УДК 519.85

С.В. ЯКОВЛЕВ

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Аннотация. Предложен подход к исследованию задач оптимизации пространственных конфигураций на основе формирования конфигурационных пространств геометрических объектов. В зависимости от выбора обобщенных переменных исследованы различные классы пространственных конфигураций. Введен класс функций в конфигурационном пространстве геометрических объектов, позволяющий предложить новые и развить существующие подходы для формализации задач оптимизации пространственных конфигураций. Рассмотрена задача размещения круговых объектов в ограниченной области по критерию минимизации суммарной площади их попарных пересечений.

Ключевые слова: геометрический объект, конфигурационное пространство, обобщенные переменные, оптимизация, размещение, покрытие.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимизации пространственных конфигураций постоянно привлекают интерес ученых. Основное внимание при этом уделяется сформировавшимся классам оптимизационных задач упаковки [1–4], компоновки [5–8], покрытия [9–12] и разбиения [13, 14]. Вместе с тем многообразие практических постановок приводит к необходимости рассмотрения все более сложных пространственных конфигураций, которые не соответствуют классическим формулировкам. С одной стороны, это связано с необходимостью учета специфических ограничений поведения, а с другой — с тем, что сложные пространственные конфигурации предполагают, что объекты могут по-разному располагаться как относительно один другого, так и различных совокупностей объектов. Такие пространственные конфигурации одновременно должны учитывать особенности задач компоновки, упаковки и покрытия для различных групп объектов, формирующих конфигурацию. Поэтому в настоящее время невозможно предложить единый подход к исследованию задач оптимизации пространственных конфигураций и актуальна разработка новых методов их решения.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под конфигурацией в соответствии с [15] будем понимать отображение ξ некоторого исходного множества Σ элементов произвольной природы в абстрактное множество Ω определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений Λ, т.е. $\xi: \Sigma \to \Omega$.

Выберем в качестве Σ конечное множество геометрических объектов. Под геометрическим объектом S в пространстве R^n будем понимать геометрическое место точек $P \in R^n$, удовлетворяющих неравенству $f(P) \geq 0$. При этом уравнение $f(P) = 0$ задает границу объекта S, которую обозначим $fr\,S$. Заметим, что в классических работах основное внимание уделяется, как правило, вопросам построения уравнения границы $fr\,S$, т.е. определению аналитического вида функции $f(P)$. Ясно, что уравнение границы определяет форму объекта S. Фундаментальные исследования, посвященные решению обратной задачи аналитической геометрии (определению уравнения границы $f(P) = 0$ по заданному геометрическому объекту S), наиболее полно освещены в [16].

Один и тот же геометрический объект можно задать бесчисленным множеством способов. Поэтому на практике вводятся дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция $f(P)$ в R^n, например гладкость, нормальность и др. В общем случае уравнение границы объекта содержит константы $\boldsymbol{m}=(m_1,\ldots,m_\alpha)$, которые характеризуют его тополого-метрические свойства (размеры), т.е. $f(P,\boldsymbol{m})=0$, $P\in R^n$. Компоненты вектора $\boldsymbol{m}=(m_1,\ldots,m_\alpha)$ назовем метрическими параметрами пространственной формы объекта. Обозначим $S(\boldsymbol{m})$ объект S, имеющий метрические параметры $\boldsymbol{m}$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением геометрических объектов в пространствах R^3 и R^2, положив $P=(x,y,z)\in R^3$ и $P=(x,y)\in R^2$ соответственно.

Пусть функция $f(P,\boldsymbol{m})$ определена и непрерывна по $P\in R^3$ при любом $\boldsymbol{m}\in D$, где D — множество допустимых значений метрических параметров $\boldsymbol{m}$. Под геометрическим объектом $S\subset R^3$ будем понимать такое геометрическое место точек $P\in R^3$, что для любого фиксированного $\boldsymbol{m}\in D$ выполняются условия

$$f(P,\boldsymbol{m})=0, \text{ если } P\in fr\,S(\boldsymbol{m});$$

$$f(P,\boldsymbol{m})>0, \text{ если } P\in int\,S(\boldsymbol{m});$$

$$f(P,\boldsymbol{m})<0, \text{ если } P\in R^3\setminus cl\,S(\boldsymbol{m}),$$

где $int\,S$ и $cl\,S$ — соответственно операции топологической внутренности и замыкания объекта S.

Для построения математических моделей реальных материальных тел в пространствах R^2 и R^3 выделен класс так называемых φ-объектов, свойства которых достаточно полно описаны в [17]. Отметим, что φ-объекты измеримы по Лебегу, причем функции $f(P,\boldsymbol{m})$, задающие их границы, также измеримы и непрерывны по $P\in R^3$ при любом $\boldsymbol{m}\in D$. Далее в качестве геометрических объектов рассматриваются φ-объекты пространства R^3 и символ φ опускается.

В пространстве R^3 зададим систему координат $Oxyz$, которую назовем неподвижной, а для объекта S — собственную (подвижную) систему координат, начало которой назовем его полюсом. Для характеристики взаимного расположения указанных систем координат введем так называемые параметры размещения $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_\beta)=(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\nu}$ — вектор координат полюса объекта S в неподвижной системе координат, а $\boldsymbol{\theta}$ — вектор угловых параметров, определяющих взаимное расположение осей собственной и неподвижной систем координат. Для $S\subset R^3$ в общем случае имеем $\beta=6$, $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_\beta)=(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$. Однако в зависимости от формы объекта число его параметров размещения может быть меньшим. В частности, $\beta=3$ для центрально симметричного объекта (шара). Кроме того, в постановке задач могут быть фиксированы некоторые параметры размещения, например при преобразованиях трансляции.

Положение объекта S относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ задается уравнением общего положения, которое имеет вид

$$F(P,\boldsymbol{m},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\theta})=f(A(P-\boldsymbol{\nu}),\boldsymbol{m})=0, \tag{1}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_3+\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3-\cos\theta_1\sin\theta_3 & \sin\theta_1\cos\theta_2\\ \cos\theta_2\sin\theta_3 & \cos\theta_2\cos\theta_3 & -\sin\theta_2\\ \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3-\sin\theta_1\cos\theta_3 & \sin\theta_1\sin\theta_3+\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3 & \cos\theta_1\cos\theta_2\end{pmatrix}.$$

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Для формализации задач оптимизации пространственных конфигураций воспользуемся концепцией построения конфигурационных пространств геометрических объектов, предложенной в [18, 19]. В общем случае конфигурационное пространство определяется совокупностью обобщенных переменных, задающих расположение в пространстве некоторой системы и ее частей как относительно один другого, так и относительно заданной системы отсчета.

Пусть уравнение общего положения объекта S имеет вид (1). Сформируем его конфигурационное пространство $\Xi(S)$, выбрав в качестве обобщенных переменных метрические параметры $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_\alpha)$ и параметры размещения $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_\beta) = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta})$. Тогда точке $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_\gamma) = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{p})$, $\gamma = \alpha + \beta$, конфигурационного пространства $\Xi(S)$ будет соответствовать параметризованный геометрический объект $S(\boldsymbol{g}) \subset R^3$, такой что

$$F(P, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}) = 0, \text{ если } P \in fr\, S(\boldsymbol{g});$$

$$F(P, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}) > 0, \text{ если } P \in int\, S(\boldsymbol{g});$$

$$F(P, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}) < 0, \text{ если } P \in R^3 \setminus cl\, S(\boldsymbol{g}).$$

Пусть $\Sigma = \{S_1, \ldots, S_n\}$ — исходное множество объектов $S_i \subset R^3$, $i \in \boldsymbol{J}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. По аналогии с приведенными ранее рассуждениями введем их метрические параметры формы $\boldsymbol{m}^i = (m_1^i, \ldots, m_{\alpha_i}^i)$ и параметры размещения $\boldsymbol{p}^i = (p_1^i, \ldots, p_\beta^i) = (\boldsymbol{\nu}^i, \boldsymbol{\theta}^i)$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, $\beta \le 6$. Сформируем конфигурационные пространства $\Xi(S_i)$ объектов S_i с обобщенными переменными $\boldsymbol{g}^i = (\boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i)$, $i \in \boldsymbol{J}_n$. Каждой точке $\boldsymbol{g}^i \in \Xi(S_i)$ будет соответствовать параметризованый геометрический объект $S_i(\boldsymbol{g}^i) \subset R^3$, заданный своим уравнением общего положения $F_i(P, \boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{\nu}^i, \boldsymbol{\theta}^i) = 0$. При этом

$$F_i(P, \boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i) = 0, \text{ если } P \in fr\, S_i(\boldsymbol{g}^i);$$

$$F_i(P, \boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i) > 0, \text{ если } P \in int\, S_i(\boldsymbol{g}^i);$$

$$F_i(P, \boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i) < 0, \text{ если } P \in R^3 \setminus cl\, S_i(\boldsymbol{g}^i).$$

Сформируем конфигурационное пространство

$$\Xi(\Sigma) = \Xi(S_1) \times \Xi(S_2) \times \ldots \times \Xi(S_n)$$

с обобщенными переменными $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}^1, \ldots, \boldsymbol{g}^n)$.

Определение 1. Отображение $\xi: \Sigma \to \Xi(\Sigma)$ множества геометрических объектов $\Sigma = \{S_1, \ldots, S_n\}$ в конфигурационное пространство $\Xi(\Sigma)$, удовлетворяющее определенному набору ограничений Λ, задает пространственную конфигурацию объектов S_i, $i \in \boldsymbol{J}_n$.

Таким образом, пространственная конфигурация задает в пространстве R^3 множество параметризованных геометрических объектов $S_i(\boldsymbol{g}^i) \subset R^3$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, которые в совокупности формируют сложный объект определенной структуры. В связи с этим определим отображение $\chi: \Sigma \to S_\chi$, ставящее в соответствие множеству $\Sigma = \{S_1, \ldots, S_n\}$ так называемый сложный объект $S_\chi = \chi(S_1, \ldots, S_n)$. Будем говорить, что отображение χ задает структуру сложного объекта S_χ.

О КЛАССЕ ω-ФУНКЦИЙ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В конфигурационном пространстве $\Xi(\Sigma)$ сложному объекту $S_\chi = \chi(S_1, \ldots, S_n)$ соответствует параметризованный объект $S_\chi(\boldsymbol{g}) = S_\chi(\boldsymbol{g}^1, \ldots, \boldsymbol{g}^n) = \chi(S_1(\boldsymbol{g}^1), \ldots$ $\ldots, S_n(\boldsymbol{g}^n))$. Поскольку $S_1, \ldots, S_n$ являются φ-объектами, множества $S_i(\boldsymbol{g}^i) \subset R^3$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, измеримы по Лебегу при любом $\boldsymbol{g}^i \in \Xi(S_i)$.

Определим функцию

$$\omega_\chi(\boldsymbol{g}) = \omega_\chi(\boldsymbol{g}^1, \ldots, \boldsymbol{g}^n) = \mu(S_\chi(\boldsymbol{g}^1, \ldots, \boldsymbol{g}^n)),$$

где $\mu(S)$ — мера Лебега множества S.

Определение 2. Функцию $\omega_\chi : \Xi(\Sigma) \to R^1$ назовем ω-функцией параметризованного геометрического объекта $S_\chi(\boldsymbol{g})$.

Для формализации ω-функции введем характеристическую функцию

$$\lambda_\chi(P, \boldsymbol{g}) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \in S_\chi(\boldsymbol{g}), \\ 0, & \text{если } P \notin S_\chi(\boldsymbol{g}). \end{cases}$$

Тогда

$$\omega_\chi(\boldsymbol{g}) = \iiint \lambda_\chi(P, \boldsymbol{g}) dP.$$

Заметим, что если $P \in R^2$, то $\omega_\chi(\boldsymbol{g}) = \iint \lambda_\chi(P, \boldsymbol{g}) dP$.

Рассмотрим следующие структуры сложных объектов, используемые в дальнейшем при формализации различных классов пространственных конфигураций. Начнем с простейшего случая, положив $S_{\chi_i} = \chi_i(S_1, \ldots, S_n) = S_i$. Тогда

$$\omega_{\chi_i}(\boldsymbol{g}) = \mu(S_i(\boldsymbol{g})) = \iiint \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i) dP,$$

где

$$\lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}) = \lambda_{S_i}(P, \boldsymbol{g}^i) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \in S_i(\boldsymbol{g}^i), \\ 0, & \text{если } P \notin S_i(\boldsymbol{g}^i), \end{cases}$$

или с учетом уравнения общего положения объекта

$$\lambda_{S_i}(P, \boldsymbol{g}^i) = \lambda_{S_i}(P, \boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i) = \begin{cases} 1, & \text{если } F_i(P, \boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i) \geq 0, \\ 0, & \text{если } F_i(P, \boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i) < 0. \end{cases}$$

Ясно, что в этом случае функция $\omega_{\chi_i}(\boldsymbol{g})$ не зависит от параметров размещения. Положим $\boldsymbol{\nu}^i = \boldsymbol{0} = \{0, \ldots, 0\}$. Тогда, если зафиксировать метрические параметры объекта S_i, положив $\boldsymbol{m}^i = \hat{\boldsymbol{m}}^i$, то функция $\omega_{\chi_i}(\boldsymbol{g})$ примет постоянное значение

$$\omega_{\chi_i}(\boldsymbol{g}) = \mu(S_i(\hat{\boldsymbol{m}}^i, \boldsymbol{0})) = \iiint\limits_{S_i(\hat{\boldsymbol{m}}^i, \boldsymbol{0})} dP.$$

Пусть

$$S_{\chi_{ij}} = \chi_{ij}(S_1, \ldots, S_n) = S_i \cap S_j. \tag{2}$$

Тогда

$$\omega_{\chi_{ij}}(\boldsymbol{g}) = \mu(S_i(\boldsymbol{g}^i) \cap S_j(\boldsymbol{g}^j)) = \iiint \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i) \lambda_{\chi_j}(P, \boldsymbol{g}^j) dP.$$

Зафиксируем обобщенные переменные геометрического объекта S_i, положив $\boldsymbol{g}^i = \hat{\boldsymbol{g}}^i$. Тогда

$$\omega_{\chi_{ij}}(\boldsymbol{g}) = \mu(S_{ij}(\hat{\boldsymbol{g}}^i) \cap S_j(\boldsymbol{g}^j)) =$$
$$= \iiint \lambda_{\chi_i}(P, \hat{\boldsymbol{g}}^i) \lambda_{\chi_j}(P, \boldsymbol{g}^j) dP = \iiint\limits_{\Omega} \lambda_{\chi_j}(P, \boldsymbol{g}^j) dP,$$

где $\Omega = S_i(\hat{\boldsymbol{g}}^i)$.

Представим структуру сложного объекта в виде $\widehat{\chi}(S_1, \ldots, S_n) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$. Имеем

$$\omega_{\widehat{\chi}}(\boldsymbol{g}) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i(\boldsymbol{g}^i)\right) = \iiint \lambda_{\widehat{\chi}}(P, \boldsymbol{g}) dP = \iiint \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i) dP.$$

Если $\breve{\chi}(S_1, \ldots, S_n) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, то

$$\omega_{\breve{\chi}}(\boldsymbol{g}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i(\boldsymbol{g}^i)\right) = \iiint \lambda_{\breve{\chi}}(P, \boldsymbol{g}) dP = \iiint \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i))\right) dP.$$

Применим приведенные ранее результаты для сложного объекта, имеющего структуру

$$\widetilde{\chi}_0(S_0, S_1, \ldots, S_n) = S_0 \cap \bigcup_{i=1}^{n} S_i. \tag{3}$$

Имеем

$$\omega_{\widetilde{\chi}_0}(\boldsymbol{g}) = \mu\left(S_0(\boldsymbol{g}^0) \cap \bigcup_{i=1}^{n} S_i(\boldsymbol{g}^i)\right) = \iiint \lambda_{\widetilde{\chi}_0}(P, \boldsymbol{g}) dP =$$

$$= \iiint \lambda_{\chi_0}(P, \boldsymbol{g}^0) \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i))\right) dP =$$

$$= \iiint\limits_{S_0(\boldsymbol{g}^0)} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i))\right) dP.$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

В общем случае пространственная конфигурация геометрических объектов должна удовлетворять системе ограничений Λ, учет которых позволяет выделить соответствующий класс пространственных конфигураций. Указанные ограничения получены вследствие того, что объекты, формирующие пространственную конфигурацию, находятся в различных отношениях как бинарных, так и многоместных (n-арных).

Для формирования системы ограничений Λ зададим на множестве геометрических объектов бинарные отношения:

— непересечения $\{*\}$, полагая $S' * S''$, если $int\, S' \cap int\, S'' = \varnothing$;

— включения $\{\circ\}$, полагая $S' \circ S''$, если $int\, S'' \subset S'$.

Формализуем основные ограничения, характерные при формировании наиболее распространенных пространственных конфигураций размещения геометрических объектов.

Определение 3. Отображение $\xi : \Sigma \to \Xi(\Sigma)$ задает конфигурацию упаковки, если $S_i(\boldsymbol{g}^i) * S_j(\boldsymbol{g}^j)$ $\forall\, i, j \in \boldsymbol{J}_n$, $i < j$.

Система ограничений Λ в конфигурациях упаковки порождается условиями взаимного непересечения объектов. При этом используем ω-функцию сложного объекта, имеющего структуру вида (2). Поскольку объекты $int\, S_i$ и $int\, S_j$ не должны иметь общих точек, то

$$\omega_{\chi_{ij}}(\boldsymbol{g}) = 0, \quad i, j \in \boldsymbol{J}_n, \quad i < j. \tag{4}$$

Замечание 1. Для формализации условий непересечения в работах [17, 20–22] предложен математический аппарат Ф-функций и квази-Ф-функций, получен их аналитический вид для базовых 2D и 3D объектов. Однако выражения Ф-функций для объектов сложной формы при переменных метрических и угловых параметрах не определены. Предложенный в настоящей работе подход позволяет по-новому решать данную проблему.

Обозначим $\Xi(S_0)$ конфигурационное пространство объекта S_0 с обобщенными переменными $\boldsymbol{g}^0 = (\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{p}^0)$, а $\Sigma^0 = \{S_0, S_1, \ldots, S_n\} = \Sigma \cup S_0$. Сформируем конфигурационное пространство

$$\Xi(\Sigma^0) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \ldots \times \Xi(S_n).$$

Определение 4. Отображение $\xi:\Sigma^0 \to \Xi(\Sigma^0)$ задает конфигурацию покрытия, если $\breve{\chi}(S_1(\boldsymbol{g}^1), \ldots, S_n(\boldsymbol{g}^n)) \circ S_0(\boldsymbol{g}^0)$.

При этом объект S_0 называют областью покрытия, а объекты $S_1, \ldots, S_n$ — покрывающими. Как правило, система координат области покрытия совмещается с неподвижной системой координат, а параметры размещения $\boldsymbol{p}^0 = (p_1^0, \ldots, p_\beta^0) = \{0, \ldots, 0\}$.

Для формализации условия покрытия определим следующую ω-функцию:

$$\omega_{\tilde{\chi}_0}(\boldsymbol{g}) = \mu\left(S_0(\boldsymbol{g}^0) \cap \bigcup_{i=1}^{n} S_i(\boldsymbol{g}^i)\right) = \iiint \lambda_{\tilde{\chi}_0}(P, \boldsymbol{g}) dP =$$

$$= \iiint \lambda_{\chi_0}(P, \boldsymbol{g}^0)\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i))\right) dP =$$

$$= \iiint\limits_{S_0(\boldsymbol{g}^0)} \left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_{\chi_i}(P, \boldsymbol{g}^i))\right) dP.$$

В классе φ-объектов покрытие области S_0 покрывающими множествами $S_1, \ldots, S_n$ имеет место тогда и только тогда, когда $\omega_{\tilde{\chi}_0}(\boldsymbol{g}) = \mu(S_0(\boldsymbol{g}^0))$, где

$$\mu(S_0(\boldsymbol{g}^0)) = \iiint\limits_{S_0(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{0})} dP = \iiint \lambda_{\chi_0}(P, \boldsymbol{g}^0) dP.$$

Зафиксируем метрические параметры области покрытия S_0, положив $\boldsymbol{m}^0 = \hat{\boldsymbol{m}}^0$ и пусть $\hat{\boldsymbol{g}}^0 = (\hat{\boldsymbol{m}}^0, \boldsymbol{0})$. Тогда

$$\mu(S_0(\hat{\boldsymbol{g}}^0)) = \iiint\limits_{S_0(\hat{\boldsymbol{m}}^0, \boldsymbol{0})} dP = \iiint \lambda_{\chi_0}(P, \hat{\boldsymbol{g}}^0) dP.$$

Определение 5. Отображение $\xi:\Sigma^0 \to \Xi(\Sigma^0)$ задает конфигурацию максимального покрытия, если функция $\omega_{\tilde{\chi}_0}(\boldsymbol{g})$ достигает своего максимального значения на множестве всех допустимых значений обобщенных переменных, удовлетворяющих заданному набору ограничений Λ, т.е.

$$\omega_{\tilde{\chi}_0}(\boldsymbol{g}) \to \max, \ \boldsymbol{g} \in \Xi(\Sigma). \tag{5}$$

Базовая задача оптимизации (5) соответствует случаю $\Lambda = \varnothing$.

Потребуем, чтобы покрывающие объекты S_i, $i \in \boldsymbol{J}_n$, принадлежали области покрытия S_0, т.е. сформируем систему ограничений Λ, формализующих бинарное отношение включения $S_0 \circ S_i$, $i \in \boldsymbol{J}_n$. Имеем

$$\omega_{\chi_{0i}}(\hat{\boldsymbol{g}}^0, \boldsymbol{g}^i) = 0, \ i \in \boldsymbol{J}_n, \tag{6}$$

где $\hat{\boldsymbol{g}}^0 = (\hat{\boldsymbol{m}}^0, \boldsymbol{0})$.

Таким образом, нелинейная задача оптимизации (5), (6) является математической моделью задачи максимального покрытия области S_0 совокупностью покрывающих объектов $S_i \subseteq S_0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, принадлежащих области покрытия.

Потребуем, чтобы покрывающие объекты S_i, $i \in \boldsymbol{J}_n$, попарно не пересекались, т.е. сформируем систему ограничений Λ, формализующих условия $S_i * S_j$, $i, j \in \boldsymbol{J}_n$, $i < j$. Получим задачу максимизации функции $\omega_{\tilde{\chi}_0}(\boldsymbol{g})$ при выполнении системы ограничений-равенств (4), решение которой позволяет определить пространственную конфигурацию упаковки, обеспечивающую максимальное покрытие области.

Проиллюстрируем приложение приведенных ранее результатов при формализации и решении следующей задачи. Рассмотрим множество геометрических объектов $\Sigma^0 = \{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, элементами которого являются круги. Полюс круга выберем в точке его симметрии. Тогда, полагая $\boldsymbol{p}^i = (x_i, y_i)$, $\boldsymbol{m}^i = r^i$, уравнение его общего положения в неподвижной системе координат Oxy можно задать в виде $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0$.

Сформируем конфигурационное пространство круга $\Xi(S_i)$, выбирая в качестве его обобщенных переменных $\boldsymbol{g}^i = (\boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{p}^i) = (r_i, x_i, y_i)$. Тогда конфигурационное пространство $\Xi(\Sigma^0) = \Xi(S_0) \times \Xi(S_1) \times \dots \times \Xi(S_n)$ с обобщенными переменными

$$\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}^0, \boldsymbol{g}^1, \dots, \boldsymbol{g}^n) = (\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{m}^1, \boldsymbol{p}^1, \dots, \boldsymbol{m}^n, \boldsymbol{p}^n) =$$
$$= (r_0, x_0, y_0, r_1, x_1, y_1, \dots, r_n, x_n, y_n)$$

будет задавать в R^2 пространственную конфигурацию размещения.

Для конкретизации задачи сформируем систему ограничений Λ. Потребуем, чтобы круги S_i, $i \in \boldsymbol{J}_n$, принадлежали кругу S_0, т.е. выполнялось условие $S_i \subseteq S_0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$. В качестве критерия оптимизации выберем суммарную площадь попарных пересечений кругов S_i, $i \in \boldsymbol{J}_n$, которую требуется минимизировать. Такая постановка имеет большое количество практических приложений в системах наблюдения и контроля.

Для формализации поставленной задачи воспользуемся приведенными ранее результатами. Предположим, что радиусы кругов известны и, не теряя общности, положим $r_0 > r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. Рассмотрим пространственную конфигурацию, структура которой задается выражением (3).

Построим ω-функцию сложного объекта, структура которого задается выражением (2). Воспользуемся известными выражениями для определения площади пересечения двух кругов. Имеем

$$\omega_{\chi_{ij}}(\boldsymbol{g}) = \mu(S_i(\boldsymbol{g}^i) \cap S_j(\boldsymbol{g}^j)) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{если } ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2} - r_i - r_j \geq 0; \\ \pi r_i^2, \text{ если } \quad ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2} + r_j - r_i \leq 0; \\ r_i^2 \arccos\left(\dfrac{d_{ij}}{r_i}\right) - d_{ij}(r_i^2 - d_{ij}^2)^{1/2} + \\ + r_j^2 \arccos\left(\dfrac{d_{ji}}{r_j}\right) - d_{ji}(r_j^2 - d_{ji}^2)^{1/2}, \quad \text{если } \; r_j - r_i \leq 0, \end{cases}$$

где

$$d_{ij} = \frac{r_i^2 - r_j^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}{2(r_i^2 - r_j^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}}.$$

Тогда суммарная площадь попарных пересечений будет задаваться ω-функцией

$$\omega_\chi(\boldsymbol{g}) = \sum_{i, j \in \boldsymbol{J}_n,\, i < j} \omega_{\chi_{ij}}(\boldsymbol{g}),$$

где

$$\chi(S_1, \dots, S_n) = \bigcup_{i, j \in \boldsymbol{J}_n,\, i < j} (S_i \cap S_j).$$

В результате имеем задачу оптимизации

$$\omega_\chi(\boldsymbol{g}) \to \min \tag{7}$$

при выполнении системы ограничений (4).

Замечание 2. Для класса базовых объектов пространства R^2 известны выражения, формализующие условия попарного непересечения с помощью Ф-функций, причем для кругов эти ограничения имеют простой вид

$$(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - r_j - r_i \geq 0, \quad i, j \in \boldsymbol{J}_n, \quad i < j. \tag{8}$$

Поэтому в данном случае условия (4) целесообразно заменить системой неравенств (8).

Задачи (7), (8) и (7), (4) относятся к классу задач недифференцируемой оптимизации, для решения которых эффективны r-алгоритмы [23] и их современные модификации [24, 25]. Широкий опыт приложения указанного класса алгоритмов при решении непрерывных задач оптимального разбиения множеств описан в [13, 14, 26–28]. Интересные результаты получены при получении нижних оценок в задачах поиска оптимальной конфигурации балансовой упаковки [29, 30].

Данные задачи являются многоэкстремальными. Поэтому возникает необходимость в разработке методов направленного перебора локальных экстремумов. В частности, в задачах упаковки и компоновки для перебора локально-оптимальных пространственных конфигураций используется метод сужающихся окрестностей [31], обобщением которого является метод последовательного статистического анализа вариантов [17]. Этот метод построен на общей схеме методов последовательного анализа В.С. Михалевича [32] и использует для отсева неперспективных вариантов статистические свойства функций при рандомизации исходной задачи оптимизации.

Программная реализация результатов основана на системном анализе и разработке информационно-аналитических моделей задач оптимизации пространственных конфигураций с использованием объектно-ориентированного подхода [33, 34].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный в настоящей статье подход к формализации задач оптимизации пространственных конфигураций существенно расширяет круг решаемых задач, имеющих важное практическое приложение. Введение нового класса функций, зависящих от обобщенных переменных конфигурационного пространства геометрических объектов, позволило предложить новые математические модели задач упаковки, компоновки и покрытия. Более того, появилась возможность формировать пространственные конфигурации, одновременно учитывающие для различных групп объектов специфические ограничения, присущие каждой указанной задаче.

В общем случае задачи оптимизации пространственных конфигураций имеют ярко выраженный комбинаторный характер [35, 36], что позволяет дополнительно использовать свойства комбинаторных объектов [37] при их анализе. Рассматривая обобщенные параметры конфигурационных пространств для характеристики комбинаторных объектов, делаем вывод о перспективности применения теории евклидовой комбинаторной оптимизации [38–41].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fasano G. A modeling-based approach for non-standard packing problems. *Optimized Packings with Applications*. 2015. Vol. 105. P. 67–85. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7_4.
2. Wascher G., Hausner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 183. P. 1109–1130. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.12.047.
3. Fadel G.M., Wiecek M.M. Packing optimization of free-form objects in engineering design. *Optimized Packings with Applications*. 2015. Vol. 105. P. 37–66.
4. Stoyan Yu., Pankratov A., Romanova T. Placement problems for irregular objects: Mathematical modeling, optimization and applications. *Optimization Methods and Applications*. 2017. P. 521–558. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_25.
5. Drira A., Pierreval H., Hajri-Gabouj S. Facility layout problems: A survey. *Annual Reviews in Control*. 2007. Vol. 31, N 2. P. 255–267. DOI: https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2007.04.001.

6. Bortfeldt A., Wascher G. Constraints in container loading: A state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*. 2013. Vol. 229, N 1. P. 1–20. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.12.006.
7. Stoyan Yu.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Optimization of 3D objects layout into a multiply connected domain with account for shortest distances. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 3. P. 374–385. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-014-9626-4.
8. Tian T., Zhu W., Lim A., Wei L. The multiple container loading problem with preference. *European Journal of Operational Research*. 2016. Vol. 248, N 1. P. 84–94.
9. Stoyan Yu.G., Patsuk V.M. Covering a convex 3D polytope by a minimal number of congruent spheres. *International Journal of Computer Mathematics*. 2014. Vol. 91, N 9. P. 2010–2020. DOI: https://doi.org/10.1080/00207160.2013.865726.
10. Yakovlev S.V. On a class of problems on covering of a bounded set. *Acta Mathematica Hungarica*. 1989. Vol. 53, N 3. P. 253–262. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01953365.
11. Shekhovtsov S.B., Yakovlev S.V. Formalization and solution of one class of covering problem in design of control and monitoring systems. *Avtomatika i Telemekhanica*. 1989. Vol. 50, N 5. P. 705–710. URL: http://mi.mathnet.ru/eng/at6296.
12. Kiseleva E.M., Lozovskaya L.I., Timoshenko E.V. Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 3. P. 421–437. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-009-9113-5.
13. Кісельова О.М. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування. Дніпро: Ліра, 2018. 532 с.
14. Киселева Е. М., Коряшкина Л. С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи. Киев: Наук. думка, 2013. 604 с.
15. Berge C. Principes de combinatoire. Paris: Dunod, 1968. 146 p.
16. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
17. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
18. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 716–726. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0073-5.
19. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 9. P. 38–50. DOI: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.30.
20. Stoyan Y., Gil M., Terno J., Romanova T., Schithauer G. Φ-function for complex 2D objects. 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian. *Operations Research Societies*. 2004. Vol. 2, N 1. P. 69–84.
21. Stoyan Yu., Scheithauer G., Romanova T. Mathematical modeling of interaction of primary geometric 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N 3. P. 332–342. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-005-0067-y.
22. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized object packings using quasi-phi-functions. *Optimized Packings with Applications*. 2015. Vol. 105. P. 265–293. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-18899-7_13.
23. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
24. Stetsyuk P.I. Shor's *r*-algorithms: Theory and practice. *Springer Optimization and its Applications*. 2017. Vol. 130. P. 239–250.
25. Stetsyuk P.I. Theory and software implementations of Shor's *r*-algorithms. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 692–703. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9971-1.
26. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. Киев: Наук. думка, 2005. 564 с.
27. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 3. P. 325–335. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-015-9725-x.
28. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Zhuravel S.V. Algorithm for solving a continuous problem of optimal partitioning with neurolinguistic identification of functions in target functional. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol 50, N 3. P. 102–112.
29. Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. Balance layout problems: Mathematical modeling and nonlinear optimization. *Springer Optimization and its Applications*. 2016. Vol. 114. P. 369–400. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-015-9746-5.
30. Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V. Method of balancing rotating discretely distributed masses. *Energomashinostroenie*. 1982. N 2. P. 4-5.

31. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. Киев: Наук. думка, 1980. 205 с.
32. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. *Кибернетика*. 1965. № 1. С. 45–56, № 2 С. 85–88.
33. Yakovlev S., Kartashov O., Korobchynskyi K. The informational analytical technologies of synthesis of optimal spatial configuration. *Proc. IEEE 13th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies, CSIT'*2018. 2018. P. 374–377.
34. Yakovlev S., Kartashov O. System analysis and classification of spatial configurations. *Proc. IEEE 1st International Conference on System Analysis and Intelligent Computing, SAIC'2018*. 2018. P. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1109/SAIC.2018.8516760.
35. Яковлев С.В. О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов. *Докл. НАН Украины*. 2017. № 9. С. 63–68. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/dnanu_2017_9_7.
36. Yakovlev S.V. The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 5. P. 725–731. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9974-y.
37. Hulianytskyi L., Riasna I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. *Springer Optimization and Its Applications.* 2017. Vol. 130. P. 239–250. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_11.
38. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации. Харьков: Константа, 2017. 404 с.
39. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. *Springer Optimization and its Applications*. 2017. Vol. 130. P. 567–584. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_27.
40. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. N 6. P. 921–930. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-016-9894-2.
41. Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54. N 1. P. 111–123. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-018-0011-6.

Надійшла до редакції 18.01.2019

С.В. Яковлєв

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОСТОРОВИХ КОНФІГУРАЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЕЦІАЛЬНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ

Анотація. Запропоновано підхід до дослідження задач оптимізації просторових конфігурацій на основі формування конфігураційних просторів геометричних об'єктів. Залежно від вибору узагальнених змінних досліджено різні класи просторових конфігурацій. Уведено клас функцій в конфігураційному просторі геометричних об'єктів, що дозволяє запропонувати нові і розвинути наявні підходи до формалізації задач оптимізації просторових конфігурацій. Розглянуто задачу розміщення кругових об'єктів в обмеженій області за критерієм мінімізації сумарної площі їхніх попарних перетинів.

Ключові слова: геометричний об'єкт, конфігураційний простір, узагальнені змінні, оптимізація, розміщення, покриття.

S.V. Yakovlev

FORMALIZATION OF SPATIAL CONFIGURATION OPTIMIZATION PROBLEMS WITH A SPECIAL FUNCTION CLASS

Abstract. An approach to the study of optimization problems of spatial configurations based on the formation of configuration spaces of geometric objects is proposed. Depending on the choice of generalized variables, various classes of spatial configurations are investigated. A class of functions in the configuration space of geometric objects is introduced, which allows us to propose new and develop available approaches for the formalization of optimization problems for spatial configurations. The problem of placing circular objects in a limited area by the criterion of minimizing the total area of their pairwise intersections is considered.

Keywords: geometric object, configuration space, generalized variables, optimization, placement, coverage.

Яковлев Сергей Всеволодович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», e-mail: svsyak7@gmail.com.