1 (195). С. 49–63.

Надійшла до редакції 01.04.2019

В.Ф. Губарев, В.Д. Романенко, Ю.Л. Милиявський
МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ РЕГУЛЯРИЗОВАНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ
ЛІНІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Анотація. Розглянуто задачу структурно-параметричної ідентифікації складної багатовимірної багатозв'язної дискретної системи в класі моделей у просторі станів за припущення, що відомі тільки вхідні і вихідні координати системи на деякому інтервалі часу та діапазон похибки вимірювань. За основу прийнято метод виділеного підпростору, який передбачає, що розмірність системи (вектора стану) відома. Проте це не завжди виконується на практиці. Крім того, залежно від рівня шуму буває неможливо коректно ідентифікувати систему великої розмірності. Тому запропоновано розглядати розмірність як параметр регуляризації. Розроблено три способи вибору наближеної розмірності моделі залежно від тривалості інтервалу спостережень та можливості реалізації активного експерименту. Запропоновані методи апробовано на прикладі задачі ідентифікації когнітивної карти комерційного банку в імпульсному процесі.

Ключові слова: структурно-параметрична ідентифікація, апроксимувальна модель, метод виділеного підпростору (4SID), регуляризація, багатозв'язна система, когнітивна карта, імпульсний процес.

V.F. Gubarev, V.D. Romanenko, Yu.L. Miliavskiy
METHODS OF FINDING REGULARIZED SOLUTION IN IDENTIFICATION OF LINEAR
MULTIVARIABLE MULTI-CONNECTED DISCRETE SYSTEMS

Abstract. The article deals with the problem of structural and parametric identification of a complex multivariable multi-input multi-output (MIMO) discrete system in state space model class. It is assumed that only the input and output coordinates of the system during certain time interval and range of measurement errors are known. The basis is the subspace (4SID) method, which, however, assumes that dimension of the system (state vector) is known, which is not always feasible in practice. Moreover, depending of the noise level, it is impossible to correctly identify a high-dimensional system. Therefore, it is proposed to use dimension as a regularizing parameter. Three methods for choosing of approximate model dimension are suggested depending on the length of the observation period and possibility of active experiment design. The proposed methods are verified on the example of identification problem of a commercial bank's cognitive map in impulse process.

Keywords: structural and parametric identification, approximate model, subspace method (4SID), regularization, MIMO system, cognitive map, impulse process.

Губарев Вячеслав Федорович,
 чл.-кор. НАН України, доктор техн. наук, заведуючий відделом Інститута космічних досліджень НАН України і ГКА України, Київ, e-mail: v.f.gubarev@gmail.com.

Романенко Виктор Демидович,
 доктор техн. наук, професор, заступник директора Інститута прикладного системного аналізу НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сикорського», e-mail: ipsa@kpi.ua.

Милиявский Юрий Леонидович,
 кандидат техн. наук, старший преподаватель Інститута прикладного системного аналізу НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сикорського», e-mail: yuriy.milyavsky@gmail.com.