

МЕТОД И АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕНЗОРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Аннотация. По пространственному распределению величин параметров магнитного поля в каждой точке плоскости наблюдения определяют значения всех составляющих вектора магнитной индукции и его пространственных производных первого порядка. Обратная задача решена с помощью аналитического метода собственных векторов. Работа алгоритма промоделирована на реальных данных магнитометрических исследований в геомагнитном поле.

Ключевые слова: магнитные аномалии, обратная задача магнитостатики, тензор пространственных производных, преобразование Фурье, СКВИД-градиентометр.

ВВЕДЕНИЕ

В развитых странах проводятся интенсивные исследования по использованию сверхчувствительной магнитометрической аппаратуры на основе СКВИД-датчиков для решения задач поиска полезных ископаемых и/или инженерных объектов и сооружений, находящихся под землей (водой). В настоящей статье рассматриваются предварительные результаты, в том числе экспериментальные, связанные с разработкой алгоритмов измерений и обработки данных для решения геофизических задач, когда исследуемый объект обладает магнитными свойствами, расположен в геомагнитном поле, местоположение объекта в проводящей среде (земля, вода) неизвестно и требуется определить его координаты по результатам измерений величин магнитного поля, созданного объектом в точках наблюдения в воздушной среде. Предлагаемый в настоящей работе аналитический метод решения обратной задачи магнитостатики учитывает в явном виде конструкцию трансформаторов магнитного потока (антенн) магнитометрического канала и позволяет оптимизировать количество измерительных каналов системы. Как вариант, данный подход к решению задачи позволил создать прототип СКВИД-магнитометрической системы для поиска инженерных коммуникаций под землей, которая проходит экспериментальные испытания, необходимые для ее усовершенствования. В статье приведены некоторые численные результаты обработки магнитных сигналов для физических моделей, которые различаются как по количеству (один или несколько распределенных в пространстве объектов), так и по форме и ориентации объекта относительно силовых линий геомагнитного поля.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ НА ОСНОВЕ РЕГИСТРАЦИИ ПОЛНОГО ТЕНЗОРА ГРАДИЕНТОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При поиске и исследовании объектов в геофизике магнитные методы часто используются параллельно с методами гравиметрии [1, 2]. Эти методы поиска аномалий являются бесконтактными и предполагают регистрацию величин параметров пространственных производных векторов магнитного и напряженности гравитационного полей, созданных объектом в окружающем пространстве. Заметим, что регистрация и пространственный анализ гравиметрических данных разработаны для широкого класса геофизических задач и широко при-

меняются на практике, например при поиске полезных ископаемых. Появление высокочувствительных магнитометрических систем на основе СКВИД-датчиков стало стимулом для разработки новых методов регистрации и анализа магнитных аномалий при поиске месторождений ископаемых или, например, при поиске инженерных коммуникаций под землей.

Отметим, что в работе [3] описан подход, который позволяет преобразовать (трансформировать) результаты магнитных измерений в результаты гравиметрических измерений. Однако этот метод дает достоверные результаты в том случае, если вектор магнитной индукции геомагнитного поля имеет только вертикальную (нормальную по отношению к поверхности Земли) составляющую, например вблизи магнитных полюсов Земли. Вместе с тем существуют методы и алгоритмы, которые основаны на свойствах симметрии тензора первых и вторых пространственных производных вектора магнитной индукции (напряженности гравитационного поля).

Рассмотрим произвольную точку наблюдения Q с радиус-вектором $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ в системе координат, связанной с объектом. Тогда поле, созданное объектом в точке наблюдения, можно описать с помощью векторов

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

$$\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z),$$

где \mathbf{B} и \mathbf{G} — вектор магнитной индукции и вектор напряженности гравитационного поля соответственно.

Первые пространственные производные векторов магнитной индукции и напряженности гравитационного поля образуют тензоры

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_x}{\partial x} & \frac{\partial G_x}{\partial y} & \frac{\partial G_x}{\partial z} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} & \frac{\partial G_y}{\partial y} & \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_z}{\partial x} & \frac{\partial G_z}{\partial y} & \frac{\partial G_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Если точка наблюдения Q расположена в однородной, немагнитной, непроводящей среде (в воздухе), а для гравитационного поля — вне гравитационных объектов, то для векторов \mathbf{B} и \mathbf{G} справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что тензоры производных D_1 и Γ_1 симметричны и не имеют следа; таким образом, независимыми являются только пять элементов каждого тензора (рис. 1).

Предположим, что расстояние от точки наблюдения до объекта намного больше значений геометрических размеров объема V пространства, где сосредоточен источник поля (объект). Другими словами, точки пространства, где известно или определяется магнитное поле \mathbf{B} , расположены по отношению к источнику поля на расстояниях r , значительно превышающих размеры источника.

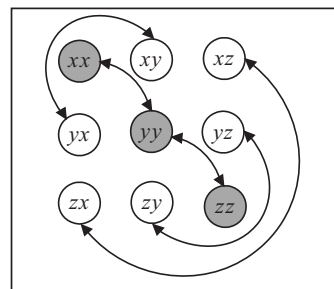


Рис. 1. Схема симметрии тензора и его диагональных элементов, сумма которых равна нулю

Алгоритм определения местоположения объекта по данным измерений величин параметров магнитного поля и гравитационного аналогичен. Поэтому далее будем рассматривать только магнитное поле объекта.

Рассмотрим аналитическое решение обратной задачи для случая, когда источник сигнала можно аппроксимировать магнитным диполем. Тогда вектор магнитной индукции в точке наблюдения с радиус-вектором \mathbf{r} определяется по формуле [4]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{M}r^2}{r^5} = \frac{\mu}{4\pi r^5} \begin{pmatrix} 3r_x^2 - r^2 & 3r_x r_y & 3r_x r_z \\ 3r_x r_y & 3r_y^2 - r^2 & 3r_y r_z \\ 3r_x r_z & 3r_y r_z & 3r_z^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где μ — магнитная проницаемость среды в точке наблюдения, \mathbf{M} — полный магнитный момент объекта. Это относится ко всем классам источников магнитного поля. Поэтому, не снижая общности, можно считать, что вне зависимости от принадлежности источника к тому или иному классу статическое магнитное поле в точке пространства с радиус-вектором \mathbf{r} имеет вид (3) и создано дипольным источником (диполем) с магнитным моментом \mathbf{M} , расположенным в начале декартовой системы координат XYZ .

В однородной, немагнитной, непроводящей среде выполняются условия (2). Прямым дифференцированием (3) по пространственным координатам получим все соотношения для первых и вторых производных вектора магнитной индукции магнитного поля в воздухе. Соотношения для первых производных имеют вид

$$\begin{cases} \partial B_x / \partial y \\ \partial B_x / \partial z \\ \partial B_y / \partial y \\ \partial B_y / \partial z \\ \partial B_z / \partial z \end{cases} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^7} \begin{pmatrix} (r^2 - 5r_x^2)r_y & (r^2 - 5r_y^2)r_x & -5r_x r_y r_z \\ (r^2 - 5r_x^2)r_z & -5r_x r_y r_z & (r^2 - 5r_z^2)r_z \\ (r^2 - 5r_y^2)r_x & (3r^2 - 5r_y^2)r_y & (r^2 - 5r_y^2)r_z \\ -5r_x r_y r_z & (r^2 - 5r_y^2)r_z & (r^2 - 5r_z^2)r_y \\ (r^2 - 5r_z^2)r_x & (r^2 - 5r_z^2)r_y & (3r^2 - 5r_z^2)r_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Обратная задача может быть сформулирована так: по известному (измеренному) в одной или нескольких точках пространства вектору магнитной индукции и его пространственным производным найти радиус-вектор указанных точек в системе координат, связанной с источником магнитного поля, и дипольный магнитный момент источника сигнала.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИПОЛЬНОЙ МОДЕЛИ ИСТОЧНИКА МАГНИТНОГО СИГНАЛА

Аналитическое решение обратной задачи для дипольного источника получим, используя математический аппарат собственных векторов [4]. Как было показано, тензор пространственных производных вектора магнитной индукции D_1 симметричен и не имеет следа. Иными словами, из девяти элементов тензора D_1 независимыми являются лишь пять: три недиагональных: $\partial B_x / \partial y$, $\partial B_x / \partial z$, $\partial B_y / \partial z$ и два диагональных: $\partial B_y / \partial y$ и $\partial B_x / \partial x$. Из симметрии D_1 , и условия $\text{tr}(D_1) = 0$ следует, что собственные значения тензора градиентов магнитного поля λ_i ($i = 1, 2, 3$), определяемые характеристическим уравнением

$$\lambda^3 + \lambda (B_{xx}B_{yy} + B_{xx}B_{zz} + B_{yy}B_{zz} - B_{xy}^2 - B_{xz}^2 - B_{yz}^2) + B_{xx}B_{yz}^2 + B_{yy}B_{xz}^2 + B_{zz}B_{xy}^2 - 2B_{xy}B_{xz}B_{yz} - B_{xx}B_{yy}B_{zz} = 0, \quad (5)$$

где $B_{ij} = \partial B_i / \partial r_j$, действительны и различны, а сумма их равна нулю ($\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$). Это, в свою очередь, означает, что собственные векторы

тензора D_1

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{yz}B_{xy} + (\lambda_i - B_{yy})B_{xz} \\ B_{xz}B_{xy} + (\lambda_i - B_{xx})B_{yz} \\ (B_{xx} - \lambda_i)(B_{yy} - \lambda_i) - B_{xy}^2 \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, 3, \quad (6)$$

взаимно ортогональны:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0.$$

После нормирования собственные векторы могут быть выбраны в качестве базиса новой системы координат, причем в этом новом базисе тензор D_1 имеет диагональный вид:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

а координаты радиуса-вектора произвольной точки пространства в новой системе координат $(\xi_i, i=1, 2, 3)$ связаны с координатами радиуса-вектора этой же точки в декартовой системе координат XYZ $(\xi_j, j=x, y, z)$ следующими соотношениями:

$$\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} & \alpha_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2} & \alpha_3 / \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2} \\ \beta_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} & \beta_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2} & \beta_3 / \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2} \\ \gamma_1 / \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} & \gamma_2 / \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2} & \gamma_3 / \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ определяются из (6).

Соотношения (6)–(8) позволяют получить решение задачи, если в произвольной точке пространства известны независимые элементы тензора D_1 и одна из компонент вектора магнитной индукции, например B_x . Тогда из (4) для $\partial \mathbf{B} / \partial x$ в новой системе координат, базисом которой являются нормированные собственные векторы матрицы \hat{D}_1 , находим вектор, пропорциональный вектору \mathbf{M} :

$$\bar{M} = \frac{3\mu}{4\pi r^4} \mathbf{M} = \frac{\lambda_1}{r^3} \begin{pmatrix} (r^2 - 5r_2^2 - 5r_3^2)r_1 \\ (r^2 - 5r_1^2)r_2 \\ (r^2 - 5r_2^2)r_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $r_1 \neq 0$ (детерминант системы уравнений (4) не равен нулю).

Сделав подстановку (9) в (4), приведем подобные слагаемые для линейно независимых элементов:

$$\begin{cases} n_1 n_2 n_3 = 0, \\ n_1^2 (1 - 5n_2^2 - 5n_3^2) [\lambda_1 (1 - 5n_2^2) - \lambda_2 (3 - 5n_1^2)] + n_2^2 (1 - 5n_1^2) \times \\ \times [\lambda_2 (1 - 5n_1^2) - \lambda_1 (3 - 5n_2^2)] + n_3^2 (1 - 5n_1^2) [\lambda_2 (1 - 5n_1^2) - \lambda_1 (1 - 5n_2^2)] = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $n_1 = r_1 / r$, $n_2 = r_2 / r$, $n_3 = r_3 / r$ — направляющие косинусы радиуса-вектора \mathbf{r} в новой системе координат. На основании анализа системы (8)–(10) получим следующие решения:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{r_1}{r} = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta, \quad n_3 = 0, \\ \sin^2 \theta &= \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \bar{M}_1 = \lambda_1 \frac{5n_2^2 - 1}{1 + n_1^2} n_1, \\ \bar{M}_2 &= \lambda_1 \frac{1 - 5n_1^2}{1 + n_1^2} n_2, \quad \bar{M}_3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

На основании соотношений (11) можно найти $n_x, n_y, n_z, M_x, M_y, M_z$ в заданной системе координат XYZ , а затем определить расстояние r по измеренной компоненте B_x :

$$r = 3B_x[(3\overline{M}_x n_x + 3\overline{M}_y n_y + 3\overline{M}_z n_z)n_x - M_x]^{-1},$$

что является полным аналитическим решением обратной задачи для источника поля дипольной модели. Решение обратной задачи для N источников опубликовано в [5, 6].

Алгоритм преобразования данных, соотношения взаимосвязи между параметрами в явном виде, примеры реализации алгоритма, а также оценки влияния магнитного шума на достоверность решения обратной задачи приведены в работах [4, 5]. Заметим, что свойства симметрии тензора D_1 (первых пространственных производных вектора магнитной индукции) позволяют получить информацию об источнике поля (объекте) в случае отсутствия предварительной информации о взаимосвязи между расстоянием от точки наблюдения до объекта и геометрическими размерами объекта. Для этого при магнитометрическом поиске магнитных аномалий в заданной точке наблюдения вычисляют значения следующих параметров:

$$\begin{aligned} I_{1B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ I_{2B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ I_{3B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial B_x}{\partial y} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial B_z}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Можно показать, что значения параметров I_{1B}, I_{2B}, I_{3B} не зависят от выбора направления осей координат, поэтому они получили название «пространственные инварианты» [7]. В качестве инвариантов используют также собственные значения в виде следующих выражений:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_3 &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3. \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим далее, что значения вектора магнитной индукции, все независимые пространственные производные первого порядка этого вектора, а также значения пространственных инвариантов первого, второго и третьего порядков известны в произвольной точке плоскости, параллельной поверхности Земли и расположенной над исследуемым объектом. В этом случае для каждой точки наблюдения можно найти решение обратной задачи, используя аппарат собственных векторов, и тем самым определить местоположение объекта в пространстве. Кроме того, вычисление распределения пространственных инвариантов (12), (13) в плоскости измерений над объектом дает дополнительную информацию как о проекции на эту плоскость области местоположения объекта, так и о его пространственной конфигурации (форма, геометрические размеры, протяженность или сосредоточенность объекта, характеристики — плоский или трехмерный объект и т.д.) [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Среди известных магнитометрических систем на основе СКВИД-датчиков для регистрации и пространственного анализа «полного тензора градиентов» отметим опубликованные в [8–11]. Техническая сложность «тензорных» измерений магнитного поля известна и существенно ограничивает применение рассматриваемых методов магнитных исследований в геофизике. Исходя из этого, предположим, что:

- объект ограничен областью пространства V и создает во внешнем пространстве магнитное поле;

- точками измерения магнитного поля являются узлы равномерной двумерной решетки (сетки) в плоскости, параллельной поверхности Земли (воды), при этом координаты точек наблюдения известны (заданы);

- размер области наблюдения значительно превышает размер объекта;

- магнитное поле регистрируют одноканальным СКВИД-градиентометром, конструкция трансформатора магнитного потока (антенны) представляет собой градиентометр первого порядка (рис. 2).

Покажем, что этой информации достаточно для того, чтобы определить:

- значения всех независимых элементов тензора первых пространственных производных вектора магнитной индукции в каждой точке наблюдения (измерения);

- местоположение точек наблюдения в системе координат, связанной с объектом;

- значения пространственных инвариантов магнитного поля в каждой точке наблюдения и дополнительную информацию об объекте (по результатам пространственного анализа распределения инвариантов).

АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕНЗОРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ «ОДНОРОДНЫХ» ИЗМЕРЕНИЙ

При выполнении измерений магнитное поле регистрируют не СКВИД-сенсором, а с использованием петли из сверхпроводящей проволоки, называемой трансформатором (антенной или преобразователем) магнитного потока. В задачах поиска магнитных аномалий, где источник измеряемого поля является «внешним» и принципиально не может быть экранирован, основным методом борьбы с помехами является выбор приемной катушки трансформатора потока в виде градиентометра первого порядка [4]. Другими словами, антенна СКВИД-сенсора представляет собой набор идентичных витков из сверхпроводниковой проволоки, расположенных на некотором расстоянии один от другого и включенных навстречу друг другу. Магнитное поле от «далеких» источников (в том числе и геомагнитное поле) является однородным и, следовательно, создает в витках равные по величине и противоположные по направлению потоки. Поле от «близких» источников создает разные потоки через витки, а значит, ненулевой полный поток, который и фиксируется СКВИД-магнитометрической системой.

Будем считать, как и ранее, что начало декартовой системы координат XYZ находится в объеме источника магнитного поля, а направление оси OZ совпадает с направлением нормали к плоскости измерений. Основные пространственные конфигурации проволочных антенн (трансформаторов магнитного потока) СКВИД-измерительных каналов представены на рис. 2.

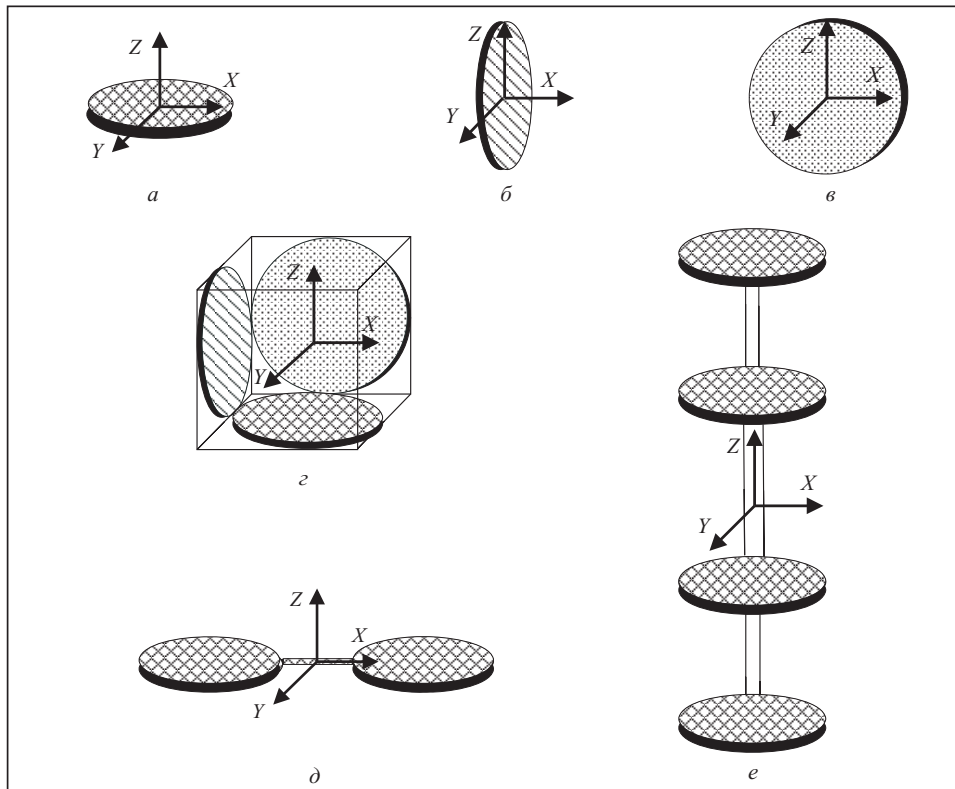


Рис. 2. Основные пространственные конфигурации проволочных антенн СКВИД-измерительных каналов: *a* — магнитометр B_z ; *b* — магнитометр B_x ; *c* — магнитометр B_y ; *z* — векторный магнитометр; *d* — градиентометр первого порядка $\partial B_z / \partial x$; *e* — градиентометр второго порядка $\partial^2 B_z / \partial z^2$

Далее предположим, что в задаче поиска магнитных аномалий регистрируется характеристика магнитного поля, связанная с направлением нормали к плоскости измерений (поверхности Земли), а именно:

- а) составляющая B_z вектора магнитной индукции;
- б) выходной сигнал СКВИД-градиентометра, пропорциональный первой пространственной производной $\partial B_z / \partial x$ или $\partial B_z / \partial y$;
- в) выходной сигнал СКВИД-градиентометра, пропорциональный второй пространственной производной $\partial^2 B_z / \partial z^2$.

С помощью алгоритмов двумерной интерполяции и гладкого восполнения данных можно определить значения параметра Ψ , которые пропорциональны выходному сигналу СКВИД-магнитометра (градиентометра) в $N \times N$ узлах плоской регулярной прямоугольной решетки с шагом Δ , например более мелким, чем в исходных данных измерений. Затем по полученным величинам сигнала следует определить значения фурье-образа параметра Ψ в волновой плоскости

$$F[\Psi](k_x, k_y) = \int \Psi(x, y, z) e^{-ik_x x - ik_y y} dx dy, \quad (14)$$

$$\Psi(x, y, z) = \int F[\Psi](k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y} dk_x dk_y, \quad (15)$$

где k_x, k_y — компоненты волнового вектора.

Поскольку точки наблюдения расположены в немагнитной, непроводящей однородной среде (в воздухе), то для вектора магнитной индукции справедливы однородные уравнения Максвелла (2), которые в волновой плоскости имеют вид

$$\begin{aligned} -ik_x F[B_x] - ik_y F[B_y] - \sqrt{k_x^2 + k_y^2} F[B_z] &= 0, \\ -ik_y F[B_x] - ik_x F[B_y] &= 0, \\ -\sqrt{k_x^2 + k_y^2} F[B_x] + ik_x F[B_z] &= 0, \\ -\sqrt{k_x^2 + k_y^2} F[B_y] + ik_y F[B_z] &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда следует, что в волновой плоскости значения выходного сигнала СКВИД-сенсора и z -й составляющей вектора магнитной индукции связаны простыми аналитическими соотношениями:

$$F[B_z] = F[\Psi]$$

для магнитометра ($\Psi \sim S \cdot B_z$, S — площадь витка антенны),

$$F[B_z] = \frac{F[\Psi]}{1 - e^{-L\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}}$$

для аксиального градиентометра первого порядка ($\Psi \sim \partial B_z / \partial z$),

$$F[B_x] = \frac{F[\Psi]}{-ik_x}, \quad F[B_y] = \frac{F[\Psi]}{-ik_y}$$

для аксиального градиентометра первого порядка ($\Psi \sim \partial B_z / \partial x$ и $\Psi \sim \partial B_z / \partial y$ соответственно),

$$F[B_z] = \frac{F[\Psi]}{1 - 2e^{-L\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} + e^{-2L\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}}$$

для аксиального градиентометра второго порядка ($\Psi \sim \partial B_z^2 / \partial z^2$).

С использованием соотношений (16) можно вычислить все компоненты вектора магнитной индукции и его пространственные производные по значениям фурье-образа z -й составляющей вектора магнитной индукции

$$\begin{aligned} F[B_x] &= -ik_x \frac{F[B_z]}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \quad F[B_y] = -ik_y \frac{F[B_z]}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \\ F\left[\frac{\partial B_x}{\partial y}\right] &= k_x k_y \frac{F[B_z]}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \quad F\left[\frac{\partial B_x}{\partial y}\right] = k_y^2 \frac{F[B_z]}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \\ F\left[\frac{\partial B_z}{\partial x}\right] &= -ik_x F[B_z], \quad F\left[\frac{\partial B_z}{\partial y}\right] = -ik_y F[B_z], \quad F\left[\frac{\partial B_z}{\partial z}\right] = -\sqrt{k_x^2 + k_y^2} F[B_z]. \end{aligned}$$

В результате получили значения фурье-образов вектора магнитной индукции и его пространственных производных в каждой точке волновой плоскости, а затем с помощью обратного преобразования Фурье (15) — значения этих характеристик магнитного поля в точках наблюдения, что и дает полное решение поставленной задачи.

Представим в виде схемы алгоритм преобразования магнитометрической информации в сравнении со схемой, используемой в известных многоканальных СКВИД-градиентометрических системах.

Этап 1. Известные методы и предлагаемый алгоритм		Трехмерный объект расположен в геомагнитном поле и является источником вторичного магнитного поля в точках наблюдения
Этап 2. Известные методы и предлагаемый алгоритм		Значения характеристик магнитного поля регистрируют в узлах плоской решетки
Этап 3	Известные методы	Магнитный сигнал регистрируют в каждой точке наблюдения одновременно пятью СКВИД-градиентометрами
	Предлагаемый алгоритм	Магнитный сигнал регистрируют в каждой точке наблюдения одним СКВИД-градиентометром
		Выполняют прямое двойное интегральное преобразование Фурье
		Вычисляют значения фурье-образа z -й составляющей вектора магнитной индукции в волновой плоскости
		Вычисляют значения фурье-образа всех составляющих вектора магнитной индукции и его пространственных производных в волновой плоскости
Выполняют обратное двойное интегральное преобразование Фурье		
Этап 4. Известные методы и предлагаемый алгоритм		Значения всех составляющих вектора магнитной индукции и его пространственных производных известны (измерены, вычислены) в каждой точке наблюдения
Этап 5. Известные методы и предлагаемый алгоритм		Решение обратной задачи магнитостатики для дипольной модели источника магнитного поля
Этап 6. Известные методы и предлагаемый алгоритм		Вычисление значений пространственных инвариантов магнитного поля в каждой точке наблюдения и пространственный анализ их распределения

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ПОИСКА МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Численное моделирование задачи поиска магнитных аномалий было выполнено для оценки точности алгоритма решения задачи локализации источников магнитного поля «стандартной» пространственной конфигурации. На рис. 3 схематически представлены модели, которые различаются формой, геометрическими размерами, расположением в пространстве и количеством объектов, которые одновременно являются источниками магнитного поля. Кроме того, даны параметры объектов и схема их расположения в пространстве относительно лабораторной системы координат. Предполагается, что все объекты равномерно намагничены вдоль оси координат OZ в однородном магнитном поле Земли. Объект 1 имеет форму параллелепипеда с размерами $20 \times 500 \times 200$ м и расположен в точке с координатами $(300, 300, 100)$ м (рис. 3, а). Объект 2 имеет форму параллелепипеда с размерами $20 \times 400 \times 20$ м и расположен в точке с координатами $(600, 300, 100)$ м (рис. 3, в). Объект 3 имеет форму сферы с радиусом 50 м и расположен в точке с координатами $(600, 600, 100)$ м (рис. 3, д).

На первом этапе для каждого объекта (группы объектов) решалась прямая задача и вычислялись значения выходного сигнала измерительного модуля системы в точках 31×31 наблюдения в плоскости измерений при условии, что основой измерительного канала является СКВИД-сенсор с антенной в виде аксиального градиентометра второго порядка. Затем по полученным данным с помощью интегрального преобразования Фурье были найдены все элементы тензора пространственных производных вектора магнитной индукции в заданных точках

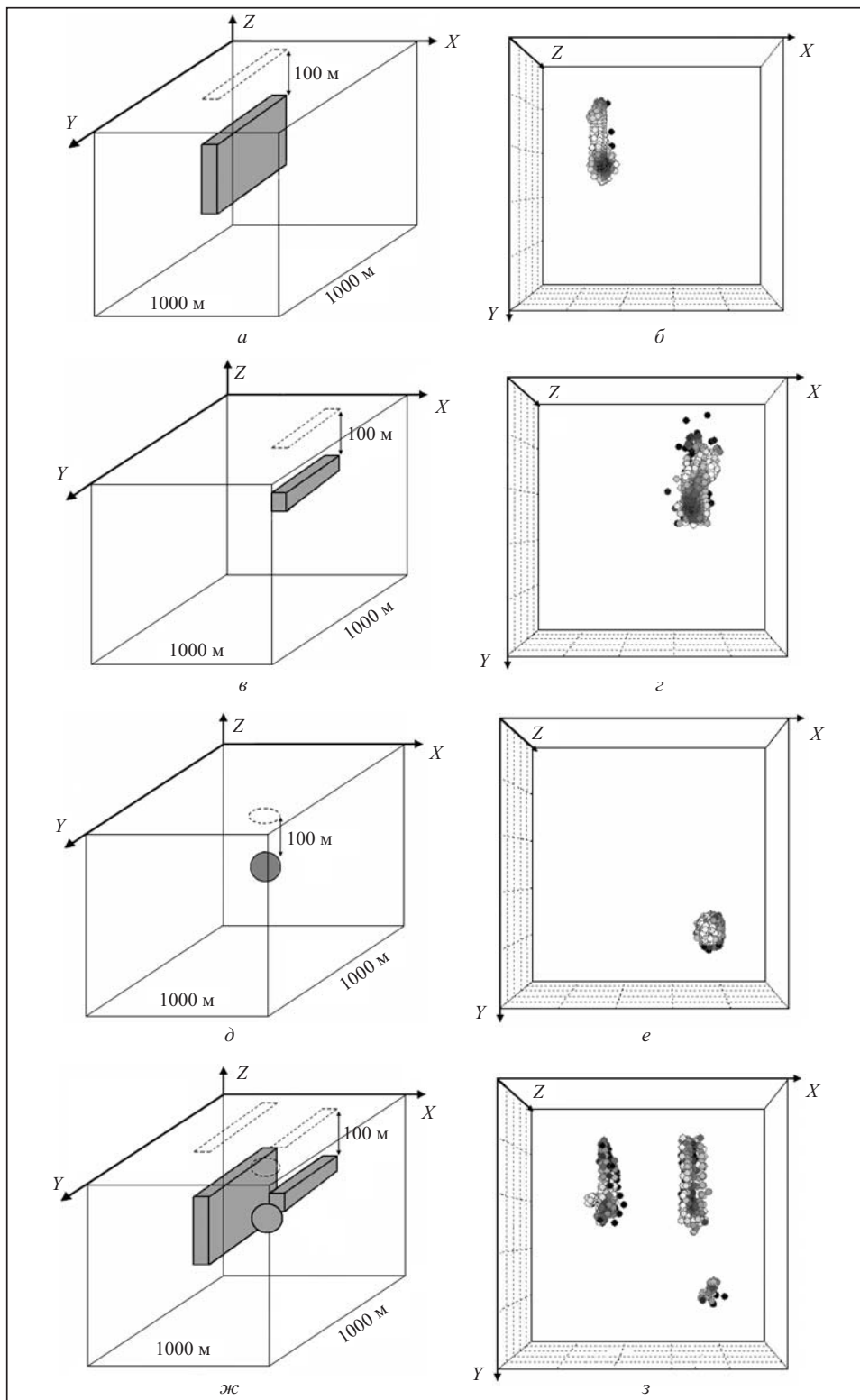


Рис. 3. Принципиальная схема объектов численного моделирования и результаты решения обратной задачи магнитостатики: объект 1 (а, б); объект 2 (в, г); объект 3 (д, е); объекты 1, 2, 3 (ж, з)

плоскости измерений. На заключительном этапе по вычисленным значениям составляющих вектора магнитной индукции и его пространственным производным первого и второго порядков было выполнено решение обратной задачи магнито-

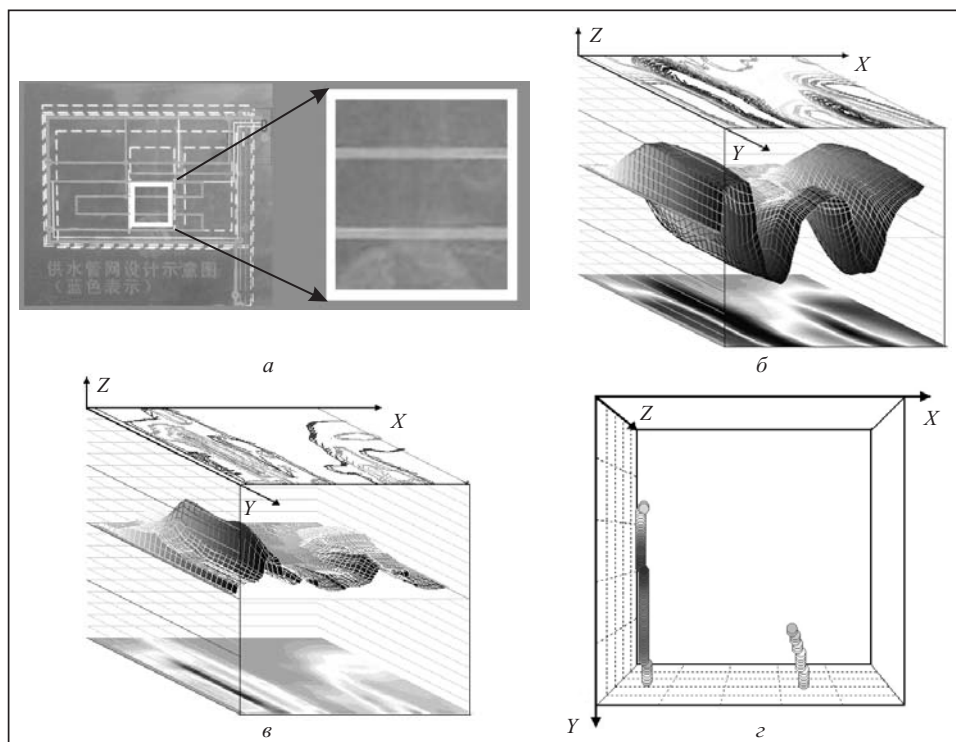


Рис. 4. Схематическое расположение коммуникаций на полигоне и область сканирования (а); пространственное распределение магнитного поля в границах области сканирования (б); результаты анализа распределения инвариантов магнитного поля (в); решение обратной задачи с визуализацией объектов под землей (г)

статики. Результаты решения обратной задачи показаны на рис. 3, б, г, е, з в виде пространственной конфигурации N различных независимых магнитных диполей [5]. Определенное таким образом местоположение источников магнитного поля и их пространственная конфигурация соответствуют заданным моделям.

По результатам предложенного алгоритма регистрации и преобразования данных измерений слабых магнитных сигналов разработан и создан экспериментальный образец одноканальной СКВИД-измерительной системы для поиска инженерных коммуникаций под землей. СКВИД-магнитометрический комплекс успешно прошел испытания при поиске труб под землей на специальном полигоне в Пекине (КНР). На рис. 4 показаны результаты сканирования и вариант визуализации и обработки магнитных сигналов при поиске инженерных коммуникаций под землей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известные СКВИД-магнитометрические системы для поиска и определения координат (местоположения) магнитных аномалий, как правило, включают шесть измерительных каналов (пять каналов, которые измеряют независимые элементы тензора (3), а также один канал, который измеряет составляющую вектора магнитного поля для определения дальности до объекта). Если поиск выполняют с вертолета, то для повышения точности при определении местоположения магнитной аномалии в известных магнитометрических системах необходимо дополнительно использовать сложную систему гироскопической стабилизации измерительного модуля по отношению к заданной системе координат. Предлагаемый метод определения независимых элементов тензора D_1 предполагает наличие в измерительной системе только одного измерительного канала с антенной, рас-

положенной вертикально относительно поверхности Земли (не требует стабилизации по отношению к принятой системе координат), что приводит как к повышению точности решения задачи, так и уменьшению стоимости самой системы и ее эксплуатационных расходов.

Метод обработки данных измерений в магнитометрической системе поиска магнитных аномалий, который реализован в опытном образце (см. рис. 4), по своей сути аналогичен тому, который нами использован в магнитокардиографических системах для исследования сердца человека [12].

Заметим, что предложенные математические модели и методы решения обратной задачи не ориентированы на конкретную магнитометрическую систему и могут быть использованы в любой области приложений, где корректна данная постановка задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nabighian M.N., Grauch V.J.S., Hansen R.O., LaFehr T.R., Li Y., Peirce J.W., Phillips J.D., Ruder M.E. The historical development of the magnetic method in exploration. *Geophysics*. 2005. Vol. 70, N 6. P. 33ND–61ND.
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. Москва: МГГА, 2009. 232 с.
3. Баранов В. Потенциальные поля и их трансформации в прикладной геофизике. Москва: Недра, 1980. 151 с.
4. Примин М.А., Гуменюк-Сычевский В.И., Недайвода И.В. Методы и алгоритмы локализации источника магнитного поля. Киев: Наук. думка, 1992. 92 с.
5. Primin M., Nedayvoda I. Inverse problem solution algorithms in magnetocardiography: New analytical approach and some results. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2009. Vol. 29, N 2. P. 65–81.
6. Primin M.A., Nedayvoda I.V. A method and an algorithm to reconstruct the spatial structure of current density vectors in magnetocardiography. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 485–494. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9950-6>.
7. Pedersen L.B., Rasmussen T.M. The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps. *Geophysics*. 1990. Vol. 55, N 12. P. 1558–1566.
8. Chwala A., Stolz R., Zakosarenko V., Fritzsche L., Schulz M., Rompel A., Polome L., Meyer M., Meyer H.G. Full tensor SQUID gradiometer for airborne exploration. In: *22nd International Geophysical Conference and Exhibition (26–29 February 2012, Brisbane, Australia)*, 2012. P. 1–4.
9. Schmidt P., Clark D., Leslie K., Bick M., Tilbrook D., Foley C. GETMAG — a SQUID magnetic tensor gradiometer for mineral and oil exploration. *Exploration Geophysics*. 2004. Vol. 35, N 4. P. 297–305.
10. Gamey T.J. Development and evaluation of an airborne superconducting quantum interference device-based magnetic gradiometer tensor system for detection, characterization and mapping of unexploded ordnance: SERDP Project MM-1316, 2008.
11. Wynn W.M., Frahm C.P., Carroll P.J., Clark R.H., Wellhoner J., Wynn M.J., Advanced superconducting gradiometer/magnetometer arrays and a novel signal processing technique. *IEEE Trans. Mag.* 1975. Vol. 11, Iss. 2. P. 701–707.
12. Maslennikov Yu.V., Primin M.A., Slobodtchikov V.Yu., Nedayvoda I.V., Krymov V.A., Khanin V.V., Ivanov G.G., Bulanova N.A., Kuznetsova S.Yu., Gunaeva V.N. SQUID-based magnetometric systems for cardiac diagnostics. *Biomedical Engineering*. 2017. Vol. 51, N 3. P. 153–156.

Надійшла до редакції 10.05.2018

М.А. Примін, І.В. Недайвода

**МЕТОД І АЛГОРИТМ ОТРИМАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕНЗОРА ПРОСТОРОВИХ ПОХІДНИХ
ВЕКТОРА МАГНІТНОЇ ІНДУКЦІЇ В ЗАДАЧІ ПОШУКУ МАГНІТНИХ АНОМАЛІЙ**

Анотація. За просторовим розподілом величин параметрів магнітного поля в кожній точці площини спостереження визначено значення всіх складових вектора магнітної індукції і його просторових похідних першого порядку. Обернену задачу розв'язано за допомогою аналітичного методу власних векторів. Роботу алгоритму промодельовано на реальних даних магнітометричних досліджень у геомагнітному полі.

Ключові слова: магнітні аномалії, обернена задача магнітостатики, тензор просторових похідних, перетворення Фур'є, СКВІД-градієнтометр.

M.A. Primin, I.V. Nedayvoda

**METHOD AND ALGORITHM FOR OBTAINING ELEMENTS OF THE TENSOR
OF SPATIAL DERIVATIVES OF THE MAGNETIC INDUCTION VECTOR
IN THE PROBLEM OF MAGNETIC ANOMALIES SEARCH**

Abstract. The values of all the components of the magnetic induction vector and its first spatial derivatives at the points of observation plane are obtained by the spatial distribution of the magnetic field parameters at each observation point. The inverse problem is solved with the use of the analytic eigenvector method. The algorithm is simulated using real data of magnetometric studies in geomagnetic field.

Keywords: magnetic anomalies, magnetostatic inverse problem, spatial derivatives tensor, Fourier transformation, SQUID gradiometer.

Примін Михайл Андреевич,

доктор техн. наук, заведуючий відділом Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: priminma@meta.ua.

Недайвода Ігорь Владимирович,

научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: igorvld63@meta.ua.