СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

Е.Ф. ГАЛБА, Н.А. ВАРЕНЮК

УДК 512.61 : 519.61

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ СО СМЕШАННЫМИ ВЕСАМИ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Аннотация. Получены и исследованы разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами (одна весовая матрица положительно-определенная, а другая — невырожденная знаконеопределенная) в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней. Получены многочленные предельные представления этих матриц. Построены регуляризованные итерационные методы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами.

Ключевые слова: взвешенные псевдообратные матрицы со смешанными весами, матричные степенные ряды и произведения, предельные представления взвешенных псевдообратных матриц, регуляризованные итерационные методы.

ВВЕДЕНИЕ

Впервые определение взвешенной псевдообратной матрицы с положительно-определенными весами дано в работе [1]. В [2] введено понятие косой псевдообратной матрицы. В [3] показано, что множество взвешенных псевдообратных матриц, определенных в [1], совпадает с множеством косых псевдообратных матриц, определенных в [2]. В работе [4] дано определение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами, а также найдены необходимые и достаточные условия существования рассмотренного варианта псевдообратных матриц с вырожденными весами. В работах [5–7] исследованы другие варианты псевдообратных матриц с вырожденными весами. Определены необходимые и достаточные условия существования рассмотренных псевдообратных матриц с вырожденными весами. Найдены взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами и установлена их связь со взвешенными псевдообратными матрицами. В работе [8] введено понятие *ML*-взвешенной псевдообратной матрицы. В [9] дано определение взвешенных псевдообратных матриц с невырожденными индефинитными весами, а также указаны достаточные условия существования этих матриц. Работа [10] посвящена исследованию взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными весами. Дано представление взвешенных псевдообратных матриц с индефинитными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, получены разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения, а также предельные представления этих матриц. В работе [11] получено представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза.

В настоящей статье на основе представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц, леммы о диагонализации симметризуемых положительно-определенными симметризаторами матриц с помощью взвешенного ортогонального преобразования, неравенств для матричных норм обосновано разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а вторая — невырожденная знаконеопределенная. Предложенные разложения могут служить альтернативой соответствующим разложениям, полученным в работе [10]. На основе разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения получены многочленные предельные представления этих матриц и построены регуляризованные итерационные процессы для их вычисления.

1. ВЗВЕШЕННЫЕ ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ СО ЗНАКОНЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ И СМЕШАННЫМИ ВЕСАМИ

Обозначим $\mathbb{R}^n$ n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел, где векторы — суть матрицы размера $n \times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная, положительно-полуопределенная или знаконеопределенная матрица. В $\mathbb{R}^n$ введем скалярное произведение по формуле $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^{\mathrm{T}} v$; E — единичная матрица. Если метрическая матрица H положительно-определенная или положительно-полуопределенная, то обычным образом можно нормировать пространство $\mathbb{R}^n$, положив $\| u \|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В первом случае функция $\| u \|_H$ будет определять норму, а во втором — полунорму.

Отметим, что исследованию n-мерных векторных пространств со знаконеопределенной метрикой (со знаконеопределенным скалярным произведением) уделено значительно меньше внимания, чем с положительно-определенной и неотрицательной метрикой. Исследования этих пространств можно найти в работе [12], монографиях [13–16].

Определим взвешенную норму прямоугольной матрицы с симметричными невырожденными весовыми матрицами. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $V = V^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невырожденные матрицы. Для множества матриц A в [10] норма введена соотношением

$$\| A \|_{HV} = \sup_{x \neq 0} \frac{\| AVx \|_{H^2}}{\| x \|_{E_n}} = \sup_{x \neq 0} \frac{\| HAVx \|_{E_m}}{\| x \|_{E_n}} = \sup_{x \neq 0} \frac{(VA^{\mathrm{T}} H^2 AVx, x)_{E_m}^{1/2}}{\| x \|_{E_n}}, \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность.

В [10] показано, что функция (1) является аддитивной (обобщенной) матричной нормой, которая определяется формулой

$$\| A \|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^{\mathrm{T}} H^2 AV)]^{1/2}, \qquad (2)$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [10] получены следующие соотношения для матричных норм.

Лемма 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ — симметричные невырожденные матрицы. Тогда справедливы соотношения

$$\| AB \|_{HV} \leq \| A \|_{HM} \| B \|_{M^{-1}V}, \quad \| AB \|_{HV} \leq \| A \|_{HM^{-1}} \| B \|_{MV}. \qquad (3)$$

Определение 1. Вещественную матрицу U назовем симметризуемой слева или справа, если существует такая симметричная невырожденная матрица H, что выполняются соответственно равенства $HU = U^{\mathrm{T}} H$, $UH = HU^{\mathrm{T}}$.

Определение 2. Квадратную вещественную матрицу Q будем называть H-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом H), если выполняется условие $Q^{\mathrm{T}} HQ = E$, где H — симметричная положительно-определенная матрица.

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов, в основном, выступают симметричные положительно-определенные матрицы, а в работах [15, 17, 18] изучались H-самосопряженные матрицы, где H предполагается симметричной невырожденной знаконеопределенной матрицей.

При исследовании разложений взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами (одна весовая матрица положительно-определенная, а другая — невырожденная знаконеопределенная) в матричные степенные ряды и произведения будет использоваться утверждение следующей леммы [10].

Лемма 2. Симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором H матрица U может быть приведена к диагональной форме с помощью H-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существует такая H-взвешенная ортогональная матрица Q, что

$$Q^{\mathrm{T}} HUQ = \Lambda , \tag{4}$$

и матрица U представима в виде

$$U = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} H, \tag{5}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, λ_i — собственные значения матрицы U, а столбцы матрицы Q образуют полную систему собственных векторов матрицы U.

Рассмотрим систему матричных уравненений

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (BAX)^{\mathrm{T}} = BAX,\ (CXA)^{\mathrm{T}} = CXA \tag{6}$$

при двух условиях относительно весовых матриц B и C, когда:

1) матрица C — положительно-определенная, а B — невырожденная знаконеопределенная при выполнении условия

$$rk(A^{\mathrm{T}} BA) = rk(A). \tag{7}$$

2) матрица B — положительно-определенная, а C — невырожденная знаконеопределенная при выполнении условия

$$rk(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}) = rk(A). \tag{8}$$

Ниже рассмотрим два варианта взвешенных псевдообратных матриц, определяемых условиями (6), (7) и (6), (8).

В [10] показано, что система матричных уравнений (6), когда обе весовые матрицы B и C невырожденные знаконеопределенные, при выполнении условий (7) и (8) имеет единственное решение $X = A_{BC}^{+}$, причем

$$A_{BC}^{+} = C^{-1} SA^{\mathrm{T}} B, \tag{9}$$

где $S = f(A^{\mathrm{T}} BAC^{-1})$ — многочлен от матрицы $A^{\mathrm{T}} BAC^{-1}$ вида

$$S = -\alpha_k^{-1} [(A^{\mathrm{T}} BAC^{-1})^{k-1} + \alpha_1 (A^{\mathrm{T}} BAC^{-1})^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} E],$$

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = \det[\lambda E - A^{\mathrm{T}} BAC^{-1}],$$

α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена, E — единичная матрица, α_p, $p = 1, \dots, n,$ — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)$.

Отметим, что задачи (6), (7) и (6), (8) являются частными случаями задачи (6), (7), (8). Поэтому для этих задач справедлива формула (9).

В [10] также установлена справедливость равенств

$$SA^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}},\ SA^{\mathrm{T}}BAC^{-1}=A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}S,\ C^{-1}S=(C^{-1}S)^{\mathrm{T}}. \qquad (10)$$

В работе [10] показано, что матрица A_{BC}^{+} также представима в виде

$$A_{BC}^{+}=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2, \qquad (11)$$

и установлены равенства

$$A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}S_2^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}},\ S_2AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B=AC^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2,\ S_2^{\mathrm{T}}B=(S_2^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}}, \qquad (12)$$

где $S_2=-\alpha_k^{-1}[(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{k-1}+\alpha_1(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{k-2}+\dots+\alpha_{k-1}E]$, α_p, $p=1,\dots,n$, — коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)=\det[\lambda E-AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B]$, а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого многочлена.

При разложении взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные произведения будем использовать следующие утверждения, которые легко установить методом математической индукции.

Лемма 3. Для любой матрицы $W\in\mathbb{R}^{n\times m}$, любой невырожденной матрицы $(E+\alpha P)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа $0<\alpha<\infty$ имеет место тождество

$$\alpha\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha P)^{-(2^k)}\}(E+\alpha P)^{-1}W=\alpha\sum_{k=1}^{2^n}(E+\alpha P)^{-k}W,\ n=1,2,\dots \qquad (13)$$

Лемма 4. Для любой матрицы $M\in\mathbb{R}^{n\times m}$, любой невырожденной матрицы $(E+\alpha L)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа $0<\alpha<\infty$ имеет место тождество

$$\alpha M(E+\alpha L)^{-1}\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha L)^{-(2^k)}\}=\alpha M\sum_{k=1}^{2^n}(E+\alpha L)^{-k},\ n=1,2,\dots \qquad (14)$$

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ В МАТРИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Вариант 1. На основе представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц (9), равенств (10) и утверждений лемм 1–4 обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения, когда обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а вторая — невырожденная знаконеопределенная. Рассмотрим случай, когда матрица C — положительно-определенная, а B — знаконеопределенная, т.е. обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (6) при выполнении условия (7).

Теорема 1. Для произвольной матрицы $A\neq 0\in\mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной положительно-определенной матрицы $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$\frac{2}{\mu(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)}<\alpha<\infty, \qquad (15)$$

имеют место соотношения

$$A_{BC}^{+}=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B, \qquad (16)$$

$$\|A_{BC}^{+}-A_{\alpha,p}^{+}\|_{C^{1/2}V}\le|1-\alpha\mu(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)|^{-p}\,\|A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}, \qquad (17)$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удолетворяющая условиям (6), (7),

$$A_{\alpha,p}^{+}=\alpha\sum_{k=1}^{p}\delta^{k-1}(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B, \quad p=1,2,\ldots;$$

$\mu(L)=\min\{|\lambda|:\lambda\neq 0\in\sigma(L)\}$, λ_i — собственные значения матрицы $C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$, $V=V^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ — любая невырожденная матрица.

Доказательство. Докажем равенство (16). Пусть $L=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA$. Матрица L в общем случае знаконеопределенная вырожденная, поскольку она представляет собой произведение симметричных положительно-определенной матрицы C^{-1} и знаконеопределенной матрицы $A^{\mathrm{T}}BA$ и согласно [19] такая матрица имеет такое же число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица $A^{\mathrm{T}}BA$. Матрица L симметризуемая слева положительно-определенным симмметризатором C, а справа — симметризатором C^{-1}. В силу условия (15) матрица $L+\delta E$ невырожденная симметризуемая слева симметризатором C, а справа — симметризатором C^{-1}. Тогда матрица $(L+\delta E)^{-1}$ существует, $(L+\delta E)C^{-1}$, $((L+\delta E)C^{-1})^{-1}$, $C(L+\delta E)^{-1}$ — симметричные матрицы и, следовательно, $(L+\delta E)^{-1}$— матрица, симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором C. Нетрудно убедиться, что $(L+\delta E)^{-k}$, $k=1,2,\ldots$, — симметризуемые слева симметризатором C матрицы. Поэтому для них имеют место утверждения леммы 2. Обозначим $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ собственные значения матрицы L. Пусть Q — C-взвешенная ортогональная матрица, которая приводит матрицы L, $(L+\delta E)^{-k}$ к диагональному виду. Рассмотрим одно из слагаемых ряда (16). В силу утверждения леммы 2 (формулы (4), (5)) с учетом формул (9), (10) получим

$$\alpha(E+\alpha L)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B=\alpha(E+\alpha L)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}SA^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\alpha(E+\alpha L)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}S^{2}A^{\mathrm{T}}B=\alpha(E+\alpha L)^{-k}L^{2}C^{-1}S^{2}A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\alpha Q(E+\alpha\Lambda)^{-k}Q^{\mathrm{T}}CQ\Lambda^{2}Q^{\mathrm{T}}CC^{-1}S^{2}A^{\mathrm{T}}B=\alpha Q(E+\alpha\Lambda)^{-k}\Lambda^{2}Q^{\mathrm{T}}S^{2}A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\alpha^{-1}Q(E+\alpha\Lambda)^{-k}(\alpha\Lambda)^{2}Q^{\mathrm{T}}S^{2}A^{\mathrm{T}}B\,,$$

т.е.

$$\alpha(E+\alpha L)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B=\alpha^{-1}Q(E+\alpha\Lambda)^{-k}(\alpha\Lambda)^{2}Q^{\mathrm{T}}S^{2}A^{\mathrm{T}}B\,. \tag{18}$$

Поскольку $(\alpha\Lambda)^{2}(E+\alpha\Lambda)^{-k}\Lambda^{2}=\operatorname{diag}\{(\alpha\lambda_i)^{2}(1+\alpha\lambda_i)^{-k}\}$ и при выполнении условия (15) число $|(1+\alpha\lambda_i)^{-1}|<1$ при $\lambda_i\neq 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\lambda_i)^{2}(1+\alpha\lambda_i)^{-k}=\alpha\lambda_i$ при $\lambda_i\neq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\lambda_i)^{2}(1+\alpha\lambda_i)^{-k}=0$ при $\lambda_i=0$. Ввиду этого матричный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha\Lambda)^{-k}(\alpha\Lambda)^{2}$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha\Lambda)^{-k}(\alpha\Lambda)^{2}=\alpha\Lambda\,. \tag{19}$$

В силу (18), (19), (9), (10) получаем

$$\alpha\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=\alpha^{-1}Q\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha\Lambda)^{-k}(\alpha\Lambda)^{2}Q^{\mathrm{T}}S^{2}A^{\mathrm{T}}B=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}S^{2}A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}CC^{-1}S^2A^{\mathrm{T}}B = LC^{-1}S^2A^{\mathrm{T}}B=$$

$$=C^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}S^2A^{\mathrm{T}}B = C^{-1}SA^{\mathrm{T}}BAC^{-1}SA^{\mathrm{T}}B = C^{-1}SA^{\mathrm{T}}B = A^{+}_{BC}.$$

Таким образом, имеем формулу (16), т.е. разложение взвешенной псевдообратной матрицы с весами, приведенными в теореме 1 в матричный степенной ряд с отрицательными показателями степеней. Для доказательства теоремы 1 осталось получить оценку (17), которая определяет погрешность приближения к взвешенной псевдообратной матрице в зависимости от параметра α.

Теперь покажем справедливость оценки (17). Аналогично равенству (18) получаем

$$\alpha(E+\alpha L)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B = \alpha Q(E+\alpha\Lambda)^{-k}\Lambda Q^{\mathrm{T}}SA^{\mathrm{T}}B. \qquad (20)$$

Из (19) следует равенство

$$\alpha\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha\Lambda)^{-k}\Lambda = \Theta, \qquad (21)$$

где Θ — диагональная матрица порядка матрицы Λ с элементами, равными единице при $\lambda_i \neq 0$ и равными нулю при $\lambda_i = 0$.

Чтобы убедиться в равенстве (21), умножим равенство (19) на невырожденную диагональную матрицу Λ_1, которая получена из Λ заменой ненулевых элементов обратными величинами, а нулевых элементов — единицами.

Нетрудно убедиться, что для частичной суммы членов ряда (21) получим

$$\alpha\sum_{k=1}^{p}(E+\alpha\Lambda)^{-k}\Lambda = \Theta-(E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta.$$

В силу этого равенства, а также равенств (16), (20), (21) имеем

$$A^{+}_{BC}-A^{+}_{\alpha,p} = \alpha Q\sum_{k=1}^{\infty}(E+\alpha\Lambda)^{-k}\Lambda Q^{\mathrm{T}}SA^{\mathrm{T}}B-\alpha Q\sum_{k=1}^{p}(E+\alpha\Lambda)^{-k}\Lambda Q^{\mathrm{T}}SA^{\mathrm{T}}B=$$

$$=Q\Theta Q^{\mathrm{T}}SA^{\mathrm{T}}B-Q\Theta Q^{\mathrm{T}}SA^{\mathrm{T}}B+$$

$$+\ Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta Q^{\mathrm{T}}SA^{\mathrm{T}}B = Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta Q^{\mathrm{T}}SA^{\mathrm{T}}B.$$

Учитывая (9) и C-взвешенную ортогональность матрицы Q, последнее равенство можно представить в виде

$$A^{+}_{BC}-A^{+}_{\alpha,p} = Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta Q^{\mathrm{T}}CC^{-1}SA^{\mathrm{T}}B = Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta Q^{-1}A^{+}_{BC}. \qquad (22)$$

Чтобы установить оценку (17), используем норму согласно формуле (1), а также равенство (2), соотношения (3), матрицы C и V, приведенные в формулировке теоремы 1, C-взвешенную ортогональность матрицы Q. Тогда из равенства (22) последовательно получим

$$\| A^{+}_{BC}-A^{+}_{\alpha,p}\|_{C^{1/2}V} \le \|Q\|_{C^{1/2}E_n}\,\|(E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta Q^{-1}A^{+}_{BC}\|_{E_nV} \le$$

$$\le \|(E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta\|_{E_nE_n}\,\|Q^{-1}A^{+}_{BC}\|_{E_nV} \le$$

$$\le \max_{\lambda_i\neq 0}(|1+\alpha\lambda_i|^{-p})\|Q^{-1}A^{+}_{BC}\|_{E_nV} =$$

$$=|1-\alpha\mu(L)|^{-p}\,\|Q^{-1}A^{+}_{BC}\|_{E_nV} \le |1-\alpha\mu(L)|^{-p}\,\|Q^{-1}\|_{E_nC^{-1/2}}\,\|A^{+}_{BC}\|_{C^{1/2}V} =$$

$$=|1-\alpha\mu(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)|^{-p}\,\|A^{+}_{BC}\|_{C^{1/2}V},$$

т.е. имеем оценку (17), что и завершает доказательство теоремы 1.

Следствие 1. Нетрудно убедиться, что из (16) вытекает следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды

$$A_{BC}^{+}=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}C^{-1}(E+\alpha A^{\mathrm{T}}BAC^{-1})^{-k}A^{\mathrm{T}}B\,.$$

При выполнении предположений теоремы 1 в силу (16) и (13) имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенной симметричной невырожденной весовой матрицей $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и положительно-определенной матрицей $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ в матричное степенное произведение с отрицательными показателями степеней

$$A_{BC}^{+}=\alpha\prod_{k=0}^{\infty}\{E+(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-(2^k)}\}(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-1}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\,. \tag{23}$$

Обозначим

$$A_{\alpha,n}^{+}=\alpha\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-(2^k)}\}(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-1}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B\,,\ n=1,2,\ldots$$

Тогда в силу тождества (13) и соотношения (17) получим

$$\|A_{BC}^{+}-A_{\alpha,n}^{+}\|_{C^{1/2}V}\le|1-\alpha\mu(C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)|^{-(2^n)}\|A_{BC}^{+}\|_{C^{1/2}V}\,. \tag{24}$$

Из оценки (17) следует, что для любого $p=1,2,\ldots$ имеем предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\sum_{k=1}^{p}(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-k}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B, \tag{25}$$

а из оценки (24) для любого $n=1,2,\ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+}=\lim_{\alpha\to\infty}\alpha\prod_{k=0}^{n-1}\{E+(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-(2^k)}\}(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-1}C^{-1}A^{\mathrm{T}}B. \tag{26}$$

Отметим, что на основе взвешенного сингулярного разложения матриц [20] с положительно-определенными весами в работе [21] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с положительно-определенными весами, а на основе взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами в работах [22, 23] получены разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения с вырожденными весами. Полученные в настоящей статье разложения взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения со смешанными весами можно использовать для вычисления приближений к взвешенным псевдообратным матрицам.

Действительно, из предельных представлений (25), (26) взвешенных псевдообратных матриц следует, что при достаточно большом параметре α матрица A_{BC}^{+} может как угодно мало отличаться от матриц $A_{\alpha,p}^{+}$, $A_{\alpha,n}^{+}$ и на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам с весами, определенными в теореме 1. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений даны формулами (17), (24).

Вариант 2. На основе представления взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц (11), равенств (12) и утверждений лемм 1–4 обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения, когда обе весовые матрицы симметричные, причем матрица C — знаконеопределенная, а B — положительно-определенная, т.е. обоснуем разложение взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (6) при выполнении условия (8).

Теорема 2. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричной положительно-определенной матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, симметричной знаконеопределенной невырожденной матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и действительного числа α, удовлетворяющего условию

$$\frac{2}{\mu(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)} < \alpha < \infty, \tag{27}$$

имеют место соотношения

$$A_{BC}^{+} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1}A^{\mathrm{T}}B(E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{-k}, \tag{28}$$

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\alpha,p}^{+} \|_{HB^{-1/2}} \leq (1-\alpha\mu(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B))^{-p} \| A_{BC}^{+} \|_{HB^{-1/2}}, \tag{29}$$

где A_{BC}^{+} — взвешенная псевдообратная матрица, удовлетворяющая условиям (6), (8); $A_{\alpha,p}^{+} = \alpha \sum_{k=1}^{p} C^{-1}A^{\mathrm{T}}B(E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{-k}$, $p=1,2,\ldots$; $\mu(L)$ определено в теореме 1; λ_i — собственные значения матрицы $AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B$; $H = H^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — любая невырожденная матрица.

Доказательство. Докажем равенство (28). Пусть $L = AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B$. Матрица L в общем случае знаконеопределенная вырожденная, поскольку она представляет произведение симметричных знаконеопределенной матрицы $AC^{-1}A^{\mathrm{T}}$ и положительно-определенной матрицы B и согласно [19] такая матрица имеет такое же число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица $AC^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Матрица L симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором B, а справа — симметризатором B^{-1}. В силу условия (27) матрица $L+\delta E$ невырожденная симметризуемая слева симммметризатором B, а справа — симметризатором B^{-1}. Тогда матрица $(L+\delta E)^{-1}$ существует, $(L+\delta E)B^{-1}$, $((L+\delta E)B^{-1})^{-1}$, $B(L+\delta E)^{-1}$ — симметричные матрицы и, следовательно, $(L+\delta E)^{-1}$ — матрица, симметризуемая слева положительно-определенным симметризатором B. Нетрудно убедиться, что $(L+\delta E)^{-k}$, $k=1,2,\ldots,$ — матрицы, симметризуемые слева симметризатором B. Поэтому для них имеют место утверждения леммы 2. Обозначим $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ собственные значения матрицы L. Пусть Q — B-взвешенная ортогональная матрица, которая приводит матрицы L и $(L+\delta E)^{-k}$ к диагональному виду. Рассмотрим одно из слагаемых ряда (28). В силу утверждения леммы 2 (формулы (4), (5)) с учетом формул (11), (12) получим

$$\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}B(E+\alpha L)^{-k} = \alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}S_2^{\mathrm{T}}B(E+\alpha L)^{-k} =$$

$$= \alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B(E+\alpha L)^{-k} =$$

$$= \alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2AC^{-1}A^{\mathrm{T}}BAC^{-1}A^{\mathrm{T}}B(E+\alpha L)^{-k} = \alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2L^2(E+\alpha L)^{-k} =$$

$$= \alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q\Lambda^2Q^{\mathrm{T}}BQ(E+\alpha\Lambda)^{-k}Q^{\mathrm{T}}B =$$

$$= \alpha^{-1}C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q(\alpha\Lambda)^2(E+\alpha\Lambda)^{-k}Q^{\mathrm{T}}B,$$

т.е.

$$\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}B(E+\alpha L)^{-k} = \alpha^{-1}C^{-1}A^{\mathrm{T}}BS_2^2Q(\alpha\Lambda)^2(E+\alpha\Lambda)^{-k}Q^{\mathrm{T}}B. \tag{30}$$

Поскольку $(\alpha\Lambda)^2 (E+\alpha\Lambda)^{-k} = \mathrm{diag}\,\{(\alpha\lambda_i)^2 (1+\alpha\lambda_i)^{-k}\}$ и при выполнении условия (27) имеем $|(1+\alpha\lambda_i)^{-1}|<1$ при $\lambda_i \neq 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\Lambda)^2 (E+\alpha\Lambda)^{-k}$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\Lambda)^2 (E+\alpha\Lambda)^{-k} = \alpha\Lambda\,. \tag{31}$$

В [10] показано, что $S_2^2 L = AA_{BC}^{+}$. Учитывая это равенство из [10], а также равенства (11), (12), (30), (31) и первое равенство в (6), получаем

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1} A^{\mathrm{T}} B (E+\alpha AC^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-k} = C^{-1} A^{\mathrm{T}} BS_2^2 Q \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\Lambda)^2 (E+\alpha\Lambda)^{-k} Q^{\mathrm{T}} B =$$

$$= C^{-1} A^{\mathrm{T}} BS_2^2 Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} B =$$

$$= C^{-1} A^{\mathrm{T}} BS_2^2 L = A_{BC}^{+} S_2 L = A_{BC}^{+} AA_{BC}^{+} = A_{BC}^{+},$$

т.е. имеем формулу (28) разложения взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (6), (8), в матричный степенной ряд с отрицательными показателями степеней.

Покажем справедливость оценки (29). Аналогично равенству (30) получаем

$$\alpha\, C^{-1} A^{\mathrm{T}} B\, (E+\alpha L)^{-k} = \alpha A_{BC}^{+} Q\Lambda (E+\alpha\Lambda)^{-k} Q^{-1}. \tag{32}$$

Из (31) следует равенство

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda (E+\alpha\Lambda)^{-k} = \Theta\,, \tag{33}$$

где Θ — диагональная матрица порядка матрицы Λ с элементами, равными единице при $\lambda_i \neq 0$ и равными нулю при $\lambda_i = 0$.

Для частичной суммы членов матричного ряда (33) нетрудно получить

$$\alpha \sum_{k=1}^{p} \Lambda (E+\alpha\Lambda)^{-k} = \Theta - (E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta\,. \tag{34}$$

В силу равенств (28), (32)–(34) имеем

$$A_{BC}^{+} - A_{\alpha,\,p}^{+} = \alpha A_{BC}^{+} Q\Lambda \sum_{k=1}^{\infty} (E+\alpha\Lambda)^{-k} Q^{-1} - \alpha A_{BC}^{+} Q\Lambda \sum_{k=1}^{p} (E+\alpha\Lambda)^{-k} Q^{-1} =$$

$$= A_{BC}^{+} Q\Theta Q^{-1} - A_{BC}^{+} Q\Theta Q^{-1} + A_{BC}^{+} Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta Q^{-1} = A_{BC}^{+} Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta Q^{-1},$$

т.е.

$$A_{BC}^{+} - A_{\alpha,\,p}^{+} = A_{BC}^{+} Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta Q^{-1}. \tag{35}$$

Чтобы установить оценку (29), используем норму согласно формуле (1), равенство (2), соотношения (3), а также будем учитывать определение матриц B и H, приведенные в формулировке теоремы 2, и B-взвешенную ортогональность матрицы Q. Тогда из равенства (35) последовательно получим

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\alpha,\,p}^{+} \|_{HB^{-1/2}} \leq \| A_{BC}^{+} Q\,(E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta \|_{HE_m}\, \| Q^{-1} \|_{E_m B^{-1/2}} =$$

$$= \| A_{BC}^{+} Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta \|_{HE_m} \leq \| A_{BC}^{+} \|_{HB^{-1/2}}\, \| Q(E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta \|_{B^{1/2} E_m} \leq$$

$$\leq \| A_{BC}^{+} \|_{HB^{-1/2}}\, \| Q \|_{B^{1/2} E_m}\, \| (E+\alpha\Lambda)^{-p}\, \Theta \|_{E_m E_m} =$$

$$=\| A_{BC}^{+} \|_{HB^{-1/2}} \, \| (E+\alpha\Lambda)^{-p}\Theta \|_{E_m E_m} \le \max_{\lambda_i \ne 0} (|1+\alpha\lambda_i|^{-p}) \| A_{BC}^{+} \|_{HB^{-1/2}} =$$

$$=|1-\alpha\mu(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)|^{-p} \, \| A_{BC}^{+} \|_{HB^{-1/2}},$$

т.е. получили оценку (29), что и завершает доказательство теоремы 2.

Следствие 2. Нетрудно убедиться, что из (28) вытекает следующее разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды:

$$A_{BC}^{+} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} C^{-1} A^{\mathrm{T}} (E+\alpha BAC^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-k} B.$$

В силу предположений теоремы 2, соотношения (28) и тождества (14) имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы со знаконеопределенной симметричной невырожденной весовой матрицей $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и симметричной положительно-определенной матрицей $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ в матричное степенное произведение с отрицательными показателями степеней

$$A_{BC}^{+} = \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B (E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \{E+(E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{-(2^k)}\}. \quad (36)$$

Обозначим

$$A_{\alpha,n}^{+} = \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B (E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E+(E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{-(2^k)}\}, \; n=1,2,\ldots$$

Тогда в силу тождества (14) и соотношения (29) получим

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\alpha,n}^{+} \|_{HB^{-1/2}} \le |1-\alpha\mu(AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)|^{-(2^n)} \, \| A_{BC}^{+} \|_{HB^{-1/2}}. \quad (37)$$

Из оценки (29) следует, что для любого $p=1,2,\ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B \sum_{k=1}^{p} (E+\alpha AC^{-1}A^{\mathrm{T}}B)^{-k}, \quad (38)$$

а из оценки (37) для любого $n=1,2,\ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B (E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} \{E+(E+\alpha C^{-1}A^{\mathrm{T}}BA)^{-(2^k)}\}. \quad (39)$$

Из предельных представлений (38), (39) взвешенных псевдообратных матриц следует, что при достаточно большом параметре α матрица A_{BC}^{+} может как угодно мало отличаться от матриц $A_{\alpha,p}^{+}$, $A_{\alpha,n}^{+}$ и на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам с весами, определенными в теореме 2. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений даны формулами (29), (37).

3. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим методику построения регуляризованных итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, основанную на разложениях взвешенных псевдообратных матриц в матричные степенные ряды и произведения, полученных в разд. 2.

Сначала построим итерационный процесс для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы со смешанными весами, когда матрица C — положительно-определенная, а B — симметричная знаконеопределенная, т.е. итерационный процесс для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (6) при выполнении условия (7).

Рассмотрим разложение (16) взвешенных псевдообратных матриц в матричный степенной ряд. Положим

$$X_k = \alpha \sum_{i=1}^{k} (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-i} C^{-1} A^{\mathrm{T}} B.$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим регуляризованный итерационный процесс

$$X_0 = 0,\ X_k = (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-1} X_{k-1} + \alpha (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-1} C^{-1} A^{\mathrm{T}} B =$$
$$= (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-1} (X_{k-1} + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B),\ k = 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (40) к A_{BC}^{+} определяется формулой (17), где следует положить $p = k$.

Используем разложение (23) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, на основе которого положим

$$X_k = \alpha \prod_{i=0}^{k-1} \{E + (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-(2^i)}\} (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-1} C^{-1} A^{\mathrm{T}} B.$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим регуляризованный итерационный процесс

$$X_0 = \alpha (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-1} C^{-1} A^{\mathrm{T}} B, \tag{41}$$
$$X_k = \{E + (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-(2^{k-1})}\} X_{k-1} =$$
$$= X_{k-1} + (E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} BA)^{-(2^{k-1})} X_{k-1},\ \ k = 1, 2, \ldots$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (41) к A_{BC}^{+} определяется формулой (24), где следует положить $n = k$.

Теперь построим итерационный процесс для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы со смешанными симметричными весами, когда матрица B — положительно-определенная, а C — знаконеопределенная, т.е. итерационный процесс для вычисления взвешенных псевдообратных матриц, удовлетворяющих системе матричных уравнений (6) при выполнении условия (8).

Рассмотрим разложение (28) взвешенных псевдообратных матриц в матричный степенной ряд. Положим

$$X_k = \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B \sum_{i=1}^{k} (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-i}.$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим регуляризованный итерационный процесс

$$X_0 = 0,\ X_k = X_{k-1} (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-1} + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-1} =$$
$$= (X_{k-1} + C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)(E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-1},\ \ k = 1, 2, \ldots \tag{42}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (42) к A_{BC}^{+} определяется формулой (29), где следует положить $p = k$.

Используем разложение (36) взвешенной псевдообратной матрицы в матричное степенное произведение, на основе которого положим

$$X_k = \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-1} \prod_{i=0}^{k-1} \{E + (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-(2^i)}\}.$$

Тогда для вычисления A_{BC}^{+} получим регуляризованный итерационный процесс

$$X_0 = \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-1}, \ X_k = X_{k-1} \{ E + (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-(2^{k-1})} \} =$$

$$= X_{k-1} + X_{k-1} (E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B)^{-(2^{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{43}$$

Оценка близости k-го приближения по формулам (43) к A_{BC}^{+} определяется формулой (37), где следует положить $n = k$.

Таким образом, получены регуляризованные итерационные процессы для вычисления взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весовыми матрицами. Из оценок (17), (29), а также (24), (37) следует, что погрешность приближения зависит от количества итераций и параметра α. Очевидно, что параметр α необходимо выбирать по возможности наибольшим. Но его величина ограничивается необходимой точностью вычисления обратных матриц к матрицам $E + \alpha C^{-1} A^{\mathrm{T}} B A$ и $E + \alpha A C^{-1} A^{\mathrm{T}} B$. Таким образом, остается открытым вопрос согласования параметра α с числом итераций относительно получения необходимой точности приближенного решения. При решении прикладных задач исходные данные, как правило, задаются с погрешностью. Кроме того, погрешность в решения вносят ошибки округления. Следовательно, стоит вопрос согласования параметра α, числа итераций, величины погрешности исходных данных и ошибок округления с точки зрения получения необходимой точности приближенного решения регуляризованными итерационными методами. Последнее обстоятельство особенно важно, поскольку вычисление псевдообратных матриц относится к классу некорректных задач (не имеется непрерывной зависимости решения задачи от изменения исходных данных).

Отметим, что взвешенное сингулярное разложение матриц с положительно-определенными весами, построенное в [24], использовалось для анализа влияния возмущений исходных данных на решения задач вычисления взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами (см., например, [25–29]).

Значительное количество публикаций (см. [30–32], а также ссылки к ним) посвящено построению и исследованию регуляризованных итерационных процессов для вычисления взвешенных псевдообратных матриц с положительно-определенными и положительно-полуопределенными весовыми матрицами, основанных на разложениях этих матриц в матричные степенные ряды и произведения. Отметим, что проблеме взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами, когда одна из весовых матриц знаконеопределенная, уделено меньше внимания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложено и обосновано разложение взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней. Предполагается, что обе весовые матрицы симметричные, причем одна из них положительно-определенная, а вторая — невырожденная знаконеопределенная. Рассмотрено два варианта взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами. Математическим аппаратом исследования служит представление взвешенной псевдообратной матрицы со смешанными весами в терминах коэффициентов характеристических многочленов симметризуемых матриц и взвешенное спектральное разложение симметризуемых матриц. На основе разложения взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения получены многочленные предельные представления этих матриц и построены регуляризованные итерационные процессы для их вычисления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chipman J.S. On least squares with insufficient observation. *J. Amer. Statist. Assoc.* 1964. Vol. 59, N 308, P. 1078–1111.
2. Milne R.D. An oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math.* 1968. Vol. 16, N 5, P. 931–944.
3. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. A note on the oblique matrix pseudoinverse. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. Vol. 20, N 2. P. 173–175.
4. Ward J.F., Boullion T.L., Lewis T.O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. Vol. 21, N 3. P. 480–482.
5. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 2009. Т. 49, № 8. С. 1347–1363.
6. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Существование и единственность взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63, № 1. С. 80–101.
7. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 1. С. 14–33.
8. Mitra S.K., Rao C.R. Projections under seminorms and generalized Moore–Penroze inverses. *Linear Algebra and Appl.* 1974. N 9. P. 155–167.
9. Rao C.R., Mitra S.K. Generalized inverse of matrices and its applikations. New York: Wiley, 1971. 240 p.
10. Варенюк Н.А., Галба Е.Ф., Сергиенко И.В., Химич А.Н. Взвешенная псевдоинверсия с индефинитными весами. *Укр. мат. журн.* 2018. Т. 70, № 6. С. 752–772.
11. Галба Е.Ф., Варенюк Н.А. Представление взвешенных псевдообратных матриц со смешанными весами через другие псевдообратные матрицы. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. Т. 54, № 2. С. 17–25.
12. Понтрягин Л.С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. *Изв. АН СССР. Сер. математика.* 1944. № 8. С. 243–280.
13. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Москва: Гостехиздат, 1948. 420 с.
14. Bognar J. Indefinite inner product spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1974. 235 p.
15. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrices and indefinite scalar products. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhauser, 1983. 374 p.
16. Azizov T.Ya., Iohvidov I.S. Linear operators in spaces with an indefinite metric. John Wiley and Sons, Ltd. Chichester, 1989. 304 p.
17. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices. *Z. Angew. Math. und Mech.* 1984. Vol. 64, N 9. S. 439–441.
18. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1992. Т. 32, № 8. С. 155–169.
19. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 656 с.
20. Галба Е.Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц. *Укр. мат. журн.* 1996. Т. 48, № 10. С. 1426–1430.
21. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Разложения и многочленные предельные представления взвешенных псевдообратных матриц. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 2007. Т. 47, № 5. С. 747–766.
22. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Необходимые и достаточные условия существования одного из вариантов взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. *Докл. РАН.* 2014. Т. 455, № 3. С. 261–264.
23. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Необходимые и достаточные условия существования взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. *Укр. мат. журн.* 2015. Т. 67, № 3. С. 406–426.
24. Van Loan C.F. Generalizing the singular value decomposition. *SIAM J. Numer. Anal.* 1976. Vol. 13, N 1. P. 76–83.
25. Wei Y., Wang D. Condition numbers and perturbation of the weighted Moore–Penrose inverse and weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput.* 2003. Vol. 145. P. 45–58.

26. Wei Y. A note on the sensitivity of the solution of the weighted linear least squares problem. *Appl. Math. Comput.* 2003. Vol. 145. P. 481–485.

27. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 6. С. 83–95.

28. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2009. Т. 49, № 3. С. 422–430.

29. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов. *Кибернетика и системный анализ.* 1996. № 3. С. 142–145.

30. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. 1. Положительно-определенные веса. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 1. С. 47–73.

31. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Представления и разложения взвешенных псевдообратных матриц, итерационные методы и регуляризация задач. 2. Вырожденные веса. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 3. С. 75–102.

32. Галба Е.Ф., Сергиенко И.В. Методы вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. Т. 54, № 3. С. 65–93.

Надійшла до редакції 27.12.2018

Є.Ф. Галба, Н.А. Варенюк

РОЗВИНЕННЯ ЗВАЖЕНИХ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ ІЗ ЗМІШАНИМИ ВАГАМИ В МАТРИЧНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ І ДОБУТКИ

Анотація. Отримано і досліджено розвинення зважених псевдообернених матриць із змішаними вагами (одна вагова матриця додатно-означена, а друга — невироджена знаконевизначена) в матричні степеневі ряди і добутки з від'ємними показниками степенів. Отримано многочленні граничні представлення цих матриць. Побудовано регуляризовані ітераційні методи для обчислення зважених псевдообернених матриць із змішаними вагами.

Ключові слова: зважені псевдообернені матриці із змішаними вагами, матричні степеневі ряди і добутки, граничні зображення зважених псевдообернених матриць, регуляризовані ітераційні методи.

E.F. Galba, N.A. Vareniuk

EXPANSIONS OF WEIGHTED PSEUDOINVERSE MATRICES WITH MIXED WEIGHTS IN MATRIX POWER SERIES AND POWER PRODUCTS

Abstract. Expansions of weighted pseudoinverse matrices with mixed weights into matrix power series or power products with negative exponents are defined and analyzed. One of these matrices is a positive definite matrix and another is nonsingular and indefinite. Limited polynomial representations of these matrices are obtained. Iterative methods for evaluating weighted pseudoinverse matrices with mixed weights are constructed.

Keywords: weighted pseudoinverse matrices with mixed weights, matrix power series and power products, limited polynomials representations of weighted pseudoinverse matrices, iterative methods.

Галба Евгений Федорович,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: e.f.galba@ukr.net.

Варенюк Наталия Анатольевна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Інститута кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: nvareniuk@ukr.net.