УДК 519.63

В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С РАЗНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Аннотация. Найдены в явном виде формулы для множества собственных функций и собственных чисел оператора Лапласа с разными краевыми условиями на сторонах произвольного треугольника. Получены новые результаты в спектральной теории, которые имеют практический интерес при изучении частот и форм вибрации треугольных мембран произвольной формы.

Ключевые слова: спектр, оператор Лапласа, треугольник, краевые условия Дирихле и Неймана.

В работах [1, 2] получены формулы собственных функций (с.ф.) и собственных чисел (с.ч.) оператора Лапласа, когда треугольники равносторонние или равнобедренные. В настоящей статье получены с.ф. и с.ч., когда на сторонах произвольного треугольника заданы и условия Дирихле, и условия Неймана. Показано, что результаты не зависят от различных систем координат.

1. Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\lambda F=0,\ (x, y)\in\Omega, \tag{1}$$

$$F=0,\ (x, y)\in\Gamma, \tag{2}$$

где Ω — произвольный треугольник со сторонами Γ.

Начало системы координат находится в центре вписанного в треугольник круга радиуса r. Основание треугольника параллельно оси Ox. Уравнения прямых, проходящих через центр круга и параллельных сторонам треугольника, имеют вид

$$y=0,\ c_1x+s_1y=0,\ c_2x+s_2y=0,$$

где $c_i=\cos\varphi_i$, $s_i=\sin\varphi_i$, $i=1,2$, — координаты внешних единичных нормалей к прямым. Уравнения сторон треугольника имеют вид

$$y=-r, \tag{3}$$

$$c_1x+s_1y=r, \tag{4}$$

$$c_2x+s_2y=r. \tag{5}$$

2. Вначале решение задачи (1), (2) ищем в виде одного слагаемого

$$F_1=\sin\alpha x\cdot\sin\beta(y+r).$$

Эта функция при всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию (2) на основании треугольника. Чтобы выполнялось условие (2) на боковой стороне (4), воспользуемся формулой

$$2\sin A\cdot\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B). \tag{6}$$

Тогда получим

$$2F_1=\cos\left[\alpha\frac{r-s_1y}{c_1}-\beta(y+r)\right]-\cos\left[\alpha\frac{r-s_1y}{c_1}+\beta(y+r)\right].$$

Для обращения в нуль F_1 при всех $y\in\mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\alpha\frac{r-s_1y}{c_1}-\beta(y+r)=\alpha\frac{r-s_1y}{c_1}+\beta(y+r).$$

Отсюда следует $\beta = 0$. В этом случае F_1 не является с.ф., так как $F_1 \equiv 0 \ \forall \ y, x$. Аналогичный вывод следует при использовании стороны (5).

3. Далее решение задачи (1), (2) находим в виде двух слагаемых:

$$F_2 = \sum_{i=1}^{2} \sin \alpha_i x \cdot \sin \beta_i \, (y+r).$$

Снова используем (6) и боковую сторону (4) треугольника. Тогда получим

$$2F_2 = \sum_{i=1}^{2} \left(\cos \left[\alpha_i \frac{r - s_1 y}{c_1} - \beta_i (y+r) \right] - \cos \left[\alpha_i \frac{r - s_1 y}{c_1} + \beta_i (y+r) \right] \right) =$$

$$= \cos A_1 - \cos B_2 + \cos A_2 - \cos B_1 =$$

$$= 2 \sin \frac{A_1 + B_2}{2} \sin \frac{B_2 - A_1}{2} + 2 \sin \frac{A_2 + B_1}{2} \sin \frac{B_1 - A_2}{2}.$$

Здесь

$$A_i = \alpha_i \frac{r - s_1 y}{c_1} - \beta_i (y+r), \ B_i = \alpha_i \frac{r - s_1 y}{c_1} + \beta_i (y+r),$$

$$A_1 + B_2 = \left[\beta_2 - \beta_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{s_1}{c_1} \right] y + \left[\beta_2 - \beta_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{c_1} \right] r,$$

$$A_2 + B_1 = \left[\beta_1 - \beta_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{s_1}{c_1} \right] y + \left[\beta_1 - \beta_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{c_1} \right] r.$$

При обращении в нуль F_2 для всех y требуем условия

$$\beta_2 - \beta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{s_1}{c_1}, \ \beta_1 - \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{s_1}{c_1}.$$

Отсюда следует $\beta_1 = \beta_2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$. Поэтому F_2 не является с.ф., поскольку $F_2 \equiv 0$ при всех y, x. Аналогичный вывод будет при использовании боковой стороны (5).

4. Наконец, решение задачи (1), (2) ищем в виде трех слагаемых

$$F_3 = \sum_{i=1}^{3} \sin \alpha_i x \cdot \sin \beta_i \, (y+r).$$

Для определения α_i, β_i снова используем (6) и стороны, лежащие на прямых (4) и (5). Из (4) следует

$$2F_3 = \sum_{i=1}^{3} 2 \sin \frac{\alpha_i (r - s_1 y)}{c_1} \sin (\beta_i \, (y+r)) = \sum_{i=1}^{3} (\cos A_i - \cos B_i) =$$

$$= \cos A_1 - \cos B_3 + \cos A_2 - \cos B_1 + \cos A_3 - \cos B_2,$$

где $A_i = \alpha_i \dfrac{r - s_1 y}{c_1} - \beta_i \, (y+r)$, $B_i = \alpha_i \dfrac{r - s_1 y}{c_1} + \beta_i \, (y+r)$.

Используем формулу

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}. \tag{7}$$

Имеем

$$A_1 + B_3 = \left[\beta_3 - \beta_1 - (\alpha_3 + \alpha_1) \frac{s_1}{c_1} \right] y + \left[\beta_3 - \beta_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{c_1} \right] r.$$

Чтобы $\sin\dfrac{A_1+B_3}{2}=0\ \forall y$, потребуем выполнение условия

$$\beta_3-\beta_1=(\alpha_1+\alpha_3)\frac{s_1}{c_1}. \tag{8}$$

Тогда

$$\frac{A_1+B_3}{2}=\left[\beta_3-\beta_1+\frac{\alpha_1+\alpha_3}{c_1}\right]\frac{r}{2}=\pi l_1. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует

$$\alpha_1+\alpha_3=\frac{\pi}{r}\frac{2c_1}{1+s_1}l_1,\ \beta_1-\beta_3=\frac{\pi}{r}\frac{2s_1}{1+s_1}l_1. \tag{10}$$

Аналогично для A_2, B_1 и A_3, B_2 соответственно получим

$$\alpha_2+\alpha_1=\frac{\pi}{r}\frac{2c_1}{1+s_1}l_2,\ \beta_1-\beta_2=\frac{\pi}{r}\frac{2s_1}{1+s_1}l_2, \tag{11}$$

$$\alpha_3+\alpha_2=\frac{\pi}{r}\frac{2c_1}{1+s_1}l_3,\ \beta_2-\beta_3=\frac{\pi}{r}\frac{2s_1}{1+s_1}l_3. \tag{12}$$

Из (10)–(12) следует

$$\sum_{i=1}^{3}l_i=0,\ \sum_{i=1}^{3}\alpha_i=0,\ l_i\in\mathbb{Z},\ l_i\neq 0.$$

Из (5) вытекает

$$2F_3=\sum_{i=1}^{3}2\sin\alpha_\iota x\cdot\sin\left(\beta_i\left(\frac{r-c_2y}{s_2}+r\right)\right)=\sum_{i=1}^{3}(\cos\widetilde{A}_i-\cos\widetilde{B}_i),$$

где $\widetilde{A}_i=\alpha_i x-\beta_i\left(\dfrac{r-c_2x}{s_2}+r\right)$, $\widetilde{B}_i=\alpha_i x+\beta_i\left(\dfrac{r-c_2x}{s_2}+r\right)$.

Используем второй множитель в (7) для $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{B}_i$:

$$\widetilde{B}_3-\widetilde{A}_1=\left[\alpha_3-\alpha_1-(\beta_3+\beta_1)\frac{c_2}{s_2}\right]x+(\beta_3+\beta_1)\frac{1+s_2}{s_2}r.$$

Чтобы $\sin\dfrac{\widetilde{B}_3-\widetilde{A}_1}{2}=0\ \forall x$, необходимо выполнение условия

$$\alpha_3-\alpha_1=(\beta_3+\beta_1)\frac{c_2}{s_2}. \tag{13}$$

Тогда

$$\frac{\widetilde{B}_3-\widetilde{A}_1}{2}=(\beta_3+\beta_1)\frac{1+s_2}{s_2}\frac{r}{2}=\pi m_1. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует

$$\alpha_3-\alpha_1=\frac{\pi}{r}\frac{2c_2}{1+s_2}m_1,\ \beta_3+\beta_1=\frac{\pi}{r}\frac{2s_2}{1+s_2}m_1. \tag{15}$$

Аналогично для $\widetilde{A}_2, \widetilde{B}_1$ и $\widetilde{A}_3, \widetilde{B}_2$ соответственно получим

$$\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi}{r}\frac{2c_2}{1+s_2}m_2,\ \beta_1+\beta_2=\frac{\pi}{r}\frac{2s_2}{1+s_2}m_2, \tag{16}$$

$$\alpha_2-\alpha_3=\frac{\pi}{r}\frac{2c_2}{1+s_2}m_3,\ \beta_2+\beta_3=\frac{\pi}{r}\frac{2s_2}{1+s_2}m_3. \tag{17}$$

Из (15)–(17) следует

$$\sum_{i=1}^{3}m_i=0,\ \sum_{i=1}^{3}\beta_i=0,\ m_i\in\mathbb{Z},\ m_i\neq 0.$$

Решая совместно системы (10)–(12) и (15)–(17), получаем

$$\alpha_i = \frac{\pi}{r}\left(\frac{c_1}{1+s_1} l_i + \frac{c_2}{1+s_2} m_i\right), \ \beta_i = \frac{\pi}{r}\left(\frac{s_1}{1+s_1} l_i + \frac{s_2}{1+s_2} m_i\right). \quad (18)$$

В результате имеем множество с.ф. и с.ч.

$$F_{lm} = \sum_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{\pi}{r}\left(\frac{c_1}{1+s_1} l_i + \frac{c_2}{1+s_2} m_i\right)x\right) \sin\left(\frac{\pi}{r}\left(\frac{s_1}{1+s_1} l_i + \frac{s_2}{1+s_2} m_i\right)(y+r)\right), \quad (18^*)$$

$$\lambda_{lm} = \left(\frac{\pi}{r}\right)^2 \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{l_i}{1+s_1}\right)^2 + 2\frac{c_1 c_2 + s_1 s_2}{(1+s_1)(1+s_2)} l_i m_i + \left(\frac{m_i}{1+s_2}\right)^2\right], \quad (19)$$

где $\sum_{i=1}^{3} m_i = 0, \ \sum_{i=1}^{3} l_i = 0, \ m_i, l_i \in \mathbb{Z},$

$$\left(\frac{c_1}{1+s_1} l_i + \frac{c_2}{1+s_2} m_i\right)\left(\frac{s_1}{1+s_1} l_i + \frac{s_2}{1+s_2} m_i\right) \neq 0, \ i = 1, 2, 3.$$

5. Если треугольник равносторонний, то

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ s_1 = s_2 = \frac{1}{2}.$$

В этом случае с.ф. и с.ч. имеют вид

$$\widetilde{F}_{lm} = \sum_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{\pi}{r}\frac{l_i - m_i}{\sqrt{3}} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{r}\frac{l_i + m_i}{3}(y+r)\right),$$

$$\widetilde{\lambda}_{lm} = \left(\frac{2}{3}\frac{\pi}{r}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} (l_i^2 - l_i m_i + m_i^2), \quad (20)$$

где $\sum_{i=1}^{3} m_i = 0, \ \sum_{i=1}^{3} l_i = 0, \ m_i, l_i \in \mathbb{Z}, \ l_i^2 \neq m_i^2, \ m_i l_i \neq 0, \ i = 1, 2, 3.$

6. Если треугольник прямоугольный, то выражение для с.ф. и с.ч. будет более простым, если гипотенуза лежит на прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b — длины катетов. Решение ищем в виде $\sum_{i=1}^{3} \sin \alpha_i x \cdot \sin \beta_i y$. Оно обращается в нуль на катетах $\forall \alpha, \beta$. Проведя преобразования с требованием зануления на гипотенузе, получим с.ф. и с.ч. в виде

$$F_{lm}^* = \sum_{i=1}^{3} \sin\left(\frac{\pi}{a}(l_i - m_i)x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}(l_i + m_i)y\right),$$

$$\lambda_{lm}^* = \pi^2 \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{(l_i - m_i)^2}{a^2} + \frac{(l_i + m_i)^2}{b^2}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{3} m_i = 0, \ \sum_{i=1}^{3} l_i = 0, \ m_i, l_i \in \mathbb{Z}, \ l_i^2 \neq m_i^2, \ i = 1, 2, 3.$$

7. Рассмотрим треугольник в другой системе координат. Основание треугольника лежит на оси Ox. Длина основания d. Высота опущена на основание и лежит на оси Oy. Длина высоты h. Начало координат делит основание на части с длиной d_1 и длиной d_2. Обозначим вершины треугольника, прилегающие к частям, соответственно T_1 и T_2, а углы в вершинах — соответственно θ_1 и θ_2. Вершину, из которой опущена высота, обозначим T_3. Уравнения прямых, на которых лежат боковые стороны T_2T_3 и T_3T_1, имеют соответственно вид

$$\frac{y}{h} + \frac{x}{d_2} = 1, \ \frac{y}{h} - \frac{x}{d_1} = 1.$$

Решение задачи (1), (2) представим в виде трех слагаемых:

$$F(x, y)=\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i x\cdot\sin\beta_i y.$$

Оно удовлетворяет условию Дирихле на основании треугольника. На сторонах T_3T_1 и T_2T_3 соответственно выполняются условия Дирихле

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i d_1\left(\frac{y}{h}-1\right)\cdot\sin\beta_i y=0, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i d_2\left(1-\frac{y}{h}\right)\cdot\sin\beta_i y=0. \tag{22}$$

Используя (6) и (7) для (21), получаем

$$\sum_{i=1}^{3}(\cos(\alpha_i x-\beta_i y)-\cos(\alpha_i x+\beta_i y))=\cos(\alpha_1 x-\beta_1 y)-\cos(\alpha_3 x+\beta_3 y)+$$

$$+\cos(\alpha_2 x-\beta_2 y)-\cos(\alpha_1 x+\beta_1 y)+\cos(\alpha_3 x-\beta_3 y)-\cos(\alpha_2 x+\beta_2 y)=$$

$$=\sin\frac{(\alpha_1+\alpha_3)d_1\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_3-\beta_1)y}{2}\sin\frac{(\alpha_3-\alpha_1)d_1\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_3+\beta_1)y}{2}+$$

$$+\sin\frac{(\alpha_2+\alpha_1)d_1\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_1-\beta_2)y}{2}\sin\frac{(\alpha_1-\alpha_2)d_1\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_1+\beta_2)y}{2}+$$

$$+\sin\frac{(\alpha_3+\alpha_2)d_1\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_2-\beta_3)y}{2}\sin\frac{(\alpha_2-\alpha_3)d_1\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_2+\beta_3)y}{2}=0.$$

Для обращения в нуль при $\forall\ y\in[0, h]$ первых множителей во всех слагаемых потребуем условия

$$\begin{aligned}&(\alpha_1+\alpha_3)\frac{d_1}{h}+\beta_3-\beta_1=0,\\ &(\alpha_2+\alpha_1)\frac{d_1}{h}+\beta_1-\beta_2=0,\\ &(\alpha_3+\alpha_1)\frac{d_1}{h}+\beta_2-\beta_3=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Тогда из первых множителей следует

$$-(\alpha_1+\alpha_3)d_1=2\pi l_2,\ -(\alpha_2+\alpha_1)d_1=2\pi l_3,\ -(\alpha_3+\alpha_2)d_1=2\pi l_1,$$
$$l_i\in\mathbb{Z},\ l_i\neq 0. \tag{24}$$

Из (23) и (24) имеем

$$\beta_3-\beta_1=\frac{2}{h}\pi l_2,\ \beta_1-\beta_2=\frac{2}{h}\pi l_3,\ \beta_2-\beta_3=\frac{2}{h}\pi l_1. \tag{25}$$

Используя (6) и (7) для (22), получаем

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\left(\alpha_i d_2\left(1-\frac{y}{h}\right)\right)\sin(\beta_i y)=$$

$$=\sin\frac{(\alpha_1+\alpha_3)d_2\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_3-\beta_1)y}{2}\sin\frac{(\alpha_3-\alpha_1)d_2\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_3+\beta_1)y}{2}+$$

$$+\sin\frac{(\alpha_2+\alpha_1)d_2\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_1-\beta_2)y}{2}\sin\frac{(\alpha_1-\alpha_2)d_2\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_1+\beta_2)y}{2}+$$

$$+\sin\frac{(\alpha_3+\alpha_2)d_2\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_2-\beta_3)y}{2}\sin\frac{(\alpha_2-\alpha_3)d_2\left(\frac{y}{h}-1\right)+(\beta_2+\beta_3)y}{2}=0.$$

Для обращения в нуль $\forall\, y\in[0,h]$ вторых множителей во всех слагаемых потребуем условия

$$\begin{aligned}&\beta_3+\beta_1-(\alpha_3-\alpha_1)\frac{d_2}{h}=0,\\ &\beta_1+\beta_2-(\alpha_1-\alpha_2)\frac{d_2}{h}=0,\\ &\beta_2+\beta_3-(\alpha_2-\alpha_3)\frac{d_2}{h}=0.\end{aligned}\tag{26}$$

Тогда из вторых множителей следует

$$(\alpha_3-\alpha_1)d_2=2\pi m_2,\ (\alpha_1-\alpha_2)d_2=2\pi m_3,\ (\alpha_2-\alpha_3)d_2=2\pi m_1,$$
$$m_i\in\mathbb{Z},\ m_i\neq 0.\tag{27}$$

Из (26) и (27) имеем

$$\beta_3+\beta_1=\frac{2}{h}\pi m_2,\ \beta_1+\beta_2=\frac{2}{h}\pi m_3,\ \beta_2+\beta_3=\frac{2}{h}\pi m_1.\tag{28}$$

Решая системы (24) и (27), а также (25) и 28, соответственно находим

$$\begin{aligned}&\alpha_3=\pi\left(\frac{m_3}{d_2}-\frac{l_3}{d_1}\right),\ \alpha_2=\pi\left(\frac{m_2}{d_2}-\frac{l_2}{d_1}\right),\ \alpha_1=\pi\left(\frac{m_1}{d_2}-\frac{l_1}{d_1}\right),\\ &\beta_3=\frac{\pi}{h}(m_3+l_3),\ \beta_2=\frac{\pi}{h}(m_2+l_2),\ \beta_1=\frac{\pi}{h}(m_1+l_1).\end{aligned}\tag{29}$$

Суммируя (23) и (26), а также (25) и (28), получаем ограничения на целые числа:

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=0,\ \sum_{i=1}^{3}l_i=0,\ \sum_{i=1}^{3}\beta_i=0,\ \sum_{i=1}^{3}m_i=0,\ m_i l_i\neq 0.\tag{30}$$

Таким образом, с.ф. имеют вид

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sin\left(\pi\left(\frac{m_i}{d_2}-\frac{l_i}{d_1}\right)x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}(m_i+l_i)\right),\tag{31}$$

а с.ч. определяются формулой

$$\lambda_{ml}=\pi^2\sum_{i=1}^{3}\left(\left(\frac{m_i}{d_2}-\frac{l_i}{d_1}\right)^2+\left(\frac{m_i+l_i}{h}\right)^2\right).\tag{32}$$

Чтобы исключить нулевые решения задачи (1), (2), необходимы условия

$$\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{m_i}{d_2}-\frac{l_i}{d_1}\right)(m_i+l_i)\neq 0.\tag{33}$$

В результате выбор целых чисел m_i, l_i ограничен условиями (30) и (33). Заметим, что формулы (18) и (29) совпадают, так как

$$r=(h-r)\sin\varphi_i,\ d_i=h\,\mathrm{tg}\,\varphi_i,\ i=1,2.$$

Если треугольник равносторонний с длиной стороны, равной d, то

$$d_1 = d_2 = \frac{d}{2}, \; h = \frac{\sqrt{3}}{2} d.$$

В этом случае все с.ч. имеют вид

$$\lambda_{ml} = \frac{1}{3}\left(\frac{4\pi}{d}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} (m_i^2 - m_i l_i + l_i^2), \; m_i^2 \neq l_i^2, \; m_i l_i \neq 0, \; m_i, l_i \notin \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Эта формула совпадает с (20), так как $r^2 = d^2/12$.

Следовательно, разные системы координат приводят к одинаковым результатам и подтверждают правильность собственных решений.

8. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda F = 0, \; (x, y) \in \Omega; \\ F = 0, \; (x, y) \in \Gamma_1; \\ \frac{\partial F}{\partial n} = 0, \; (x, y) \in \Gamma_2. \end{gathered} \tag{35}$$

Здесь Ω — произвольный треугольник, Γ_1 — основание T_1T_2 треугольника, Γ_2 — боковые стороны T_2T_3 и T_3T_1 треугольника. Решение снова ищем в виде

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \sin \alpha_i x \cdot \sin \beta_i y. \tag{36}$$

Так как дифференциальная форма условия Неймана приводит к нелинейной системе уравнений относительно α_i, β_i, то используем интегральную форму.

Условие для стороны T_2T_3 запишем в виде

$$\int_{T_2T_3} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} \int_0^{c_2} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} \int_0^{h} \frac{\partial F}{\partial y} dy =$$

$$= \operatorname{tg}\theta_2 \sum_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i d_2) \cdot \sin(\beta_i y) + \operatorname{ctg}\theta_2 \sum_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i x) \cdot \sin(\beta_i h) = 0.$$

Это соотношение должно удовлетворять условию Дирихле в точке $x = d_2$, $y = 0$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i d_2) \cdot \sin(\beta_i y) = 0. \tag{36*}$$

Аналогично условие для стороны T_3T_1 имеет вид

$$\int_{T_3T_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \operatorname{tg}\theta_1 \sum_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i d_1) \cdot \sin(\beta_i y) + \operatorname{ctg}\theta_1 \sum_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i x) \cdot \sin(\beta_i h) = 0.$$

Условие Дирихле в точке $x = -d_1$, $y = 0$ дает

$$\sum_{i=1}^{3} \sin(\alpha_i d_1) \cdot \sin(\beta_i y) = 0. \tag{37}$$

Используя (6) для (36*) и (37), получаем

$$\begin{gathered} \cos(\alpha_1 d_2 - \beta_1 h) - \cos(\alpha_3 d_1 - \beta_3 h) + \cos(\alpha_2 d_2 - \beta_2 h) - \cos(\alpha_1 d_1 - \beta_1 h) + \\ + \cos(\alpha_3 d_2 - \beta_3 h) - \cos(\alpha_2 d_1 - \beta_2 h) + \cos(\alpha_3 d_1 - \beta_3 h) - \cos(\alpha_1 d_2 - \beta_1 h) + \\ + \cos(\alpha_1 d_1 - \beta_1 h) - \cos(\alpha_2 d_2 - \beta_2 h) + \cos(\alpha_2 d_1 - \beta_2 h) - \cos(\alpha_3 d_2 - \beta_3 h) = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Используя (7) в (38), находим

$$\sin\frac{\alpha_1 d_2+\alpha_3 d_1+(\beta_3-\beta_1)h}{2}\sin\frac{\alpha_3 d_1-\alpha_1 d_2+(\beta_3+\beta_1)h}{2}+$$
$$+\sin\frac{\alpha_2 d_2+\alpha_1 d_1+(\beta_1-\beta_2)h}{2}\sin\frac{\alpha_1 d_1-\alpha_2 d_2+(\beta_1+\beta_2)h}{2}+$$
$$+\sin\frac{\alpha_3 d_2+\alpha_2 d_1+(\beta_2-\beta_3)h}{2}\sin\frac{\alpha_2 d_1-\alpha_3 d_2+(\beta_2+\beta_3)h}{2}+ \tag{39}$$
$$+\sin\frac{\alpha_3 d_1+\alpha_1 d_2+(\beta_1-\beta_3)h}{2}\sin\frac{\alpha_1 d_2-\alpha_3 d_1+(\beta_1+\beta_3)h}{2}+$$
$$+\sin\frac{\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2+(\beta_2-\beta_1)h}{2}\sin\frac{\alpha_2 d_2-\alpha_1 d_1+(\beta_2+\beta_2)h}{2}+$$
$$+\sin\frac{\alpha_2 d_1+\alpha_3 d_2+(\beta_3-\beta_2)h}{2}\sin\frac{\alpha_3 d_2-\alpha_2 d_1+(\beta_3+\beta_2)h}{2}=0.$$

Для обращения (39) в нуль используем первые множители в первых трех слагаемых и вторые множители в следующих трех слагаемых. Для этого потребуем соответственно выполнения соотношений

$$\alpha_1 d_2+\alpha_3 d_1+(\beta_3-\beta_1)h=2\pi l_2, \tag{40}$$

$$\alpha_2 d_2+\alpha_1 d_1+(\beta_1-\beta_2)h=2\pi l_3, \tag{41}$$

$$\alpha_3 d_2+\alpha_2 d_1+(\beta_2-\beta_3)h=2\pi l_1,\ 0< l_i\in\mathbb{Z}, \tag{42}$$

$$\alpha_1 d_2-\alpha_3 d_1+(\beta_1+\beta_3)h=2\pi m_2, \tag{43}$$

$$\alpha_2 d_2-\alpha_1 d_1+(\beta_2+\beta_1)h=2\pi m_3, \tag{44}$$

$$\alpha_3 d_2-\alpha_2 d_1+(\beta_3+\beta_2)h=2\pi m_1,\ 0< m_i\in\mathbb{Z}. \tag{45}$$

Суммируя (40)–(42), получаем

$$(d_2+d_1)\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=2\pi\sum_{i=1}^{3}l_i. \tag{46}$$

После сложения (43)–(45) имеем

$$(d_2-d_1)\sum_{i=1}^{3}\alpha_i+2h\sum_{i=1}^{3}\beta_i=2\pi\sum_{i=1}^{3}m_i. \tag{47}$$

Суммы (40) и (43); (41) и (44); (42) и (45) соответственно дают

$$\alpha_1 d_2+\beta_3 h=\pi(l_2+m_2), \tag{48}$$

$$\alpha_2 d_2+\beta_1 h=\pi(l_3+m_3), \tag{49}$$

$$\alpha_3 d_2+\beta_2 h=\pi(l_1+m_1). \tag{50}$$

Разности (42) и (45); (40) и (43); (41) и (44) соответственно дают

$$\alpha_2 d_1-\beta_3 h=\pi(l_1-m_1), \tag{51}$$

$$\alpha_3 d_1-\beta_1 h=\pi(l_2-m_2), \tag{52}$$

$$\alpha_1 d_1-\beta_2 h=\pi(l_3-m_3). \tag{53}$$

Суммы (49) и (52); (50) и (53); (48) и (51) соответственно приводят к следующей системе относительно α_i с определителем $\Delta = d_1^3 + d_2^3$:

$$\begin{aligned} 0\cdot\alpha_1 + d_2\alpha_2 + d_1\alpha_3 &= f_1, \\ d_1\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + d_2\alpha_3 &= f_2, \\ d_2\alpha_1 + d_1\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{54}$$

Здесь $f_1 = \pi(l_3 + m_3 + l_2 - m_2)$, $f_2 = \pi(l_1 + m_1 + l_3 - m_3)$, $f_3 = \pi(l_2 + m_2 + l_1 - m_1)$.

Введем обозначения

$$d_1^2 + d_2^2 = \gamma_1,\ d_2^2 - d_1 d_2 = \gamma_2,\ d_1^2 - d_1 d_2 = \gamma_3,$$

$$d_1^2 - d_2^2 = \delta_1,\ d_2^2 + d_1 d_2 = \delta_2,\ -(d_1^2 + d_1 d_2) = \delta_3.$$

В результате решения системы (54) имеем

$$\begin{aligned} \Delta\cdot\alpha_1 &= -d_1 d_2 f_1 + d_1^2 f_2 + d_2^2 f_3 = \pi(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \delta_1 m_1 + \delta_2 m_2 + \delta_3 m_3), \\ \Delta\cdot\alpha_2 &= d_2^2 f_1 - d_1 d_2 f_2 + d_1^2 f_3 = \pi(\gamma_3 l_1 + \gamma_1 l_2 + \gamma_2 l_3 + \delta_3 m_1 + \delta_1 m_2 + \delta_2 m_3), \\ \Delta\cdot\alpha_3 &= d_1^2 f_1 + d_2^2 f_2 - d_1 d_2 f_3 = \pi(\gamma_2 l_1 + \gamma_3 l_2 + \gamma_1 l_3 + \delta_2 m_1 + \delta_3 m_2 + \delta_1 m_3). \end{aligned} \tag{55}$$

Для контроля после суммирования (55) получим снова (46).

Введем обозначения

$$d_1 d_2^2 - d_1^2 d_2 = \mu_1,\ -(d_2^3 + d_1^2 d_2) = \mu_2,\ d_1^3 + d_1 d_2^2 = \mu_3,$$

$$d_1 d_2^2 + d_1^2 d_2 = \nu_1,\ d_2^3 - d_1^2 d_2 = \nu_2,\ d_1^3 - d_1 d_2^2 = \nu_3.$$

С учетом (55) для α_i из (48)–(50) получим выражения для β_i:

$$\begin{aligned} \Delta\cdot h\beta_1 &= \pi(\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \mu_3 l_3 + \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \nu_3 m_3), \\ \Delta\cdot h\beta_2 &= \pi(\mu_3 l_1 + \mu_1 l_2 + \mu_2 l_3 + \nu_3 m_1 + \nu_1 m_2 + \nu_2 m_3), \\ \Delta\cdot h\beta_3 &= \pi(\mu_2 l_1 + \mu_3 l_2 + \mu_1 l_3 + \nu_2 m_1 + \nu_3 m_2 + \nu_1 m_3). \end{aligned} \tag{56}$$

Для контроля после суммирования (56) имеем

$$\Delta\cdot h\sum_{i=1}^{3}\beta_i = \pi\left[(d_1 - d_2)(d_1^2 - d_1 d_2 + d_2^2)\sum_{i=1}^{3} l_i + \Delta\sum_{i=1}^{3} m_i\right].$$

Используя соотношение (46), снова получим (47).

Если треугольник равнобедренный при $d_1 = d_2 = d/2$, то

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2\pi}{d}(m_2 - m_3 + l_1),\ \beta_1 = \frac{\pi}{h}(l_3 - l_2 + m_1), \\ \alpha_2 &= \frac{2\pi}{d}(m_3 - m_1 + l_2),\ \beta_2 = \frac{\pi}{h}(l_1 - l_3 + m_2), \\ \alpha_3 &= \frac{2\pi}{d}(m_1 - m_2 + l_3),\ \beta_3 = \frac{\pi}{h}(l_2 - l_1 + m_3). \end{aligned} \tag{57}$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i = \frac{2\pi}{d}\sum_{i=1}^{3} l_i,\quad \sum_{i=1}^{3}\beta_i = \frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{3} m_i.$$

Для исключения нулевых решений задач выполняются условия $\alpha_i \beta_i \neq 0$. Поэтому минимальные с.ч. в формулах (57) вычисляются при

$$\alpha_i = \pm \frac{2\pi}{d}, \; \beta_i = \pm \frac{\pi}{h}.$$

Для равнобедренного и равностороннего треугольников соответственно имеем

$$\lambda_{\min} = 3\pi^2 \left(\frac{4}{d^2} + \frac{1}{h^2} \right), \; \lambda_{\min} = \left(\frac{4\pi}{d} \right)^2.$$

Заметим, что если в (39) обращать в нуль вторые множители в первых трех слагаемых, то получим те же формулы для α_i, β_i.

Таким образом, с.ф. задачи (35) имеют вид (36), где α_i и β_i имеют соответственно формулы (55) и (56), а с.ч. вычисляются по формуле

$$\lambda_{lm} = \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i^2 + \beta_i^2).$$

Получены и обоснованы явные аналитические формулы для собственных функций и собственных чисел оператора Лапласа. Эти результаты представляют собой формы и частоты колебаний произвольных треугольных мембран.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pockels F.C.A. Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der matematischen Physik. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Leipzig: B.G. Teubner, 1891. 364 p.
2. McCartin B.J. Eigenstructure of the discrete Laplacian on the equilateral triangle: The Dirichlet and Neumann problems. *Applied Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 4, N 53. P. 2633–2646.

Надійшла до редакції 21.09.2018

В.Г. Приказчиков

ДИСКРЕТНИЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА З РІЗНИМИ УМОВАМИ НА МЕЖІ ДОВІЛЬНОГО ТРИКУТНИКА

Анотація. Знайдено в явному вигляді формули для множин власних функцій та власних значень оператора Лапласа з різними крайовими умовами на сторонах довільного трикутника. Отримано нові результати в спектральній теорії, які становлять практичний інтерес у вивченні частот і форм вібрації трикутних мембран довільної форми.

Ключові слова: спектр, оператор Лапласа, трикутник, крайові умови Діріхле та Неймана.

V.G. Prikazchikov

DISCRETE SPECTRUM OF THE LAPLACE OPERATOR FOR AN ARBITRARY TRIANGLE WITH DIFFERENT BOUNDARY-VALUE CONDITIONS

Abstract. In the paper, we obtain the explicit formulas for a set of eigenvalues and eigenfunctions of the Laplace operator in an arbitrary triangle with different boundary conditions. The paper presents new results in the spectral theory, which are of practical interest in the analysis of the vibrations of triangular membranes.

Keywords: spectrum, Laplace operator, triangle, Dirichlet's and Neumann's boundary conditions.

Приказчиков Виктор Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: viktorprikazchikov@gmail.com.