УДК 519.622; 517.5

В.І. БІЛЕНКО, К.В. БОЖОНОК, С.Ю. ДЗЯДИК, Н.Г. КИРИЛАХА

АНАЛІЗ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ З КЕРОВАНОЮ ПАМ'ЯТТЮ НА ОСНОВІ а-МЕТОДУ В.К. ДЗЯДИКА

Анотація. Розглянуто питання конструювання та теоретичного обґрунтування обчислювальних алгоритмів для аналізу узагальнених інтегральних моделей Глушкова на основі апроксимаційного методу В.К. Дзядика.

Ключові слова: кусково-поліноміальна апроксимація, ненасичуваність, найкраще наближення, алгебраїчно-нелінійні рівняння, оптимальні алгоритми, оптимізація обчислень, інтегральні моделі систем з керованою пам'яттю.

ВСТУП

У статті досліджено питання побудови, обґрунтування та комп'ютерної реалізації обчислювальних алгоритмів без насичення точності для аналізу узагальнених інтегральних моделей Канторовича–Глушкова систем з керованою пам'яттю [1–4].

Актуальність удосконалення сучасних та розроблення нових алгоритмів аналізу інтегральних динамічних моделей Канторовича–Глушкова зумовлена посиленням вимог до трьох основних характеристик обчислювальних алгоритмів: точності, швидкодії та інформаційної складності [5–7]. Це, перш за все, потрібно у зв'язку з необхідністю забезпечення високої точності та надійності математичного та комп'ютерного моделювання екстремальних динамічних процесів, систем і технологій, оскільки ці моделі описують широкий клас прикладних задач. Це, зокрема, задачі оптимального керування, моделювання систем, що розвиваються, в економіці, біології, аналізі еколого-економічних процесів [8, 9].

В основу запропонованого алгоритму покладено апроксимаційний метод (а-метод) В.К. Дзядика [5]. Важливими властивостями та перевагами над іншими методами та алгоритмами є його оптимальність у сенсі найкращих наближень та ненасиченість (алгоритм без насичення точності [10, 11] або алгоритм інтелектуального моделювання [12]). Ці властивості набувають особливого значення тоді, коли потрібно уникнути явища «вибуху похибок» [6, 7, 13, 14] у випадку великої розмірності та великого інтервалу інтегрування початкової задачі.

Ця робота є продовженням досліджень, проведених авторами в роботах [15–18] та пошуком нових областей застосування апроксимаційного методу В.К. Дзядика, а також більш детально висвітлює результати, анонсовані в роботі [19].

Зазначимо, що представлений алгоритм є зручним для реалізації в системах комп'ютерної алгебри, зокрема, високоефективної системи алгебраїчного програмування, що розробляються школою академіка О.А. Летичевського [20] та ін.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Інтегральною моделлю Канторовича–Глушкова систем з керованою пам'яттю в загальному випадку [1–4] є така система:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_{z(t)}^{t} f_{ij}(s, t, x_1(s), \dots, x_m(s))ds, \tag{1}$$

де $-\infty < z(t) < t$, $t \in [0. T]$, $i = 1, \dots, m$, її економічне обгрунтування наведено в роботах [2, 3], а функції f_{ij} є алгебраїчними чи раціональними поліномами або сплайн-функціями $m+2$ змінних.

АЛГОРИТМ

Розглянемо ідею алгоритму, використовуючи результати робіт [15–18].

1. Поставимо у відповідність системі (1) таку наближену систему:

$$x_{in}(t)=\sum_{j=1}^{m}\int_{z(t)}^{t} f_{ij}(s,t,x_{1n}(s),\ldots,x_{mn}(s))ds+\varepsilon_{N_i}(t), \tag{2}$$

де $z(t)=t_0+t_1\cdot t$, $x_{in}(t)$ — розв'язок рівняння, що є алгебраїчним многочленом степеня не вище n, вигляду

$$x_{in}(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{ik}t^k,\; x_{in}(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta_{ik}T_k\left(\frac{2(t-z(t))}{T-z(t)}-1\right), \tag{3}$$

з невідомими коефіцієнтами α_{ik} (або β_{ik}). Тут $\varepsilon_{N_i}(t)$ — нев'язки-многочлени степенів N_i, що залежать від степенів шуканих многочленів $x_{in}(t)$ та відомих многочленів f_{ij} [16], і забезпечують сумісність наближеної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (2):

$$\varepsilon_{N_i}(t)=\sum_{k=n+1}^{N_i}\tau_{ik}T_k\left(\frac{2(t-z(t))}{T-z(t)}-1\right), \tag{4}$$

де $T_k(\eta)=\cos(k\arccos\eta),\ \eta\in[-1,1]$, — многочлен Чебишова першого роду, τ_{ik} — невідомі допоміжні параметри.

2. Для знаходження коефіцієнтів α_{ik} (або β_{ik}), τ_{ik} і t_0, t_1 можна скористатися ітераційною схемою

$$x_{in,\nu}(t)=\sum_{j=1}^{m}\int_{z(t)}^{t} f_{ij}(s,t,x_{1n,\nu-1}(s),\ldots,x_{mn,\nu-1}(s))ds+\varepsilon_{N_i,\nu}(t), \tag{5}$$

де $\nu=1,2$, ... — номер кроку ітераційного процесу; $x_{in,\nu}(t)$ і $\varepsilon_{N_i,\nu}(t)$ — многочлени відповідного вигляду (3) і (4) з коефіцієнтами $\alpha_{ik,\nu}$ (або $\beta_{ik,\nu}$) і $\tau_{ik,\nu}$ на ν-му кроці ітерацій.

Прирівнюючи в (5) для кожного $\nu=1,2$, ... коефіцієнти з однаковими степенями, одержуємо для $\alpha_{ik,\nu}$ (або $\beta_{ik,\nu}$), $\tau_{ik,\nu}$ і $t_{0,\nu}$, $t_{1,\nu}$ систему з (N_i+3)-х лінійних алгебраїчних рівнянь.

ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ АЛГОРИТМУ

Теоретичні дослідження проведено за умов єдиності та існування розв'язків системи (1) згідно з роботами В.М. Глушкова та його учнів і послідовників [1–4] та за припущення, що $z(t)=0$.

Позначимо $C[0,T]$ і $L_p^2[0,T]$ відповідно простір неперервних функцій і простір сумовних з квадратом для чебишовської ваги

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{T}-1\right)^2}} \tag{6}$$

функцій із загальновідомими нормами $\|\cdot\|_{C[\,\cdot\,]}$, $\|\cdot\|_{L_p^2[\,\cdot\,]}$.

На основі результатів [15, 16, 19] має місце таке твердження.

Теорема 1. Нехай число $T>0$ таке, що існує єдиний неперервний розв'язок системи рівнянь (1) і єдиний розв'язкок системи (2) у вигляді вектора-полінома на проміжку $[0,T]$.

Тоді виконуються нерівності

$$\sum_{j=1}^{m}(\| x_j - x_{jn}\|_C) \le A_1 \sum_{j=1}^{m}(E_n(x_j))_C, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(\| x_j - x_{jn}\|_{L_p^2}) \le \left(1+\frac{A_2}{n+1}\right)\sum_{j=1}^{m}(E_n(x_j))_{L_p^2}, \tag{8}$$

де величини A_1, A_2 — деякі константи, що не залежать від n; $(E_n(x_j))_C$ та $(E_n(x_j))_{L_p^2}$ — величини найкращого наближення алгебраїчними многочленами функції $u(x)$.

Доведення. Доведення теореми ґрунтується на роботах [15–18] і буде проведено для випадку одного рівняння. З (1) і (2) отримуємо

$$x(t)-x_n(t)=\int_0^t (f(s,t,x(s))-f(s,t,x_n(s))ds+\varepsilon_N(t). \tag{9}$$

З виразу (9), беручи до уваги вигляд $f(s,t,x(s))$, маємо

$$x(t)-x_n(t)=\int_0^t \sum_{l=0}^{L}\sum_{p=0}^{P}\sum_{q=0}^{Q} b_{lpq}s^l t^p \mu_{qn}(s)(x(s)-x_n(s))ds+\varepsilon_N(t), \tag{10}$$

де

$$\mu_{qn}(s)=\sum_{r=0}^{q-1} x_n^r(s)\, x^{q-r-1}(s). \tag{11}$$

Внаслідок лінійності рівняння (10) відносно різниці $x(t)-x_n(t)$ має місце рівність

$$x(t)-x_n(t)=\varepsilon_N(t)+\int_0^t R_n(s,t)\varepsilon_N(s)ds, \tag{12}$$

де $R_n(s,t)$ — резольвента ядра рівняння (10).

Звідси, на основі нерівності Гроноулла–Белмана [15, 21], згідно з (10) із урахуванням того, що x, x_n в кулі $\sigma(\rho)$, отримуємо оцінку для $Y=C$

$$\| x(t)-x_n(t)\|_Y \le M_1(Y)\|\varepsilon_N(t)\|_Y, \tag{13}$$

де $M_1(Y)$ — деяка константа, що не залежить від n.

Якщо застосувати рівність (12) та нерівність Буняковського для оцінки резольвенти $R_n(s,t)$, то можна пересвідчитися у справедливості оцінки (13) для $Y=L_p^2$.

Далі, в силу теореми про диференційованість за параметром, вимоги якої задовольняються, проводимо заміну $z=\arccos\left(2\frac{t}{T}-1\right)$ та інтегруємо частинами інтеграл, що стоїть у правій частині (10). З урахуванням (4) отримуємо

$$\left|\int_0^t R(s,t)\varepsilon_N(s)ds\right| \le \frac{T\|\tau\|\sqrt{N}}{n+1}c, \tag{14}$$

де

$$\|\tau\|=\left(\sum_{k=n+1}^{N}\tau_k^2\right)^{1/2} \tag{15}$$

c — деяка стала, що не залежить від n.

Якщо скористатися тим, що в силу ортогональності поліномів Чебишова $T_k\left(2\frac{t}{T}-1\right)$ на відрізку $[0,T]$ із вагою ρ мають місце, аналогічно [15], нерівності

$$\| \tau \| \le \| \varepsilon_N(t) \|_{L_p^2}, \tag{16}$$

з (12) в силу (14) отримаємо нерівність

$$\| x(t)-x_n(t) \|_{L_2^p} \le \left(1+\frac{T\sqrt{N}}{n+1}M_2(Y)\right) \cdot \| \varepsilon_N(t) \|_{L_p^2}, \tag{17}$$

де $M_2(Y)$ — деяка константа, що не залежить від *n*.

Далі, внаслідок лінійності та проекційності поліноміальних операторів Фур'є–Чебишова, за умови $\theta_n = 1-\frac{\pi T\sqrt{N}M_1}{2n+2} > 0$, отримаємо аналогічно [15] оцінку

$$\| \tau \| \le \frac{E_n(x)_{L_2^p}}{\theta_n}.$$

Звідси, якщо врахувати попередню оцінку та нерівність (13), маємо (7)–(8).

Теорему доведено.

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для реалізації запропонованого алгоритму обрано таку інтегральну модель:

$$x(t) = x(\xi) + \int_{\xi}^{t} x(s)ds,$$

де $z(t)=\xi$, $\xi < t$, — деяка невідома константа, $x(\xi)=\sqrt{e}$, $t\in[0,1]$.

Наближений розв'язок можна шукати у вигляді полінома

$$x_1(t) = \begin{cases} C_0 + C_1 t, & \text{якщо } 0 \le t \le \xi, \\ C_2 + C_3 t, & \text{якщо } \xi \le t \le 1. \end{cases}$$

Наближені рівняння для знаходження C_0, C_1 та C_2, C_3 згідно з алгоритмом матимуть вигляд

$$C_0 + C_1 t = 1 + \int_0^t (C_0 + C_1 s)\, ds + \tau_1 T_2\left(\frac{2t-\xi}{\xi}\right),$$

$$C_2 + C_3 t = \sqrt{e} + \int_{\xi}^t (C_2 + C_3 s)\, ds + \tau_2 T_2\left(\frac{2t-(1+\xi)}{1-\xi}\right),$$

де τ_1, τ_2 — невідомі допоміжні параметри, $T_2\left(\frac{2t-\xi}{\xi}\right)$, $T_2\left(\frac{2t-(1+\xi)}{1-\xi}\right)$ — многочлени Чебишова другого степеня, зміщені з відрізка $[-1;1]$ на відрізки $[0;\xi]$ і $[\xi;1]$ відповідно.

Після підстановки виразів для многочленів Чебишова у наближені рівняння отримано системи для знаходження невідомих C_0, C_1, τ_1 та C_2, C_3, τ_2.

У результаті розв'язання цих систем одержуємо:

$$x_1(x) = \begin{cases} 0.98 + 1.31t, & 0 \le t \le \xi, \\ 0.52 + 2.14t, & \xi \le t \le 1, \end{cases} \qquad \xi \approx 0.51,\ \tau_1 = -0.02,\ \tau_2 = -0.03.$$

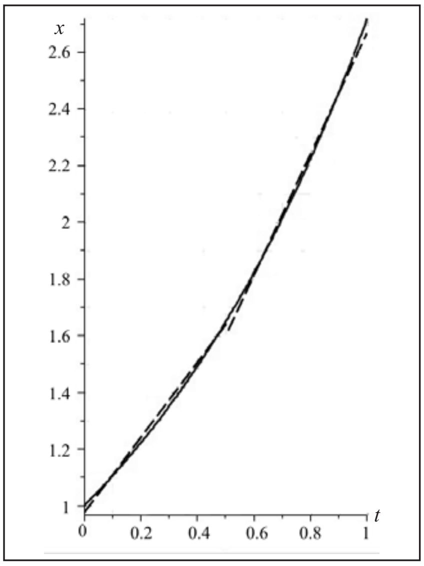

Рис. 1

Відповідний наближений розв’язок (штрихова лінія) представлено на рис. 1. Для порівняння наведено також точний розв’язок задачі (суцільна лінія).

Таким чином, тестовий приклад добре ілюструє ефективність та доцільність розв’язання інтегрального рівняння (1) з використанням наведеного алгоритму.

ВИСНОВКИ

1. Сконструйовано та теоретично обґрунтовано високоточний алгоритм без насичення точності для аналізу узагальнених інтегральних моделей з керованою пам’яттю на основі апроксимаційного метода В.К. Дзядика.

2. Сформульовано і доведено теорему про оцінки похибок відповідної задачі на основі запропонованого алгоритму у рівномірній та квадратичній метриках.

3. Проведено обчислювальні експерименти на тестових задачах, які добре проілюстрували теоретично прогнозовані властивості ненасичуваності за точністю та оптимальності в сенсі найкращих наближень побудованого алгоритму і, як наслідок, його ефективність для аналізу узагальнених інтегральних моделей Канторовича–Глушкова.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Канторович Л.В., Горьков Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели. *Докл. АН СССР*. 1959. Т. 129, № 4. С. 732–735.
2. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей. *Управляющие системы и машины*. 1977. №. 2. С. 3–6.
3. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. Москва: Наука, 1983. 350 с.
4. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. Киев: Наук. думка, 1991. 220 с.
5. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1988. 304 с.
6. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Київ: Наук. думка, 2012. 400 с.
7. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 584 с.
8. Яненко В.М., Денисюк В.Н., Рыхтовский В.О., Яненко Н.В., Белявина Л.В. Моделирование рисков возникновения разных форм гемобластозов. *Компьютерная математика*. 2009. № 1. С. 130–141.
9. Yatsenko Y., Hritonenko N. Optimization of the lifetime of capital equipment using integral models. *Journal of Industrial and Management Optimization*. 2005. Vol. 1, N 4. P. 415–432.
10. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2004. 500 с.
11. Бабенко К.И. О явлении насыщения в численном анализе. *Докл. АН СССР*. 1978. Т. 241, № 3. С. 505–508.
12. Гладкий С.Л., Степанов Н.А., Ясницкий Л.Н.; под ред. Ясницкого Л.Н. Интеллектуальное моделирование физических проблем. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2006. 200 с.

13. Сергиенко И.В., Химич А.Н., Яковлев М.Ф. Методы получения достоверных решений систем линейных алгебраических уравнений. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. Т. 47, № 1. С. 62–73.
14. Сергієнко І.В. Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності. Київ: Академперіодика, 2010. 239 с.
15. Биленко В.И. О погрешности a-метода решения интегральных уравнений Вольтерра с полиномиальными нелинейностями. *Укр. мат. журнал*. 1989. Т. 41, № 4. С. 537–543.
16. Біленко В.І., Божонок К.В., Дзядик С.Ю. Кусково-поліноміальні наближення розв'язків імпульсних диференціальних рівнянь. *Укр. мат. журнал*. 2019. Т. 71, № 2. С. 168–178.
17. Біленко В.І., Божонок К.В., Дзядик С.Ю., Стеля О.Б. Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно-нелінійних рівнянь математичної фізики. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2016. Т. 13, № 3. С. 7–27.
18. Bilenko V.I., Bozhonok K.V., Dzyadyk S.Yu., and Stelya O.B. Piecewise polynomial algorithms for the analysis of processes in inhomogeneous media. *Cybern. Syst. Analysis*. 2018. Vol. 54, N 4. P. 636–642.
19. Біленко В.І., Кирилаха Н.Г. Апроксимаційний метод аналізу моделей Канторовича–Глушкова. Матеріали міжнародної наукової конференції «Сучасна інформатика: проблеми, досягнення і перспективи розвитку», присвяченої 90-річчю В.М. Глушкова. 2013. С. 130–131.
20. Летичевский А.А., Денисенко П.Н., Биленко В.И., Волков В.А. Реализация численно-аналитических методов приближения функций, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 1. С. 108–112.
21. Яценко Ю.П. О системах нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестным нижним пределом интегрирования. *Укр. мат. журнал*. 1986. Т. 38, № 1. С. 129–131.

Надійшла до редакції 05.11.2018

В.И. Биленко, Е.В. Божонок, С.Ю. Дзядык, Н.Г. Кирилаха

АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ С УПРАВЛЯЕМОЙ ПАМЯТЬЮ НА ОСНОВЕ a-МЕТОДА В.К. ДЗЯДЫКА

Аннотация. Рассмотрены вопросы конструирования и теоретического обоснования вычислительных алгоритмов для анализа обобщенных интегральных моделей Глушкова на основе аппроксимационного метода В.К. Дзядыка.

Ключевые слова: кусочно-полиномиальная аппроксимация, ненасыщаемость, наилучшее приближение, алгебраически-нелинейные уравнения, оптимальные алгоритмы, оптимизация вычислений, интегральные модели с управляемой памятью.

V.I. Bilenko, K.V. Bozhonok, S.Yu. Dzyadyk, N.G. Kyrylakha

ANALYSIS OF GENERALIZED GLUSHKOV INTEGRAL MODELS WITH CONTROLLABLE MEMORY ON THE BASIS OF THE V.K. DZYADYK a-METHOD

Abstract. The problems of construction and theoretical substantiation of computational algorithms for the analysis of generalized Glushkov integral models are considered on the basis of the V.K. Dzyadyk approximation method.

Keywords: piecewise polynomial approximation, unsaturation, the best approximation, algebraic-nonlinear equations, optimal algorithms, computing optimization, memory controlled integral models.

Біленко Валентин Іванович,
кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, професор кафедри Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова, Київ, e-mail: v.i.bilenko@npu.edu.ua.

Божонок Катерина Валеріївна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова, Київ, e-mail: katboz2014@gmail.com.

Дзядик Світлана Юріївна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Державного університету телекомунікацій, Київ.

Кирилаха Наталія Григорівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, e-mail: natalykiril582@gmail.com.