СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

М.З. ЗГУРОВСКИЙ, П.О. КАСЬЯНОВ, Н.В. ГОРБАНЬ, Л.С. ПАЛИЙЧУК

УДК 517.9

КАЧЕСТВЕННЫЙ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЭНЕРГОБАЛАНСНЫХ КЛИМАТОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Аннотация. Проведен качественный анализ динамики решений климатологической модели энергетического баланса Будыко–Селлерса, рассмотренной на римановом многообразии без края. Доказано глобальное существование слабого решения исследуемой задачи с произвольными начальными данными из фазового пространства, изучены его свойства и регулярность. Доказаны теоремы существования глобального и траекторного аттракторов для многозначного полупотока, порожденного всеми слабыми решениями задачи. Изучены свойства аттракторов, установлена взаимосвязь между ними и пространством полных траекторий задачи. Исследованы характер притяжения решений к глобальному и траекторному аттракторам и структура аттракторов. Установлена конечномерность с точностью до малого параметра динамики решений задачи.

Ключевые слова: климатологическая модель энергетического баланса Будыко–Селлерса, глобальный аттрактор, траекторный аттрактор, конечномерность с точностью до малого параметра, многозначный полупоток, слабое решение, уравнение реакции–диффузии.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование климатологических процессов является актуальной проблемой современной науки. Особый математический интерес представляет исследование климатологической модели энергетического баланса, в которой в качестве неизвестной величины выступает температура земной поверхности. Модели такого типа демонстрируют эффективность обратной связи термического режима и альбедо поверхности. Впервые такая модель предложена в 1969 г. в работах М.И. Будыко [1] и В.Д. Селлерса [2]. На сегодняшний день принято называть энергобалансные модели климата моделями Будыко–Селлерса. Позднее такие математические модели изучались многими учеными. Так, в работах [3–5] рассматривался вопрос о разрешимости математических моделей, изучалась их чувствительность к малым возмущениям в одном из определяющих параметров задачи, а также излагалась соответствующая стационарная задача. Следует отметить работы [6–10], посвященные качественным исследованиям слабых решений задачи. В статье [11] изучен вопрос существования, количества и свойств стационарных решений модели Будыко–Селлерса. В настоящей работе исследуются качественные свойства и установлена конечномерность с точностью до малого параметра динамики решений климатологической модели Будыко–Селлерса, рассматриваемой на многообразии без края.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть (M, g) — C^{∞}-компактное связное ориентированное двумерное риманово многообразие без края. Рассмотрим задачу

$$u_t - \Delta u + \partial f_1(x, u) - \partial f_2(x, u) \ni \bar{0} \text{ в } M \times (\tau, T). \tag{1}$$

Здесь $\Delta u = \operatorname{div}_M (\nabla_M u)$; ∇_M — градиент, заданный на римановом многообразии (M, g); $\partial f_i(x, u)$ — субдифференциал функции $f_i(x, \cdot)$, $i = 1, 2$, в точке u для почти всех (п. в.) $x \in M$ [12]. Таким образом, задача (1) — это автономное параболическое включение реакции–диффузии с функцией взаимодействия субградиентного типа. Следует отметить широкое практическое применение задач типа реакции–диффузии, которые включают в себя систему ФитцХью–Нагумо (теория передачи сигналов), систему уравнений Гинзбурга–Ландау (теория сверхпроводников), систему Лотки–Вольтерры с диффузией (экологические модели), систему Белоусова–Жаботинского (химическая кинетика) и др. [13]. В настоящей статье в качестве применения будет рассмотрена климатологическая модель Будыко–Селлерса.

Введем в рассмотрение действительные гильбертовы пространства $H := L^2(M)$, $V := \{u \in L^2(M) : \nabla_M u \in L^2(TM)\}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_V$ и скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_H$, $(\cdot, \cdot)_V$, где TM — касательное расслаивание. Пространства $L^2(M)$, $L^2(TM)$ определены стандартно [14]. Пусть V^* — дуальное пространство к V. Заметим, что $V \subset H \subset V^*$, причем все вложения компактные и плотные [14, теорема 2.34]. Функция $u(\cdot) \in L^2(\tau, T; V)$ — слабое решение задачи (1) на $[\tau, T]$, $-\infty < \tau < T < +\infty$, если существует такая измеримая функция $d: M \times (\tau, T) \to \mathrm{R}$, что: 1) $d(x, t) \in \partial f_1(x, u(x, t)) - \partial f_2(x, u(x, t))$ для п.в. $(x, t) \in M \times (\tau, T)$; 2) для всех $\xi \in C_0^{\infty}(M \times (\tau, T))$ справедливо равенство

$$-\int_{\tau}^{T} \left\langle u, \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle dt + \int_{\tau}^{T} \int_{M} (\nabla u, \nabla \xi) dx dt + \int_{\tau}^{T} \int_{M} (d, \xi) dx dt = 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание в V [9].

Пусть здесь и далее выполнены следующие условия.

Предположение 1. Существуют такие $c_0 \in L^1(M)$ и $c_0(x) \ge 0$ для п в. $x \in M$ и $c_1 \ge 0$, что $|u_i^*|^2 \le c_0(x) + c_1 |u|^2$ для п. в. $x \in M$, для всех $u \in \mathrm{R}$ и $u_i^* \in \partial f_i(x, u)$, $i = 1, 2$.

Предположение 2. Существует такое $\lambda < \lambda_1$, где λ_1 — первое собственное значение оператора $-\Delta$ в $H^1(M)$, и существует такое $c_2 \in L^1(M)$, $c_2(x) \ge 0$ для п. в. $x \in M$, что $(u_1^* - u_2^*) u \ge -\lambda u^2 - c_2(x)$ для п.в. $x \in M$, для всех $u \in \mathrm{R}$ и $u_i^* \in \partial f_i(x, u)$, $i = 1, 2$.

Цель исследования заключается в изучении вопросов существования, качественных свойств и асимптотического поведения слабых решений задачи (1), в частности получены следующие результаты:

1) доказано существование по крайней мере одного слабого решения задачи (1) с произвольными начальными данными, принадлежащими фазовому пространству H, регулярность и априорные оценки для каждого слабого решения;

2) доказано существование функции типа Ляпунова для задачи (1);

3) изучен вопрос непрерывной зависимости решений от начальных данных;

4) доказано существование глобального и траекторного аттракторов для слабых решений задачи (1) в фазовом и соответственно расширенном фазовом пространствах, иследована их структура, характер сходимости к аттракторам;

5) получена конечномерность динамики решений задачи с точностью до малого параметра ε.

Найденные результаты будут применяться при исследовании климатологической модели энергетического баланса Будыко–Селлерса.

Заметим, что краевая задача с условиями типа Дирихле и Неймана для включения (1) в ограниченной области пространства R^N была исследована в [7, 8]. Включение (1), заданное на римановом многообразии без края (M, g), рассмотрено в работах [9, 10].

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ, ИХ РЕГУЛЯРНОСТЬ, АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Изучим вопросы конструктивного существования, дополнительной гладкости и априорных оценок для всех слабых решений задачи (1).

Замечание 1. Отметим, что выполнение предположения 1 и предположения 2 гарантирует для каждого слабого решения $u(\cdot)$ задачи (1) на $[\tau, T]$ существование таких измеримых функциий $d_1, d_2 \colon M \times (\tau, T) \to \mathrm{R}$, что $d_i(x, t) \in \partial f_i(x, u(x, t))$ для п. в. $(x, t) \in M \times (\tau, T)$, $i = 1, 2$, и $d(x, t) = d_1(x, t) - d_2(x, t)$ для п.в. $(x, t) \in M \times (\tau, T)$ [9, 12]. Заметим, что существование слабого решения задачи Коши для включения (1) с произвольными начальными данными из H было доказано в [15, разд. 2]. Отметим, что каждое слабое решение задачи (1) на $[\tau, T]$ регулярно, т.е. для слабого решения $u(\cdot)$ задачи (1) на $[\tau, T]$ справедливо, что $u(\cdot) \in C([\tau+\varepsilon, T]; V) \cap$ $\cap L^2(\tau+\varepsilon, T; H^2(M) \cap V)$, $u_t(\cdot) \in L^2(\tau+\varepsilon, T; H)$ $\forall \varepsilon \in (0, T-\tau)$ [16].

В [15, с. 56] и [16, с. 274] показано, что для всех $\tau < T$ и для каждого слабого решения $u(\cdot)$ задачи (1) на $[\tau, T]$ при $\varepsilon^* = \lambda_1 - \lambda$, $a = \int\limits_M c_2(x) dx$ справедливо неравенство

$$\| u(t) \|_H^2 \le \| u(s) \|_H^2 \, e^{-2\varepsilon^*(t-s)} + \frac{a}{\varepsilon^*} \quad \forall \tau \le s \le t \le T. \tag{2}$$

Определим на $V \cap H^2(M)$ эквивалентную норму $v \to \| \Delta v \|_H$ [17, разд. III].

Теорема 1. Существует такое $c > 0$, что $\forall \tau < T$ и для каждого слабого решения $u(\cdot)$ задачи (1) на $[\tau, T]$ имеем

$$(t-\tau) \| u(t) \|_V^2 + \int\limits_\tau^t (s-\tau) \| u(s) \|_{H^2(M) \cap V}^2 \, ds \le c (1 + \| u(\tau) \|_H^2 + (t-\tau)^2) \quad \forall t \in (\tau, T].$$

Доказательство теоремы 1 подобно доказательству теоремы 2 в [16] (см. также [7–9]), но при других предположениях относительно функции взаимодействия.

Замечание 2. Из автономности задачи (1) следует, что сдвиг и склейка слабых решений также является решением задачи, что позволяет каждое слабое решение продолжить до глобального, определенного на интервале $[0, +\infty)$ [15, с. 62].

Обозначим K_+ семейство всех слабых решений задачи (1), определенных на интервале $[0, +\infty)$. Пространство K_+ — трансляционно инвариантное, т.е. $u(\cdot + h) \in K_+$ $\forall u(\cdot) \in K_+$ и $h \ge 0$. В пространстве K_+ введем топологию, индуцированную из пространства Фреше $C_{\text{loc}}(\mathrm{R}_+; H)$ [18]. Заметим, что $f_n(\cdot) \to f(\cdot)$ в $C_{\text{loc}}(\mathrm{R}_+; H)$ тогда и только тогда, когда $\forall M > 0$ справедливо $\Pi_{0,M} f_n(\cdot) \to \Pi_{0,M} f(\cdot)$ в $C([0, M]; H)$, где $\Pi_{0,M}$ — оператор сужения на $[0, M]$ [18]. Рассмотрим задачу (1) на всей числовой оси. Пусть $u \in L^\infty(\mathrm{R}; H)$ — полная траектория задачи (1), т.е. $\Pi_+ u_h(\cdot + h) \in K_+$ для всех $h \in \mathrm{R}$, где Π_+ — оператор сужения на $[0, +\infty)$. Пусть K — семейство всех полных траекторий задачи (1). В силу регулярности всех слабых решений и утверждения теоремы 1 получим, что для каждой полной траектории $u(\cdot)$ задачи (1) справедливо, что

$\Pi_{\tau, T} u(\cdot) \in C_{\mathrm{loc}}([\tau, T]; V) \cap L^2(\tau, T; H^2(M) \cap V)$, $\quad \Pi_{\tau, T} u_t(\cdot) \in L^2(\tau, T; H)$ для всех $-\infty < \tau < T < +\infty$, где $\Pi_{\tau, T}$ — оператор сужения на $[\tau, T]$ (см. [19, с. 18]). Более того, $\exists \widetilde{C} > 0$ такое, что $\forall u(\cdot) \in K$ выполняется оценка $\| u(t) \|_V^2 \le$ $\le \widetilde{C}(1 + \| u(t-1) \|_H^2)$ $\forall t \in \mathrm{R}$ [19]. Таким образом, каждая ограниченная в H полная траектория ограничена в V.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИИ ТИПА ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЗАДАЧИ (1)

Перейдем к вопросу о существовании функции типа Ляпунова. Заметим, что этот вопрос был исследован также в работах [16, 20–27]. Полная траектория $u(\cdot) \in K$ стационарна, если существует такой элемент $z \in H^2(M) \cap V$, что $u(t) = z$ $\forall t \in \mathrm{R}$. Элемент z называется точкой покоя. Обозначим Z множество всех точек покоя. Напомним [15], что $E : V \to \mathrm{R}$ является функцией типа Ляпунова для задачи (1) в случае, когда:

а) E непрерывна в V;

б) $E(u(t)) \le E(u(s))$ при $u \in K_+$ и $t \ge s > 0$;

в) если $E(u(\cdot)) \equiv \mathrm{const}$ для некоторого $u \in K$, то u — стационарна.

Пусть $J_i(u) = \int\limits_M f_i(x, u(x)) dx$, $u \in H$, $i = 1, 2$. Из предположения 1 $\exists c_3 \in L^1(M)$, $c_3(x) \ge 0$ для п. в. $x \in M$, $\exists c_4 \ge 0$ такие, что $| f_i(x, u) | \le c_3(x) + c_4 |u|^2$ для п.в. $x \in M$ и $\forall u \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2$. Таким образом, $J_i(u) = \int\limits_M f_i(x, u(x)) dx$, $u \in H$, $i = 1, 2$, определены корректно. Положим

$$E(u) = \frac{1}{2} \int\limits_M | \nabla u(x) |^2 \, dx + J_1(u) - J_2(u), \quad u \in V. \tag{3}$$

Теорема 2. Отображение $E : V \to \mathrm{R}$, заданное соотношением (3), является функцией типа Ляпунова для задачи (1). Более того, $\forall u \in K_+$, $\forall \tau, T$, $0 < \tau < T < \infty$, справедливо

$$E(u(T)) - E(u(\tau)) = -\int\limits_\tau^T \| u_t(s) \|_H^2 \, ds. \tag{4}$$

Доказательство. Функция E непрерывна в V, таким образом п. а) определения функции типа Ляпунова выполнен. Докажем п. б) определения функции типа Ляпунова. Зафиксируем произвольную функцию $u(\cdot) \in K_+$. Для упрощения записи обозначим сужение на отрезок $[\tau, T]$ также через $u(\cdot)$. Заметим, что $u(\cdot) \in C([\tau, T]; V) \cap L^2(\tau, T; H^2(M) \cap V)$ и $u_t(\cdot) \in L^2(\tau, T; H)$ (поскольку $\tau > 0$). Тогда отображение $t \mapsto \| u(t) \|_V^2 = \int\limits_M | \nabla u(x, t) |^2 dx$ абсолютно непрерывно на $[\tau, T]$ и для п. в. $t \in (\tau, T)$ выполняется равенство (см. [18, разд. IV]):

$$\frac{d}{dt} \| u(t) \|_V^2 = -2 \int\limits_M \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Delta u(x, t) \, dx. \tag{5}$$

Пусть $d : M \times (\tau, T) \to \mathrm{R}$ — функция из определения слабого решения задачи (1), а $g_1, g_2 \in L^2(\tau, T; H)$ согласно замечанию 1.

Из [28, лемма 2.1] следует, что $J_i(u(\cdot))$ — абсолютно непрерывны на $[\tau, T]$ и для п. в. $t \in (\tau, T)$ $\forall h_i(\cdot, t) \in \partial J_i(s) |_{s = u(t)}$, $i = 1, 2$, справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} J_i(u(t)) = \int\limits_M h_i(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx. \tag{6}$$

Таким образом, функция $E(u(\cdot))$ — абсолютно непрерывна на $[\tau, T]$ как линейная комбинация абсолютно непрерывных на $[\tau, T]$ функций. Согласно (5) и (6) $\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\| u_t(t) \|_H^2$ для п.в. $t \in (\tau, T)$. Отсюда получаем (4). В частности, $E(u(t)) \le E(u(s))$ при $T \ge t \ge s \ge \tau > 0$. Поскольку $u(\cdot) \in K_+$ и $0 < \tau < T < \infty$ — произвольные, то п. б) определения функции типа Ляпунова и энергетическое равенство (4) выполнены. Заметим также, что если $E(u(\cdot)) \equiv \mathrm{const}$ для некоторого $u \in K$, то согласно равенству (4) u — стационарная траектория.

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для произвольных начальных данных $u_\tau \in H$ положим, что

$$D_{\tau,T}(u_\tau) = \{u(\cdot) \in L^2(\tau, T; V) \mid u(\cdot) \text{ — слабое решение задачи (1) и } u(\tau) = u_\tau\}.$$

Теорема 3. Пусть $\tau < T$, $u_{\tau,n} \to u_\tau$ слабо сходится в H, $u_n(\cdot) \in D_{\tau,T}(u_{\tau,n})$, $n \ge 1$. Тогда существуют такие последовательность $\{n_k\}_{k \ge 1}$ и элемент $u(\cdot) \in D_{\tau,T}(u_\tau)$, что $\forall \varepsilon \in (0, T-\tau)$

$$\sup_{t \in [\tau+\varepsilon, T]} \| u_{n_k}(t) - u(t) \|_V \to 0, \ k \to \infty, \tag{7}$$

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T} \| u_{n_k,t}(t) - u_t(t) \|_H^2 \, dt \to 0, \ k \to \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Из теоремы 2 настоящей статьи, работы [16, теорема 3], теоремы Банаха–Алаоглу [18] диагональным методом Кантора получаем следующее: существуют последовательность $\{n_k\}_{k \ge 1}$ и элемент $u(\cdot) \in D_{\tau,T}(u_\tau)$ такие, что сужения $u_{n_k}(\cdot)$ и $u(\cdot)$ на отрезок $[\tau+\varepsilon, T]$ принадлежат $C([\tau+\varepsilon, T]; V) \cap L^2(\tau+\varepsilon, T; H^2(M) \cap V)$ и $u_{n_k,t}(\cdot)$, $u_t(\cdot) \in L^2(\tau+\varepsilon, T; H)$, а также справедливы слабые сходимости

$$\begin{gathered} u_{n_k}(\cdot) \to u(\cdot) \text{ в } L^2(\tau+\varepsilon, T; H^2(M) \cap V), \\ u_{n_k}(\cdot) \to u(\cdot) \text{ в } C([\tau+\varepsilon, T]; V), \\ u_{n_k,t}(\cdot) \to u_t(\cdot) \text{ в } L^2(\tau+\varepsilon, T; H) \end{gathered} \tag{9}$$

при $k \to \infty$ для всех $\varepsilon \in (0, T-\tau)$, откуда следует утверждение (7).

Докажем сходимость (8). Из теоремы 2 следуют энергетические неравенства

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T} \| u_t(t) \|_H^2 \, dt = E(u(\tau+\varepsilon)) - E(u(T)), \tag{10}$$

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T} \| u_{n_k,t}(t) \|_H^2 \, dt = E(u_{n_k}(\tau+\varepsilon)) - E(u_{n_k}(T)), \tag{11}$$

$k \ge 1$, $\varepsilon \in (0, T-\tau)$. В силу непрерывности E в пространстве V и сходимости (7) получаем

$$E(u_{n_k}(\tau+\varepsilon)) - E(u_{n_k}(T)) \to E(u(\tau+\varepsilon)) - E(u(T)), \ m \to \infty. \tag{12}$$

Таким образом, из формул (10)–(12) следует, что $\forall \varepsilon \in (0, T-\tau)$

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T} \| u_{n_k,t}(t) \|_H^2 \, dt \to \int_{\tau+\varepsilon}^{T} \| u_t(t) \|_H^2 \, dt, \ k \to \infty. \tag{13}$$

Так как $L^2(\tau+\varepsilon; T)$ — гильбертово пространство, из (9) и (13) вытекает (8).

Рассмотрим $W(M_1, M_2) = \{u(\cdot) \in C([M_1, M_2]; V) : u_t(\cdot) \in L^2(M_1, M_2; H)\}$ — действительное банахово пространство с нормой $\| u(\cdot) \|_{W(M_1,M_2)} = \| u(\cdot) \|_{C([M_1,M_2];V)} + \| u_t(\cdot) \|_{L^2(M_1,M_2;H)}$, $M_1, M_2 \in \mathrm{R}$, $M_1 < M_2$. Существование функции типа Ляпунова позволяет получить также сходимости в сильной топологии пространства $W(\tau+\varepsilon, T)$ для всех слабых решений задачи (1) на $[\tau, T]$, что было доказано в [8] для задачи (1), рассмотренной в ограниченной области пространства R^N.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА ГЛОБАЛЬНОГО И ТРАЕКТОРНОГО АТТРАКТОРОВ

Определим многозначное отображение $G : \mathrm{R}_+ \times H \to 2^H \setminus \varnothing$ следующим образом:

$$G(t, u_0) = \{u(t) \mid u(\cdot) \in K_+,\ u(0) = u_0\}.$$

Теорема 4. Многозначное отображение G есть строгий многозначный полупоток [15, определение 1.1, с. 5], обладающий свойством асимптотической компактности [29, с. 35].

Доказательство повторяет рассуждения работы [15, лемма 2.7, с. 55]. Кроме того, асимптотическая компактность многозначного полупотока G была получена в [16] для случая параболического включения (1) в ограниченной области пространства R^N. Компактность и плотность вложений $V \subset H \subset V^*$ позволяет доказать асимптотическую компактность полупотока G, следуя аналогичным суждениям.

Пусть $\{T(h)\}_{h \ge 0}$ — трансляционная полугруппа на K_+, т.е. $T(h)u(\cdot) = u(\cdot + h)$, $h \ge 0$, $u(\cdot) \in K_+$. Обозначим $\operatorname{dist}_X(C, D) = \sup\limits_{c \in C} \inf\limits_{d \in D} \| c - d \|_X$ полуметрику Хаусдорфа между непустыми подмножествами C и D произвольного банахового пространства X [15, с. 5].

Теорема 5. Справедливы следующие утверждения:

• для строгого многозначного полупотока G существует в фазовом пространстве H инвариантный глобальный аттрактор A [15];

• существует траекторный аттрактор $\mathrm{U} \subset K_+$ [19] в пространстве K_+;

• справедливо соотношение $\mathrm{U} = \Pi_+ K = \{u(\cdot) \in K_+ \mid u(t) \in \mathrm{A}\ \forall t \in \mathrm{R}_+\} = \{u(\cdot) \in K_+ \mid u(0) \in \mathrm{A}\}$;

• A — компактное подмножество пространства V;

• для каждого непустого ограниченного подмножества $C \subset H$ имеем $\operatorname{dist}_V(G(t, C), \mathrm{A}) \to 0$, $t \to \infty$;

• U — ограниченное подмножество пространства $L^\infty(\mathrm{R}_+; V)$ и $\Pi_{0,M}\mathrm{U}$ — компакт в $W(0, M)$ для каждого $M > 0$;

• для любого ограниченного в $L^\infty(\mathrm{R}_+; H)$ множества $C \subset K_+$ и любого $M \ge 0$ имеет место сходимость $\operatorname{dist}_{W(0,M)}(\Pi_{0,M} T(t)C, \Pi_{0,M}\mathrm{U}) \to 0$, $t \to +\infty$;

• K — ограниченное подмножество $L^\infty(\mathrm{R}; V)$;

• для каждого $u \in K$ граничные множества

$$\alpha(u) = \{z \in V \mid u(t_j) \to z \text{ в } V \text{ для некоторой последовательности } t_j \to -\infty\},$$

$$\omega(u) = \{z \in V \mid u(t_j) \to z \text{ в } V \text{ для некоторой последовательности } t_j \to +\infty\}$$

являются связными подмножествами множества Z. Если Z полностью несвязно (в частности, Z — счетное множество), то в пространстве V пределы $z_- = \lim\limits_{t \to -\infty} u(t)$, $z_+ = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$ существуют и z_-, z_+ — точки покоя; более того, решение $u(t)$ стремится в пространстве V к точке покоя при $t \to +\infty$ для каждого $u \in K_+$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 1, 2, 3 и работы [7, теорема 3.5]. Кроме того, последнее утверждение вытекает из теоремы 1 и работы [28, теорема 2.7].

КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ ДИНАМИКИ РЕШЕНИЙ С ТОЧНОСТЬЮ ДО МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Пусть X — банахово пространство. Мера некомпактности Куратовского $k(C)$ для ограниченного в X множества C определяется как $k(C) = \inf\,\{\delta > 0 : C$ имеет конечное открытое покрытие множеств диаметром $< \delta\}$ [25].

Многозначный полупоток $G : \mathrm{R}^+ \times X \to \mathrm{B}(X)$ является ω-гранично компактным, если для каждого ограниченного множества $C \subset X$ имеет место $k\left(\bigcup\limits_{t \geq \tau} G(t, C)\right) \to 0,\ \tau \to \infty$ [25]. Для доказательства конечномерности с точностью до малого параметра динамики решений задачи необходимы две вспомагательные леммы.

Лемма 1. Если многозначный полупоток G в полном метрическом пространстве X — асимптотически компактный, то он является ω-гранично компактным [25, лемма 2.4].

Лемма 2. Пусть G — многозначный полупоток в равномерно выпуклом банаховом пространстве X. Если G — ω-гранично компактный полупоток, то для каждого ограниченного множества $C \subset X$ и $\forall \varepsilon > 0$ существуют $t_0(C, \varepsilon)$ и конечномерное подпространство E в X такие, что для некоторого проектора $P : X \to \mathrm{E}$ множество $P\left(\bigcup\limits_{t \geq t_0} G(t, C)\right)$ ограничено в X и $(I - P)\left(\bigcup\limits_{t \geq t_0} G(t, C)\right) \subset C_\varepsilon(\bar{0})$, где I — тождественное отображение в X [25, лемма 2.6].

Теорема 6. Многозначное отображение $G : \mathrm{R}_+ \times H \to 2^H \setminus \varnothing$, порожденное решениями задачи (1), конечномерно с точностью до произвольно заданного параметра ε, т.е. для каждого ограниченного подмножества $C \subset H$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие $t_0(C, \varepsilon)$, конечномерное подпространство E в H и ограниченный проектор $P : H \to \mathrm{E}$, что множество $P\left(\bigcup\limits_{t \geq t_0} G(t, C)\right)$ ограничено в H и $(I - P) \times$ $\times \left(\bigcup\limits_{t \geq t_0} G(t, C)\right) \subset C_\varepsilon(\bar{0})$.

Доказательство. Основываясь на свойствах слабой и сильной сходимости слабых решений, асимптотической компактности многозначного полупотока G, принимая во внимание леммы 1, 2 и учитывая сепарабельность гильбертова пространства H, получаем необходимое утверждение (см. [30]).

КЛИМАТОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА БУДЫКО–СЕЛЛЕРСА

Пусть (M, g) — C^∞-компактное связное ориентированное двумерное риманово многообразие без края (например, $M = S^2$ — единичная сфера в R^3). Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + R_e(x, u) \in QS(x)\beta(u),\ \ (x, t) \in \mathrm{R}_+ \times M, \tag{14}$$

где $\Delta u = \operatorname{div}_M (\nabla_M u)$; ∇_M — градиент, заданный на римановом многообразии (M, g). Отметим, что включение (14) — это климатологическая модель энергетического баланса. Неизвестная функция $u(x, t)$ представляет среднюю температуру земной поверхности. В работе [1] энергетический баланс выражается как

$$\text{вариация температуры} = R_a - R_e + D, \tag{15}$$

где $R_a = QS(x)\beta(u)$, при этом R_a — солнечная энергия, которую поглощает Земля; $Q > 0$ — солнечная постоянная (среднее значение за год и по земной поверхности поглощенного солнечного радиационного потока); $S(x)$ — функция инсоляции, заданная распределением солнечного излучения, падающего на верхние слои атмосферы; β — функция ко-альбедо, представляющая соотношение между поглощенной и излучаемой солнечной энергией в точке x земной поверхности. Очевидно, что $\beta(u(x,t))$ зависит от природы земной поверхности. Например, на ледниках значение $\beta(u(x,t))$ намного меньше, чем на поверхности океана, поскольку белый цвет льда отражает большее количество излучаемой солнечной энергии, тогда как океан благодаря своему темному цвету и высокой теплоемкости поглощает большее количество излучаемой солнечной энергии. Соответственно функция $\beta(u(x,t))$ может быть разрывной. Слагаемое R_e в (15) репрезентирует энергию, излучаемую Землей. Как правило, R_e представляет возрастающую по u функцию. Слагаемое D — диффузия тепла. В целях упрощения рассуждений, не ограничивая общности, предположим, что она постоянная. Слагаемое R_e выбираем согласно закону Ньютона как линейную функцию от u, $R_e = Bu + C$ (здесь B, C — некоторые положительные константы) [1], или согласно закону Стефана–Больцмана $R_e = \sigma u^4$ [2]. В данном исследовании, как и в [1], мы рассматриваем $R_e = Bu$.

Пусть для функции $S: M \to \mathrm{R}$ выполняются условия: $S \in L^\infty(M)$ и существуют такие постоянные $S_0, S_1 > 0$, что $0 < S_0 \le S(x) \le S_1$. Предположим также, что β — многозначное отображение в R^2, для которого существуют такие m, $M \in \mathrm{R}$, что $m \le z \le M$ для всех $s \in \mathrm{R}$ и $z \in \beta(s)$.

Замечание 3. Задача (14) является частным случаем включения (1), и для нее справедливы условия предположения 1 и предположения 2. Следовательно, все утверждения теорем 1–6 справедливы для всех слабых решений задачи (14).

Замечание 4. В работе [11] рассмотрен частный случай задачи (14), где неизвестной величиной была меридиальная температура земной поверхности, т.е. рассмотрена краевая задача

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \omega^2 u \in \lambda\beta(u), \ x \in (0,1), \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in (0,1), \end{cases}$$

где ω^2 — заданный параметр; β — максимально монотонное отображение в R^2; $\beta(r) = f(r)$ при $r \ne \mu$, $\beta(\mu) = [f_0, 1]$; $f(v) = f_0 + (1 - f_0)H(v - \mu)$ для некоторых $\mu > 0$ при $f_0 \in (0,1)$; $H(s)$ — функция Хевисайда: $H(s) = 0$ при $s < 0$, $H(s) = 1$ при $s \ge 0$. Были изучены свойства стационарных решений этой задачи. Кроме того, было доказано, что в исследуемом случае задача имеет три регулярных стационарных решения. Предполагается, что солнечная постоянная λ принадлежит (λ_1, λ_2), где λ_1, λ_2 — пороговые значения параметра λ, определенные в [11]. При этом два стационарных решения $\underline{u}$, $\overline{u}$ порождают свободную границу (т.е. две симметричные ледниковые «шапки»: полярную южную и полярную северную) и третье решение u^* соответствует полному покрытию Земли льдом. Среди двух более реалистичных решений устойчивым является то, которое отвечает меньшей полярной ледниковой шапке ($\overline{u}$), а решение, соответствующее большей ледниковой шапке ($\underline{u}$), неустойчиво. Таким образом, следуя теоремам 5 и 6 согласно модели Будыко–Селлерса асимптотически (при времени $t \to \infty$) возможны только три описаных выше сценария, среди которых два устойчивы (потраекторное притяжение при малом изменении начальных данных и увеличении времени) и один неустойчивый (расхождение траекторий при малом изменении начальных данных и увеличении времени).

В работе [11] приведено также графическое изображение найденых стационарных решений u^*, $\underline{u}$, $\overline{u}$ краевой задачи на отрезке $[-1, 1]$ (рис. 1).

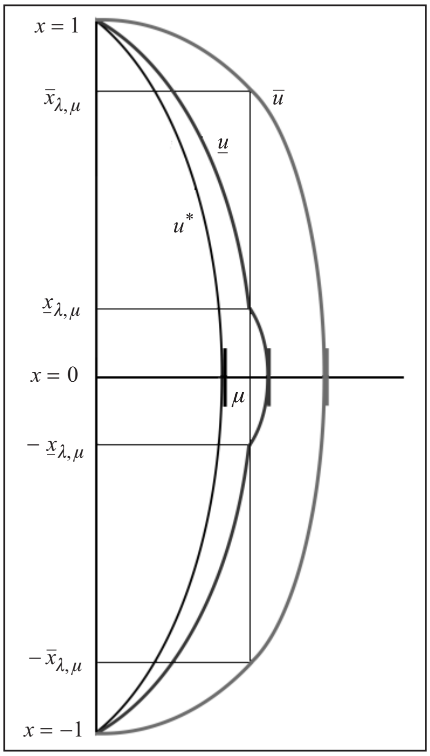

Рис. 1. График зависимости трех равновесных температур поверхности атмосферы от равноширотных параллельных окружностей при $x \in [-1, 1]$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована климатологическая модель на основе идей, методов и подходов нелинейного и многозначного анализа, теории нелинейных эволюционных уравнений и включений, теории глобальных и траекторных аттракторов многозначных полупотоков. Климатологическая модель энергетического баланса Будыко–Селлерса представляет нелинейное эволюционное включение параболического типа на римановом многообразии без края. Получены следующие результаты: доказано существование решения поставленной задачи с произвольными начальными данными из фазового пространства, изучены свойства и регулярность решения; найдена функция типа Ляпунова; изучен характер зависимости решений от начальных данных; доказано существование глобального и траекторного аттракторов, установлены их топологические свойства и взаимосвязь между ними и пространством полных траекторий задачи; исследованы характер притяжения решений к глобальному и траекторному аттракторам и их структурные свойства; установлена конечномерность решений с точностью до малого параметра. Полученные результаты качественно и количественно подтверждают гипотезы Будыко, Селлерса и Диаса относительно возможных сценариев динамики температуры земной поверхности при времени $t \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Budyko M.I. The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth. *Tellus*. 1969. Vol. 21. P. 611–619.
2. Sellers W.D. A global climatic model based on the energy balance of the Earth-atmosphere system. *J. Appl. Meteorol*. 1969. Vol. 8. P. 392–400.
3. Díaz H., Díaz J.I. On a stochastic parabolic PDE arising in climatology. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat.* 2002. Vol. 96. P. 123–128.
4. Díaz J.I., Hernández J., Tello L. On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology. *J. Math. Anal. Appl*. 1997. Vol. 216. P. 593–613.
5. Díaz J.I., Hernández J., Tello L. Some results about multiplicity and bifurcation of stationary solutions of a reaction diffusion climatological model. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat*. 2002. Vol. 96. P. 357–366.
6. Gluzman M.O., Gorban N.V., Kasyanov P.O. Lyapunov type functions for classes of autonomous parabolic feedback control problems and applications. *Applied Mathematics Letters*. 2015. Vol. 39. P. 19–21.

7. Gluzman M.O., Gorban N.V., Kasyanov P.O. Lyapunov functions for weak solutions of reaction–diffusion equations with discontinuous interaction functions and its applications. *Nonautonomous Dyn. Syst*. 2015. Vol. 2. P. 1–11.
8. Gluzman M.O., Gorban N.V., Kasyanov P.O. Lyapunov functions for differential inclusions and applications in physics, biology, and climatology. In: *Continuous and distributed systems II. Series: Studies in Systems, Decision and Control*. Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (Eds.). 2015. Vol. 30. P. 233–243.
9. Gorban N.V., Khomenko O.V., Paliichuk L.S., Tkachuk A.M. Long-time behavior of state functions for climate energy balance model. *DCDS-B*. 2017. Vol. 22, N 5. P. 1887–1897.
10. Gorban N.V., Gluzman M.O., Kasyanov P.O., Tkachuk A.M. Long-time behavior of state functions for Budyko models. In: *Advances in Dynamical Systems and Control. Series: Studies in Systems, Decision and Control.* Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (Eds.). Cham: Springer, 2016. Vol. 69. P. 351–359.
11. Bensid S., Diaz J.I. On the exact number of monotone solutions of a simplified Budyko climate model and their different stability. *DCDS*. 2019. Vol. 24, N 3. P. 1033–1047.
12. Clarke F.H. Optimization and nonsmooth analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983. 308 p.
13. Smoller J. Shock waves and reaction-diffusion equations. New York: Springer, 1983. 581p.
14. Aubin T. Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations. Berlin: Springer, 1980. 204 p.
15. Zgurovsky M.Z., Kasyanov P.O., Kapustyan O.V., Valero J., Zadoianchuk N.V. Evolution inclusions and variation inequalities for Earth data processing. III. Heidelberg; New York; Dordreht; London: Springer, 2012. 330 p.
16. Kasyanov P.O., Toscano L., Zadoianchuk N.V. Regularity of weak solutions and their attractors for a parabolic feedback control problem. *Set-Valued and Variational Analysis*. 2013. Vol. 21, N 2. P. 271–282.
17. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer, 1988. 500 p.
18. Gajewski H., Groger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorleichngen und Operatordifferential-gleichungen. Berlin: Academie-Verlag, 1974. 281 p.
19. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Trajectory and global attractors for 3D Navier–Stokes system. *Mathematical Notes.* 2002. Vol. 71. P. 177–193.
20. Kasyanov P.O., Toscano L., Zadoianchuk N.V. Long-time behavior of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional "reaction-displacemen" law. *Abstract and Applied Analysis.* 2012. Vol. 2012, Article ID 450984. 21 p.
21. Zgurovsky M.Z., Kasyanov P.O., Zadoianchuk N.V. Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem. *Applied Mathematics Letters.* 2012. Vol. 25, N 10. P. 1569–1574.
22. Zadoianchuk N.V., Kasyanov P.O. Dynamics of solutions of a class of second-order autonomous evolution inclusions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2012. Vol. 48, N 3. P. 414–420.
23. Arrieta J.M., Rodríguez-Bernal A., Valero J. Dynamics of a reaction–diffusion equation with a discontinuous nonlinearity. *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 2695–2984.
24. Valero J. Attractors of parabolic equations without uniqueness. *Journal of Dynamics and Differential Equations.* 2001. Vol. 13, N 4. P. 711–744.
25. Kalita P., Lukaszewicz G. Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2014. Vol. 101. P. 124–143.
26. Kalita P., Lukaszewicz G. Attractors for Navier–Stokes flows with multivalued and nonmonotone subdifferential boundary conditions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2014. Vol. 19. P. 75–88.
27. Gorban N.V., Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Paliichuk L.S. On global attractors for autonomous damped wave equation with discontinuous nonlinearity. In: *Continuous and Distributed Systems. Series: Solid Mechanics and Its Applications*. Zgurovsky M.Z., Sadovnichiy V.A. (Eds.). 2014. Vol. 211. P. 221–237.
28. Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Leyden: Noordhoff, 1974. 351 p.
29. Ball J.M. Global attractors for damped semilinear wave equations. *DCDS*. 2004. Vol. 10. P. 31–52.
30. Згуровський М.З., Касьянов П.О., Горбань Н.В., Палійчук Л.С. Якісні властивості та скінченновимірність з точністю до малого параметра слабких розв'язків кліматологічної моделі Будико–Селлерса. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2018. № 4. С. 7–18.

Надійшла до редакції 05.02.2019

М.З. Згуровський, П.О. Касьянов, Н.В. Горбань, Л.С. Палійчук

ЯКІСНИЙ І КІЛЬКІСНИЙ АНАЛІЗ СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕНЕРГОБАЛАНСНИХ КЛІМАТОЛОГІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Анотація. Проведено якісний аналіз динаміки розв'язків кліматологічної моделі енергетичного балансу Будико–Селлерса, яка розглянута на рімановому многовиді без краю. Доведено глобальне існування слабкого розв'язку досліджуваної задачі з довільними початковими даними з фазового простору, вивчено його властивості та регулярність. Доведено теореми існування глобального та траєкторного атракторів для багатозначного напівпотоку, породженого всіма слабкими розв'язками задачі. Вивчено властивості атракторів, встановлено взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій задачі. Досліджено характер притягнення розв'язків до глобального і траєкторного атракторів та їхню структуру. Встановлено скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків задачі.

Ключові слова: кліматологічна модель енергетичного балансу Будико–Селлерса, глобальний атрактор, траєкторний атрактор, скінченновимірність з точністю до малого параметра, багатозначний напівпотік, слабкий розв'язок, рівняння реакції–дифузії.

M.Z. Zgurovsky, P.O Kasyanov, N.V. Gorban, L.S. Paliichuk

QUALITATIVE AND QUANTITATIVE ANALYSIS OF WEAK SOLUTIONS OF ENERGY-BALANCE CLIMATOLOGICAL MODELS

Abstract. A qualitative analysis of the solutions behavior for the Budyko–Sellers energy balance climate model, considered on the Riemannian manifold without boundary is carried out. The global existence of the weak solution for the investigated problem with arbitrary initial data from the phase space is proved. Solutions' properties and regularity are analyzed. The theorems on the existence of global and trajectory attractors for multi-valued semi-flow generated by all weak solutions of the problem are proved. The properties of attractors are analyzed. The relationship between attractors and the space of complete trajectories for the problem is established. The character of attraction of solutions to global and trajectory attractors and their structure are investigated. The finite-dimensionality up to a small parameter of the solutions dynamics is obtained.

Keywords: Budyko–Sellers energy balance climate model, global attractor, trajectory attractor, finite-dimensionality up to a small parameter, multi-valued semi-flow, weak solution, reaction–diffusion equation.

Згуровский Михаил Захарович,
академик НАН Украины, профессор, доктор техн. наук, ректор Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, e-mail: zgurovsm@hotmail.com; mzz@kpi.ua.

Касьянов Павел Олегович,
доктор физ.-мат. наук, директор Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, e-mail: p.o.kasyanov@gmail.com.

Горбань Наталия Владимировна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Института прикладного системного анализа Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, e-mail: nataliia.v.gorban@gmail.com.

Палийчук Лилия Сергеевна,
кандидат физ.-мат. наук, ассистент кафедры Института прикладного системного анализа Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, e-mail: lili262808@gmail.com.