УДК 519.6

В.А. СТОЯН

К ПОСТРОЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВУХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ. I. СЛУЧАЙ ДИСКРЕТНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Аннотация. Решены задачи псевдообращения нелинейных дифференциальных моделей пространственно распределенных динамических систем. Рассматриваются системы, нелинейность которых образована произведением линейных дифференциальных преобразований функции состояния системы или путем замены этими преобразованиями коэффициентов линейного приближения модели. Строятся аналитические зависимости функции состояния системы от дискретно опреденных значений внешнединамических возмущающих факторов.

Ключевые слова: псевдообращение, нелинейные динамические системы, системы с распределенными параметрами, распределенные пространственно-временные системы.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье исследованы динамические пространственно распределенные системы (процессы), логика функционирования которых описана дифференциальным уравнением, а исследование их состояния в заданной пространственно-временной области выполняется в условиях неполноты начально-краевой информации о них. В силу этого постановки соответствующих начально-краевых задач будут некорректными и методами классической и вычислительной математики неразрешимы. Предложенный в [1] и развитый в работах [2, 3] подход к решению названных задач позволяет построить функцию состояния системы [4], которая, точно удовлетворяя дифференциальному уравнению математической модели функционирования системы, с начально-краевыми наблюдениями за ней согласуется по среднеквадратичным критериям независимо от количества и качества (дискретные, непрерывные) последних. Упомянутая методика решения названных задач является универсальной и основана на математическом моделировании (по среднеквадратичному критерию) имеющихся начально-краевых наблюдений системой дискретно и непрерывно определенных моделирующих функций. Это позволило построить и исследовать на точность и однозначность математические решения таких задач для произвольных линейных динамических систем, для которых имеется интегральный эквивалент их дифференциальной модели. Предложенный в [5] и развитый в [3] алгоритм построения ядер названных интегральных моделей позволяет построить эти модели для любой пространственно распределенной системы, динамика которой описана линейным дифференциальным уравнением. Наличие такого класса интегральных математических моделей для нелинейных динамических систем позволило бы методику, изложенную [2, 3], распространить на решение начально-краевых задач и для этих систем.

Восполнению пробелов в методике [3, 5] построения интегральных эквивалентов дифференциальных математических моделей динамики пространственно распределенных систем и распространению этой методики на нелинейные динамические системы посвящена настоящая статья.

В работе рассмотрены вопросы построения ядер интегральных математических моделей динамики систем, в которых нелинейности в дифференциальной модели определяются произведением двух и более линейных дифференциальных преобразований функции состояния системы или получены в результате замены такими преобразованиями коэффициентов линейных приближений модели системы. Как и в [5], будут построены аналитические представления ядер интегральных математических моделей таких систем так, чтобы последние по среднеквадратичным критериям согласовались с их дифференциальным эквивалентом и по этому же критерию позволяли методику из [2, 3] математического моделирования решений начально-краевых задач динамики пространственно распределенных систем распространить и на данный класс нелинейных динамических систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим вопросы исследования моделей некоторых нелинейных пространственно распределенных динамических процессов. Типаж таких нелинейностей достаточно широк. Здесь акцентируется внимание на двух классах нелинейных динамических моделей, которые есть логическим расширением рассматриваемых в работах [2–4] моделей линейных пространственно распределенных динамических процессов и представляют достаточно широкий спектр нелинейных динамических моделей.

Как и при рассмотрении нелинейных алгебраических систем [6,7], базовой для изучения нелинейных пространственно распределенных динамических систем считаем математическую модель вида

$$L(\partial_s)\, y(s) = u(s)\,, \tag{1}$$

где $s \in S = \{s = (x, t)\colon\ x \in S_0 \subset R^{\nu},\ t \in [0, T]\}$ — пространственно-временная переменная, $L(\partial_s) = a_0 \partial_s^n + a_1 \partial_s^{n-1} + \ldots + a_n$ — линейный дифференциальный оператор, в котором

$$a_{n-k} \partial_s^k = \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_\nu = k} \alpha_{k_0 k_1 \ldots k_\nu} \frac{\partial^k}{\partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_\nu}^{k_\nu} \partial_t^{k_0}}$$

при заданных $\alpha_{k_0 k_1 \ldots k_\nu}$ и $k \in \{\overline{0, \nu}\}$.

Будем исходить из того, что уточнение линейного приближения (1) дифференцильной модели исследуемого процесса выполняется путем перемножения линейных дифференциальных преобразований функции состояния $y(s)$, что приводит к математическим моделям вида

$$L_1(\partial_s)\, y(s) L_2(\partial_s)\, y(s) \ldots\ L_N(\partial_s)\, y(s) = u(s)\ \ (i = \overline{1, N})\,, \tag{2}$$

в которых $L_i(\partial_s)$ $(i = \overline{1, N})$ — линейные дифференциальные операторы, или заменой коэффициентов $\alpha_{k_0 k_1 \ldots k_\nu}$ оператора $L(\partial_s)$ на линейные дифференциальные преобразования функции состояни $y(s)$, что приводит к нелинейным дифференциальным моделям вида

$$L(y(s), \partial_s)\, y(s) = u(s)\,, \tag{3}$$

в которых (при одноразовой замене)

$$L(y(s), \partial_s) = (L_0(\partial_s)\, y(s))\, \partial_s^n + (L_1(\partial_s)\, y(s)) \partial_s^{n-1} + \ldots + L_n(\partial_s)\, y(s)\,.$$

Нелинейные дифференциальные модели (2), (3), будучи обобщением своего линейного приближения (1), описывают динамику пространственно распределенной системы в неограниченной пространственно-временной области.

При исследовании рассматриваемых систем в ограниченных пространственно-временных областях (особенно при неполноте начально-краевой информации о состоянии системы) можно воспользоваться методикой исследования неполно наблюдаемых динамических систем для линейного случая, развитой в [2–4] и апробированной в [8]. Последнее возможно, если от дифференциальных математических моделей (2), (3) перейти к принятым в [2–4] интегральным математическим моделям или моделям, близким к ним. Для этого с учетом изложенных в [3, 9] методик псевдообращения линейных интегральных и функциональных преобразований и математических результатов из работ [6, 7] по псевдообращению нелинейных алгебраических систем нелинейные дифференциальные модели (2), (3) исследуем для случаев, когда функция $y(s)$ (определенная непрерывно или дискретно) строится при дискретно наблюдаемом внешнединамическом возмущении $u(s)$.

ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим систему, функция $y(s)$ состояния которой в неограниченной пространственно-временной области

$$S = \{s = (x, t) \colon \; x \in R^{\nu}, \; -\infty < t < \infty\}$$

определяется уравнением (2).

Рассмотрим задачу построения функции $y(s)$ такой, чтобы при заданной дискретными значениями $u(s'_1), u(s'_2), \ldots, u(s'_M)$ функции внешнединамических возмущений $u(s)$ минимизировалось значение

$$\Phi = \sum_{j=1}^{M} [[L_1(\partial_s) y(s)]|_{s=s'_j} \, [L_2(\partial_s) y(s)]|_{s=s'_j} - u(s'_j)]^2 . \tag{4}$$

При этом рассмотрим случаи, когда искомая согласно (4) функция $y(s)$ определяется аналитически или набором значений $y(s_l) = y_l \;\; (l = \overline{1, L})$. В обоих случаях будем исходить из полученных в [6,7] научных результатов по исследованию нелинейных дискретно-непрерывных систем. Для этого систему (2) (при $N = 2$) запишем в виде

$$u_1(s) u_2(s) = u(s) , \tag{5}$$

где

$$u_k(s) = L_k(\partial_s) y(s) \;\; (k = \overline{1, 2}) \tag{6}$$

или (что эквивалентно)

$$y(s) = \int_S G_k(s - s') u_k(s') ds', \tag{7}$$

а при $\bar{\lambda} = (\lambda, \mu) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \mu)$ имеем [5]

$$G_k(s - s') = \frac{1}{(2\pi)^{\nu+1}} \int_S \frac{1}{L_k(i\bar{\lambda})} \prod_{j=1}^{\nu} e^{i\lambda_j (x_j - x'_j)} e^{i\mu(t - t')} d\lambda_j d\mu$$

— функцию Грина уравнения (6) в неограниченной пространственно-временной области S (здесь i — мнимая единица).

Случай дискретно определенной функции состояния. Рассмотрим вариант построения вектора

$$\vec{y} = (y(s_l), \, l = \overline{1, L})^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

такого, чтобы

$$\Phi \to \min_{\vec{y}} . \tag{9}$$

Дискретизируя точками $s_l \;\; (l = \overline{1, L})$, $s'_m \;\; (l = \overline{1, M})$ функции $G_k(s - s') \;\; (k = \overline{1, 2})$ по нештрихованным и штрихованным координатам, соотношения (7) запишем в виде

$$\vec{y} = A_1 \vec{u}_1 = A_2 \vec{u}_2 , \tag{10}$$

где $A_k = [G_k(s_l - s'_m) \sqrt{\Delta s'_M}\,]_{l, m=1}^{l=L, m=M}$ ($\Delta s'_M$ — шаг дискретизации области S точками s'_m),

$$\vec{u}_k = (u_k(s'_1), u_k(s'_2), \ldots, u_k(s'_M))^{\mathrm{T}} \;\; (k = \overline{1, 2}) .$$

Отсюда при

$$\Omega_k = \{\vec{u}: \| A_k \vec{u} - \vec{y} \|^2 \to \min_{\vec{u}}\} \ \ (k = \overline{1, 2})$$

определим

$$\vec{u}_1 = \arg \min_{\vec{u} \in \Omega_1} \| \vec{u} \|^2, \ \ \vec{u}_2 = \arg \min_{\vec{u} \in \Omega_2} \| \vec{u} \|^2$$

соотношениями [3]

$$\vec{u}_1 = A_1^+ \vec{y} = A_1^+ A_2 \vec{u}_2, \ \ \vec{u}_2 = A_2^+ \vec{y} = A_2^+ A_1 \vec{u}_1$$

(здесь и далее знак + обозначает операцию псевдообращения матрицы).

Обозначим символом $\otimes$ операцию декартового произведения двух векторов и уравнение (5), в котором фигурируют не определенные пока векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, представим в виде

$$\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 = \vec{u}$$

или (что эквивалентно) в виде

$$\vec{u}_1 \otimes A_2^+ A_1 \vec{u}_1 = \vec{u}, \ \ \vec{u}_2 \otimes A_1^+ A_2 \vec{u}_2 = \vec{u}, \tag{11}$$

где

$$\vec{u} = (u(s_1'), u(s_2'), \ldots, u(s_M'))^{\mathrm{T}} \Delta s_M'. \tag{12}$$

Последнее означает, что определенный согласно (8), (9) вектор $\vec{y}$ будет найден из соотношения (10), в котором

$$\vec{u}_1 = \arg \min_{\vec{v}_1 \in R^M} \| \vec{v}_1 \otimes A_2^+ A_1 \vec{v}_1 - \vec{u} \|^2, \tag{13}$$

$$\vec{u}_2 = \arg \min_{\vec{v}_2 \in R^M} \| \vec{v}_2 \otimes A_1^+ A_2 \vec{v}_2 - \vec{u} \|^2. \tag{14}$$

Для решения задач (13), (14) используем результаты, полученные в [6]. Если обозначить через $\overline{A}_{1i}$, $\overline{A}_{2i}$ матрицы

$$\overline{A}_1 = \mathrm{col}((\underbrace{0, \ldots, 0}_{M(i-1)}, \mathrm{str}([A_2^+ A_1]_{ij}, \ j = \overline{1, M}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{M^2 - iM}), i = \overline{1, M}), \tag{15}$$

$$\overline{A}_2 = \mathrm{col}((\underbrace{0, \ldots, 0}_{M(i-1)}, \mathrm{str}([A_1^+ A_2]_{ij}, \ j = \overline{1, M}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{M^2 - iM}), i = \overline{1, M}) \tag{16}$$

без $(M(i-1)+i)$-х столбцов, а через $\overline{a}_{1i}, \overline{a}_{2i}$ — эти столбцы матриц, то значения $u_1(s_i')$, $u_2(s_i')$ $(i = \overline{1, M})$ (см. (13) и (14)) будут удовлетворять соотношениям

$$u_k^2(s_i') = q_{ki}^{\mathrm{T}} \vec{u} + [v_k]_{(i-1)M+i} - q_{ki}^{\mathrm{T}} \overline{A}_k v_k \ \ (i = \overline{1, M}, \ k = \overline{1, 2}), \tag{17}$$

где q_{ki}^{T} — вектор-строка, которая удовлетворяет соотношению

$$(\overline{A}_{ki} \vdots \overline{a}_{ki})^+ = \begin{pmatrix} Q_{ki} \\ q_{ki}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

а $v_k \in R^{M^2}$ выбираются так, чтобы

$$[\vec{\alpha}_k]_{(i-1)M+j}^2 = [\vec{\alpha}_k]_{(i-1)M+i} [\vec{\alpha}_k]_{(j-1)M+j} \ \ (k = \overline{1, 2}), \tag{18}$$

где $j = \overline{i, M}$, $i = \overline{1, M}$.

Точность, с которой найденные выше векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ значений функций $u_1(s)$ и $u_2(s)$ удовлетворяют уравнениям (11), определяется величинами

$$\varepsilon_k^2 = \min_{\vec{u}_k} \| A_k \vec{u}_k - \vec{y} \|^2 = \vec{y}^{\mathrm{T}} \vec{y} - \vec{y}^{\mathrm{T}} A_k A_k^+ \vec{y},$$

$$\delta_1^2 = \min_{\vec{u}_1} \| \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 - \vec{u} \|^2 = \min_{\vec{u}_1} \| \vec{u}_1 \otimes A_2^+ A_1 \vec{u}_1 - \vec{u} \|^2 = \tag{19}$$
$$= \min_{\alpha_1} \| \overline{A}_1 \alpha_1 - \vec{u} \|^2 = \vec{u}^{\,\mathrm{T}} \vec{u} - \vec{u}^{\,\mathrm{T}} \overline{A}_1 \overline{A}_1^+ \vec{u},$$
$$\delta_2^2 = \min_{\vec{u}_2} \| \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 - \vec{u} \|^2 = \min_{\vec{u}_2} \| \vec{u}_2 \otimes A_1^+ A_2 \vec{u}_2 - \vec{u} \|^2 =$$
$$= \min_{\alpha_2} \| \overline{A}_2 \alpha_2 - \vec{u} \|^2 = \vec{u}^{\,\mathrm{T}} \vec{u} - \vec{u}^{\,\mathrm{T}} \overline{A}_2 \overline{A}_2^+ \vec{u},$$

где $k = \overline{1, 2}$. При этом

$$\alpha_1 = \mathrm{col}((u_1(s'_i)\, u_1(s'_j)\,, \; j = \overline{1, M}), \; i = \overline{1, M}),$$
$$\alpha_2 = \mathrm{col}((u_2(s'_i)\, u_2(s'_j), \; j = \overline{1, M}), \; i = \overline{1, M}).$$

Поэтому решением рассматриваемой задачи есть вектор

$$\vec{y} = A_1 \vec{u}_1, \text{ если } \varepsilon_1^2 + \delta_1^2 < \varepsilon_2^2 + \delta_2^2$$

или

$$\vec{y} = A_2 \vec{u}_2, \text{ если } \varepsilon_2^2 + \delta_2^2 < \varepsilon_1^2 + \delta_1^2.$$

Заметим, что точность полученного таким образом решения задачи зависит от выбора точек s'_m $(m = \overline{1, M})$, которыми определяется точность замены интегральной формы (7) представления решения задачи ее дискретным аналогом (10).

Случай непрерывно определенной функции состояния. Рассмотрим задачу построения функции $y(s)$ такой, чтобы

$$\Phi \to \min_{y(s)}. \tag{20}$$

Как и при решении предыдущей задачи, исходим из уравнения (2), представленного в виде (5), (7). После дискретизации функции $u(s)$ уравнения (2) определенными выше точками s'_m $(m = \overline{1, M})$ для $k = \overline{1, 2}$ получаем

$$y(s) = \overline{G}_k(s) \vec{u}_k, \tag{21}$$

где $\vec{u}_k$ определен выше, а

$$\overline{G}_k(s) = \mathrm{str}(G_k(s - s'_m) \sqrt{\Delta s'_M}\;, \; m = \overline{1, M}).$$

Отсюда

$$\vec{u}_k = \arg \min_{\vec{u}'_k} \int_S (\overline{G}_k(s)\, \vec{u}'_k - y(s))^2\, ds = P_k^+ \vec{G}_{yk} + v_k - P_k^+ P_k v_k \tag{22}$$

при выбранных согласно (18) $v_k \in R^{M^2}$ и

$$\vec{G}_{yk} = \int_S \overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s)\, y(s) ds, \qquad P_k = \int_S \overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s) \overline{G}_k(s) ds.$$

При этом

$$\varepsilon_k^2 = \min_{u_k(s)} \int_S (\, y(s) - \sum_{m=1}^{M} G_k(s - s'_m)\, u_k(s'_m) \Delta s'_M\,)^2\, ds =$$
$$= \min_{\vec{u}_k} \int_S (\, y(s) - \overline{G}_k(s)\, \vec{u}_k\,)^2\, ds = \int_S y^2(s) ds - \vec{G}_{yk}^{\mathrm{T}} P_k^+ \vec{G}_{yk}. \tag{23}$$

Полагая $v_k = 0$ при

$$\lim_{N \to \infty} \det [\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s_l) \overline{G}_k(s_m)]_{l, m=1}^{l, m=N} > 0,$$

из (21), (22) находим

$$\vec{u}_1 = P_1^+ P_{12} \vec{u}_2 \ , \ \vec{u}_2 = P_2^+ P_{21} \vec{u}_1,$$

где $P_{ij} = \int\limits_S \overline{G}_i^{\mathrm{T}}(s) \overline{G}_j(s) ds.$ Это значит, что решение рассматриваемой задачи определятся соотношением (21), в котором

$$\vec{u}_1 \otimes P_2^+ P_{21} \vec{u}_1 = \vec{u}, \tag{24}$$

$$\vec{u}_2 \otimes P_1^+ P_{12} \vec{u}_2 = \vec{u}. \tag{25}$$

Среднеквадратично обращая (24), (25), заключаем, что значения $u_1(s_i')$, $u_2(s_i')$ $(i = \overline{1, M})$, которые имеют место в определении векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, получим из (17), если матрицы $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ в определениях (15), (16) представить в виде

$$\overline{A}_1 = \mathrm{col}((\underbrace{0, \ldots,}_{M(i-1)} 0, \mathrm{str}([P_2^+ P_{21}]_{ij}, \ j = \overline{1, M}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{M^2 - iM}), i = \overline{1, M}),$$

$$\overline{A}_2 = \mathrm{col}((\underbrace{0, \ldots,}_{M(i-1)} 0, \mathrm{str}([P_1^+ P_{12}]_{ij}, \ j = \overline{1, M}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{M^2 - iM}), i = \overline{1, M}).$$

Точность, с которой найденные таким образом векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ будут удовлетворять соотношениям (24), (25), по аналогии с (19) определятся величинами

$$\delta_k^2 = \min_{\vec{u}_k} \| \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 - \vec{u} \|^2 = \vec{u}^{\mathrm{T}} \vec{u} - \vec{u}^{\mathrm{T}} \overline{A}_k \overline{A}_k^+ \vec{u} \ \ (k = \overline{1, 2}).$$

Это значит, что индекс k в представлении (21) решения рассматриваемой задачи выбирается так, чтобы

$$k = \arg \min_{i = \overline{1, 2}} (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2).$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ФУНКЦИЙ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим обобщение методики решения задач (4), (9) и (4), (20) на случай, когда динамика исследуемой системы описывается уравнением (2). Для уравнения (2), как и выше, согласно (9) можно найти определенный соотношением (8) вектор $\vec{y}$ значений функции состояния $y(s)$. При этом исходим из того, что в этом случае

$$\Phi = \sum_{j=1}^{M} [[L_1(\partial_s) y(s)]|_{s=s_j'} \ldots [L_N(\partial_s) y(s)]|_{s=s_j'} - u(s_j')]^2. \tag{26}$$

Случай дискретно определенной функции состояния. Для решения задачи (26), (9) запишем уравнение (2) в виде

$$u_1(s) u_2(s) \ldots u_N(s) = u(s), \tag{27}$$

где

$$u_k(s) = L_k(\partial_s) y(s) \quad (k = \overline{1, N}),$$

или, что эквивалентно,

$$y(s) = \int\limits_S G_k(s - s') u_k(s') ds' \ \ (k = \overline{1, N}). \tag{28}$$

После дискретизации (27) и (28) определенными выше точками s_l $(l = \overline{1, L})$, s_m' $(m = \overline{1, M})$ получим

$$\vec{u}_1 \otimes \vec{u}_2 \otimes \ldots \otimes \vec{u}_N = \vec{u}, \tag{29}$$

$$\vec{y} = A_1\vec{u}_1 = A_2\vec{u}_2 = \ldots = A_N\vec{u}_N, \tag{30}$$

где $\vec{y}$ и $\vec{u}$ определены в (8), (12), а

$$\vec{u}_k = (u_k(s'_1), u_k(s'_2), \ldots, u_k(s'_M))^{\mathrm{T}} \sqrt[N]{\Delta s'_m} \quad (k = \overline{1, N}),$$

$$A_k = \left\| G_k(s_l - s'_m) \sqrt[N]{(\Delta s'_m)^{N-1}} \right\|_{l=\overline{1,L}}^{m=\overline{1,M}}.$$

Отсюда для $k \in 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\vec{u}_1 = A_1^+ A_k \vec{u}_k, \ldots, \vec{u}_{k-1} = A_{k-1}^+ A_k \vec{u}_k,$$

$$\vec{u}_{k+1} = A_{k+1}^+ A_k \vec{u}_k, \ldots, \vec{u}_n = A_n^+ A_k \vec{u}_k. \tag{31}$$

С учетом (31) перепишем соотношения (29) в виде

$$[A_1^+ A_k \vec{u}_k]_i \ldots [A_{k-1}^+ A_k \vec{u}_k]_i \, u_k(s'_i) \times$$
$$\times [A_{k+1}^+ A_k \vec{u}_k]_i \ldots [A_N^+ A_k \vec{u}_k]_i = u(s_i) \quad (i = \overline{1, M}). \tag{32}$$

Здесь $[\cdot]_i$ — i-й элемент $[\cdot]$, $(u_1, u_2, \ldots, u_M)^{\mathrm{T}} = \vec{u}$.

Решение (32) аналогично (17) запишем в виде

$$([u_k]_i)^N = q_{ki}^{\mathrm{T}} \vec{u} + [v_k]_{j^*} - q_{ki}^{\mathrm{T}} \bar{A}_k v_k \quad (k = \overline{1, N}),$$

где

$$(\bar{A}_{ki} | a_{ki})^+ = \begin{pmatrix} Q_{ki} \\ q_{ki}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\bar{A}_{ki}$ — матрица $\bar{A}_k$ без столбца с номером $j^* = ((i-1)(M^{N-1} + M^{N-2} + \ldots + 1) + 1)$, α_{ki} — этот столбец:

$$\bar{A}_k = \mathrm{col}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{M^{N-1}(i-1)}, A_i^{(k)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{M^N - iM^{N-1}}), \quad i = \overline{1, M}),$$

$$A_i^{(k)} = \mathrm{str}((\ldots(((\ldots([A_1^+ A_k]_{ij_1} [A_2^+ A_k]_{ij_2} \ldots [A_{k-1}^+ A_k]_{ij_{k-1}} [A_{k+1}^+ A_k]_{ij_{k+1}} \ldots$$
$$\ldots [A_N^+ A_k]_{ij_N}, j = \overline{1, M}), \ldots), j_{k+1} = \overline{1, M}), j_{k-1} = \overline{1, M}), \ldots), j_1 = \overline{1, M}),$$

а v_k — такие, что

$$[\vec{\alpha}_k]^N_{(i_1-1)M^{N-1} + \ldots + (i_{N-1}-1)M + i_N} = \prod_{l=1}^{N} [\vec{\alpha}_k]_{(i_l-1)M^{N-1} + \ldots + (i_l-1)M + i_l} \quad (k = \overline{1, N})$$

при $i_1 = \overline{1, M}, \ldots, i_N = \overline{1, M}$.

Анализируя

$$\varepsilon_k^2 = \min_{\vec{u}_k \in R^M} \| A_k \vec{u}_k - \vec{y} \|^2 = \vec{u}_k^{\mathrm{T}} \vec{u}_k - \vec{u}_k^{\mathrm{T}} A_k P_k^+ A_k^{\mathrm{T}} \vec{u}_k, \; P_k = A_k^{\mathrm{T}} A_k,$$

$$\delta_k^2 = \min_{\vec{u}_k} \| A_1^+ A_k \vec{u}_k \otimes \ldots \otimes A_{k-1}^+ A_k \vec{u}_k \otimes A_{k+1}^+ A_k \vec{u}_k \otimes \ldots$$
$$\ldots \otimes A_N^+ A_k \vec{u}_k - \vec{u} \|^2 = \vec{u}^{\mathrm{T}} \vec{u} - \vec{u}^{\mathrm{T}} \bar{A}_k \bar{P}_k^+ \bar{A}_k^{\mathrm{T}} \vec{u}, \quad \bar{P}_k = \bar{A}_k^{\mathrm{T}} \bar{A}_k \tag{33}$$

для $k = \overline{1, N}$, получаем индекс

$$k = \arg \min_{i \in \{1, 2, \ldots, N\}} (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2) \tag{34}$$

вектора $\vec{u}_k$, с помощью которого согласно (30) и будет найдено решение $\vec{y}$ задачи (26), (9).

Случай непрерывно определенной функции состояния. Для задачи (20), (26) решение получим, как и выше, при $k=\overline{1,N}$. Функция $y(s)$ состояния системы (2), найденная согласно (20), при этом определяется соотношением (21), в котором индексы k, ε_k^2 и δ_k^2 выбираются по формулам (34), (23) и (33) соответственно, $\vec{u}_k$, $\overline{G}_k(s)$, $\vec{G}_{yk}$, P_k, P_{ij} определены выше, а

$$A_i^{(k)}=\operatorname{col}(\underbrace{0,\ldots,0}_{M^{N-1}(i-1)},A_i^{(k)},\underbrace{0,\ldots,0}_{M^N-iM^{N-1}}),\quad i=\overline{1,M}),$$

$$A_i^{(k)}=\operatorname{str}((\ldots(((\ldots([P_1^+P_{1k}]_{ij_1}[P_2^+P_{2k}]_{ij_2}\ldots[P_{k-1}^+P_{k-1,k}]_{ij_{k-1}}[P_{k+1}^+P_{k+1,k}]_{ij_{k+1}}\ldots$$

$$\ldots[P_N^+P_{Nk}]_{ij_N},\, j_N=\overline{1,M}),\ldots),\, j_{k+1}=\overline{1,M}),\, j_{k-1}=\overline{1,M}),\ldots),\, j_1=\overline{1,M}).$$

ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим пространственно распределенную динамическую систему, функция $y(s)$ состояния которой описывается моделью (3).

Как и выше, рассмотрим случай, когда функция $u(s)$ распределенных внешнединамических возмущений, которые определяют состояние системы, задается вектором (12) ее значений. Построим функцию $y(s)$ такую, чтобы

$$\sum_{m=1}^{M}(L(y(s),\partial_s)y(s)|_{s=s'_m}-u_m)^2\to\min_{\vec{y}},\tag{35}$$

$$\sum_{m=1}^{M}(L(y(s),\partial_s)y(s)|_{s=s'_m}-u_m)^2\to\min_{y(s)},\tag{36}$$

где, как и выше,

$$\vec{y}=\operatorname{col}(y_l,\ l=\overline{1,L}),\ \ y_l=y(s_l),\ \ u_m=u(s'_m).$$

Случай дискретно определенной функции состояния. Для решения задачи (3), (35) запишем уравнение (3) соотношением

$$\sum_{k=0}^{n}a_{km}\,y_m^{(n-k)}=u_m\quad(m=\overline{1,M}),\tag{37}$$

в котором $y_m^{(n-k)}=\partial_s^{n-k}y(s)|_{s=s'_m}$, $a_{km}=a_k(s'_m)$ при $a_k(s)$ таком, что

$$L_k(\partial_s)y(s)=a_k(s)\ \ (s\in R^{\nu+1}).\tag{38}$$

Вектор

$$\vec{a}_k=\operatorname{col}(a_{km},\,m=\overline{1,M})\tag{39}$$

коэффициентов a_{km} $(m=\overline{1,M})$ уравнения (37) построим с учетом того, что решением (38) будет

$$y(s)=\int_{-\infty}^{\infty}G_k(s-s')a_k(s')ds'\ \ \forall k=\overline{0,n}.\tag{40}$$

При этом [9]

$$\vec{a}_k=\arg\min_{a_{km}(m=\overline{1,M})}\sum_{l=1}^{L}(y(s_l)-\sum_{m=1}^{M}G_k(s_l-s'_m)\,a_{km})^2\in\Omega_{ak},$$

где

$$\Omega_{ak}=\{a_k:a_k=\overline{G}_k^+\vec{y}+\vec{v}_k-\overline{G}_k^+\overline{G}_k\vec{v}_k\}\tag{41}$$

при произвольном $\vec{v}_k \in R^M$ ($\vec{v}_k \equiv 0$, если $\det(\overline{G}_k^{\mathrm{T}} \overline{G}_k) > 0$) и

$$\overline{G}_k = [G_k(s_l - s'_m)]_{l,m=1}^{l=L,m=M}, \tag{42}$$

$$\min_{\vec{a}_k \in \Omega_{ak}} \| \overline{G}_k \vec{a}_k - \vec{y} \|^2 = \vec{y}^{\mathrm{T}} \vec{y} - \vec{y}^{\mathrm{T}} \overline{G}_k \overline{G}_k^+ \vec{y} = \varepsilon_k^2 .$$

Ограничиваясь в (39), (40) значениями

$$\vec{a}_k = \arg \min_{a_k \in \Omega_{ak}} \| a_k \|^2 = \overline{G}_k^+ \vec{y}$$

и обозначая $A_{(m)}$ m-строку произвольной прямоугольной матрицы A, систему уравнений (37) запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n} (\overline{G}_k^+)_{(m)} \vec{y} y_m^{(n-k)} = u_m \quad (m = \overline{1, M})$$

или (что эквивалентно)

$$\overline{\overline{G}} \vec{\vec{y}} = \vec{u}. \tag{43}$$

В дополнение к определенному выше вектору $\vec{u} \in R^M$ имеем

$$\vec{\vec{y}} = \mathrm{col}\,((y_m^{(i)}, i = \overline{n, 0}), m = \overline{1, M}),$$

$$\overline{\overline{G}} = \begin{pmatrix} (\overline{G}_0^+)_{(1)} \vec{y} & \dots & (\overline{G}_n^+)_{(1)} \vec{y} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & (\overline{G}_0^+)_{(M)} \vec{y} & \dots & (\overline{G}_n^+)_{(M)} \vec{y} \end{pmatrix}.$$

При $s_l = s'_m$ ($l = \overline{1, L}$, $m = \overline{1, M}$, $L = M$) уравнение (43) вырождается в систему линейных алгебраических уравнений $\widetilde{G} \widetilde{y} = \vec{u}$ относительно вектора

$$\vec{\widetilde{y}} = \mathrm{col}\,(((y_l y_m^{(i)}, l = \overline{1, M}), i = \overline{n, 0}), m = \overline{1, M}). \tag{44}$$

С помощью матрицы

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} (\overline{G}_0^+)_{(1)} & \dots & (\overline{G}_n^+)_{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\overline{G}_0^+)_{(2)} & (\overline{G}_n^+)_{(2)} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & (\overline{G}_0^+)_{(M)} & (\overline{G}_n^+)_{(M)} \end{pmatrix}$$

с использованием соотношения

$$\vec{\widetilde{y}} = \widetilde{G}^{\mathrm{T}} (\widetilde{G} \widetilde{G}^{\mathrm{T}})^+ \vec{u} \tag{45}$$

находим согласно (44) вектор $\vec{\widetilde{y}} = \arg \min\limits_{\widetilde{y} \in \Omega_y} \| \widetilde{y} \|^2$, где

$$\Omega_y = \{\widetilde{y} \in R^{M^2} : \| \widetilde{G} \widetilde{y} - \vec{u} \|^2 \to \min_{\widetilde{y}}\}.$$

Из (45) с учетом определения (44) вектора $\vec{\widetilde{y}}$ находим компоненты y_l ($l = \overline{1, M}$) вектора $\vec{y}$, при этом

$$y_l = \sqrt{\widetilde{G}_{(k)}^{\mathrm{T}} (\widetilde{G} \widetilde{G}^{\mathrm{T}})^+ \vec{u}} \quad (l = \overline{1, M}),$$

где $k = M(n+1)(l-1) + Mn + l$, а $\widetilde{G}_{(k)}^{\mathrm{T}}$ — k-я строка матрицы $\widetilde{G}^{\mathrm{T}}$.

После несложных математических преобразований элементы y_l $(l=\overline{1, M})$ вектора $\vec{y}$, который решает задачу (3), (35), определим соотношением

$$y_l = \sqrt{(\overline{G}_n^+)_{ll}[\sum_{j=1}^{n}(\overline{G}_j^+)_{(l)}(\overline{G}_j^+)_{(l)}^{\mathrm{T}}]^{-1}u_l} \quad (l=\overline{1, M}),$$

где $(\cdot)_l$ и $(\cdot)_{ll}$ — l-строка и (ll)-элемент соответствующей матрицы. А это значит, что интегральный эквивалент дифференциальной модели системы (6), построенный согласно (35), имеет вид

$$\vec{y} \otimes \vec{y} = G\vec{u},$$

где

$$G = \operatorname{diag}[(\overline{G}_n^+)_{mm}\sum_{j=1}^{n}(\overline{G}_j^+)_{(m)}(\overline{G}_j^+)_{(m)}^{\mathrm{T}},\ m=\overline{1, M}]$$

при определенных согласно (42) матрицах $\overline{G}_j$ $(j=\overline{1, n})$.

Точность, с которой решена расматриваемая задача, определяется погрешностями ε_k^2 $(k=\overline{0, n})$, с которыми обращены дискретизованные согласно (39) интегральные соотношения (40). Погрешность

$$\varepsilon^2 = \min_{\vec{y}} \sum_{m=1}^{M}(L(y(s), \partial_s)y(s)|_{s=s'_m} - u_m)^2,$$

с которой находится искомый согласно (35) вектор $\vec{y}$, определяется величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{\vec{y}} \|\widetilde{G}\,\vec{\widetilde{y}} - \vec{u}\|^2 = \vec{u}^{\mathrm{T}}\vec{u} - \vec{u}^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\widetilde{P}^+\vec{u},$$

а эта величина равна нулю, поскольку матрица $\widetilde{P} = \widetilde{G}\widetilde{G}^{\mathrm{T}}$ является диагональной матрицей, а $\widetilde{P}\widetilde{P}^+ = 1$.

Случай непрерывно определенной функции состояния. Рассмотрим решение задачи (3), (36). Как и выше, будем исходить из системы (37), в которой компоненты a_{km} $(k=\overline{0, n})$ $(m=\overline{1, M})$ векторов $\vec{a}_k$, определим из дискретизованного по штрихованным координатам уравнения (40).

Обозначив

$$\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s) = \operatorname{str}(G_k(s-s'_m),\ m=\overline{1, M}),$$

это уравнение запишем в виде $\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s)\vec{a}_k = y(s)$. Отсюда находим

$$\Omega_{ak} = \left\{ \vec{a}_k \in R^M : \vec{a}_k = \arg\min_{a_k} \int_{-\infty}^{+\infty}(\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s)a_k - y(s))^2 ds = \right.$$
$$\left. = P_k^+ G_y + \upsilon_k - P_k^+ P_k \upsilon_k \quad \forall \upsilon_k \in R^M \right\} \tag{46}$$

при

$$P_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s)\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s)ds, \quad G_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s)y(s)ds.$$

Ограничиваясь в (46) значениями

$$\hat{\vec{a}} = \arg\min_{\vec{a}_k \in \Omega_{ak}} \|\vec{a}_k\|^2,$$

систему (37) приведем к виду

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} P_{k(m)}^{+}\overline{G}_k(s)\,y(s)ds\right)y_m^{(n-k)}=u_m \quad (m=\overline{1,\, M})$$

или (что эквивалентно)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}_k(s)\widetilde{y}(s)ds=\vec{u}\,, \tag{47}$$

где

$$\widetilde{y}(s)=\mathrm{col}((y(s)y_m^{(i)},\, i=\overline{n,0}),\, m=\overline{1,\, M})\,,$$

$$\widetilde{G}(s)=\begin{pmatrix} P_{0(1)}^{+}\overline{G}_0(s) & \dots & P_{n(1)}^{+}\overline{G}_n(s) & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & P_{0(M)}^{+}\overline{G}_0(s) & \dots & P_{n(M)}^{+}\overline{G}_n(s)\end{pmatrix}.$$

Отсюда минимальную по норме вектор-функцию $\widetilde{y}(s)$ такую, чтобы

$$\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}(s)\widetilde{y}(s)ds-\vec{u}\right\|^2\to\min_{\widetilde{y}(s)}\,,$$

запишем в виде

$$\widetilde{y}(s)=\widetilde{G}^{\mathrm{T}}(s)\widetilde{P}^{+}\vec{u}, \tag{48}$$

где

$$\widetilde{P}=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}(s)\widetilde{G}^{\mathrm{T}}(s)ds.$$

Учитывая, что согласно (48)

$$\begin{pmatrix} y_m^{(n)}\\ \dots\\ y_m\end{pmatrix}y(s)=\begin{pmatrix} P_{0(m)}^{+}\overline{G}_0(s)\\ \dots\\ P_{n(m)}^{+}\overline{G}_n(s)\end{pmatrix}\widetilde{P}_{(m)}^{+}\vec{u} \quad (m=\overline{1,\, M}),$$

находим значение

$$y_m^{(i)}=\sqrt{P_{n-i(m)}^{+}\partial_s^i\overline{G}_{n-i}(s)|_{s=s'_m}\,\widetilde{P}_{(m)}^{+}\vec{u}}\,,$$

а следовательно, и вектор

$$U=\mathrm{col}((y_m^{(i)},\, i=\overline{n,0}),\, m=\overline{1,\, M})\,,$$

которым оценивается влияние сосредоточенных в точках s'_m внешнединамических возмущений $u(s'_m)$ $(m=\overline{1,\, M})$ на состояние $y(s)$ исследуемой системы. С учетом этого соотношение (48) подадим в виде

$$Uy(s)=\widetilde{G}^{\mathrm{T}}(s)\widetilde{P}^{+}\vec{u}, \tag{49}$$

откуда

$$y(s)=(U^{\mathrm{T}}U)^{-1}U^{\mathrm{T}}\widetilde{G}^{\mathrm{T}}(s)\widetilde{P}^{+}\vec{u}\,,$$

что и заканчивает решение задачи, определенной соотношениями (3), (36).

С учетом структуры компонент вектора U и матричной функции $\widetilde{G}(s)$ преобразуем и упростим найденную таким образом функцию $y(s)$. Исходя из того, что

$$U^{\mathrm{T}}U=\sum_{i=0}^{n}\sum_{m=1}^{M}(P_{n-i(m)}^{+}\partial_s^i\overline{G}_{n-i}(s)\Big|_{s=s'_m})(\widetilde{P}_{(m)}^{+}\vec{u})\,,$$

$$U^{\mathrm{T}} \widetilde{G}^{\mathrm{T}}(s) = str\left(\left(\sum_{i=0}^{n} P_{i(m)}^{+} \overline{G}_i(s) \sqrt{\widetilde{P}_{n-i(m)}^{+} \partial_s^i \overline{G}_{n-i}(s)\Big|_{s=s'_m}}\right) \sqrt{\widetilde{P}_{(m)}^{+} \vec{u}}, \quad m = \overline{1, M}\right),$$

имеем

$$y(s) = \frac{\sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=0}^{n} P_{i(m)}^{+} \overline{G}_i(s) \sqrt{\widetilde{P}_{n-i(m)}^{+} \partial_s^i \overline{G}_{n-i}(s)\Big|_{s=s'_m}}\right) (\widetilde{P}_{(m)}^{+} \vec{u})^{3/2}}{\sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=0}^{n} (\widetilde{P}_{n-i(m)}^{+} \partial_s^i \overline{G}_{n-i}(s))\Big|_{s=s'_m}\right) (\widetilde{P}_{(m)}^{+} \vec{u})}. \qquad (50)$$

Точность найденного согласно (50) решения задачи определяется величинами

$$\varepsilon_u^2 = \vec{u}^{\mathrm{T}} \vec{u} - \vec{u}^{\mathrm{T}} \widetilde{P} \widetilde{P}^{+} \vec{u}, \qquad \varepsilon_y^2 = \vec{u}^{\mathrm{T}} \widetilde{P}^{+} P_U \widetilde{P}^{+} \vec{u}$$

обращения уравнений (47), (49), где

$$P_U = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}(s) (I - UU^{+}) \widetilde{G}^{\mathrm{T}}(s) ds.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена сложная задача построения решений двух классов нелинейных дифференциальных уравнений, которыми описывается распределенный в заданной пространственной области динамический процесс. Уравнения рассматриваются с дискретно определенной правой частью. Предполагается, что дифференциальный оператор уравнения строится путем перемножения линейных дифференциальных преобразований искомой функции или является суммой таких преобразований, умноженных на производные этой функции. Основой для исследования названных уравнений послужили научные результаты автора по среднеквадратичному псевдообращению линейных и нелинейных алгебраических, интегральных и функциональных уравнений одной переменной. Выполненное в работе псевдообращение (по среднеквадратичному критерию) рассматриваемых уравнений позволило найти аналитические выражения (где это возможно) искомой функции или вектора ее значений в заданных точках. Построены и исследованы на точность и однозначность множества возможных решений.

Полученные выражения для псевдорешений рассматриваемых в работе двух классов нелинейных дифференциальных уравнений определяют передаточную функцию от внешнединамических возмущений к функции состояния или матрицу ее значений. Как и в линейном случае, они могут быть использованы для математического моделирования решений начально-краевых задач динамики пространственно распределенных процессов и систем, логика функционирования которых описывается одним из рассматриваемых в работе уравнений и изучается в условиях неполноты данных о начально-краевом состоянии системы (процесса). Решение более сложных задач динамики рассматриваемых сиситем без представленных в настоящей статье псевдообращений нам видится невозможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян В.А. Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики. *Проблемы управления и информатики.* 1998. № 1. С. 79–86.

2. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ: Наук. думка, 2002. 361 с.

3. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.

4. Стоян В.А. О некоторых результатах математического моделирования динамики не полностью наблюдаемых пространственно распределенных систем. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. № 5. С. 79–94.
5. Стоян В.А., Двірничук В.Б. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей. *Доповіді НАН України.* 2012. № 9. С. 36–43.
6. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. I. мультипликативно нелинейные системы. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. Т. 55, № 1. С. 127–134.
7. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. II. Системы с адитивно выделенной нелинейностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 2. С. 102–107.
8. Стоян В.А., Двирничук К.В., Ершов А.Е., Емцов А.С. О системе компьютерно-аналитического моделирования динамики пространственно распределенных систем. *Компьютерная математика.* 2012. № 2. С. 34–44.
9. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 3. С. 90–104.

Надійшла до редакції 12.10.2018

В.А. Стоян

ДО ПОБУДОВИ ІНТЕГРАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДВОХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ. I. ВИПАДОК ДИСКРЕТНО ВИЗНАЧЕНИХ ЗОВНІШНЬОДИНАМІЧНИХ ЗБУРЕНЬ

Анотація. Розв’язано задачі псевдообернення нелінійних диференціальних моделей просторово розподілених динамічних систем. Розглянуто системи, нелінійність яких утворено добутком лінійних диференціальних перетворень функції стану системи або шляхом заміни цими перетвореннями коефіцієнтів лінійного наближення моделі. Будуються аналітичні залежності функції стану системи від дискретно визначених значень зовнішньодинамічних збурювальних факторів.

Ключові слова: псевдообернення, нелінійні динамічні системи, системи з розподіленими параметрами, розподілені просторово-часові системи.

V.A. Stoyan

ON CONSTRUCTION OF INTEGRAL MATHEMATICAL MODELS OF TWO CLASSES OF NONLINEAR SPATIALLY DISTRIBUTED SYSTEMS. I. THE CASE OF DISCRETELY DEFINED OUTWARD-DYNAMICAL PERTURBATIONS

Abstract. Problems of pseudoinversion of nonlinear differential models of spatially distributed dynamical system are solved. Systems whose nonlinearity is formed by the product of linear differential transformations of system functional state or by replacing the coefficients of linear approximation by these transformations are considered. Analytic dependencies of system functional state on discretely defined values of outward-dynamical factors are constructed.

Keywords: pseudoinversion, nonlinear dynamical systems, spatially distributed dynamical systems.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.