УДК 519.21

Б.В. ДОВГАЙ, І.К. МАЦАК

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ В СИСТЕМАХ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ $M/M/m$

Анотація. Досліджено асимптотичну поведінку майже напевне максимальної довжини черги в системах масового обслуговування. Для системи $M/M/m$, $1 \le m < \infty$, установлюється твердження типу закону повторного логарифма. Розглянуто також випадок $m = \infty$, для якого асимптотика має істотно інший характер.

Ключові слова: системи масового обслуговування $M/M/m$, екстремуми довжини черги, асимптотична поведінка майже напевне.

ОСНОВНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Розглянемо m-канальну систему масового обслуговування (СМО), на яку надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування ξ має експоненційний розподіл

$$\mathbf{P}(\xi < x) = 1 - \exp(-\mu x), \;\; x \ge 0,$$

тобто це СМО типу $M/M/m$ (див. [1–3]).

На параметри λ та μ накладено умову

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1. \tag{1}$$

Нехай в момент $S_0 = 0$ система порожня, а $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ — послідовні моменти звільнення системи після відповідного періоду зайнятості (за умови (1) така нескінчена послідовність S_k завжди існує [2, с. 468]).

Під довжиною черги розуміємо загальну кількість заявок, які знаходяться на обслуговуванні або чекають його. Позначимо $Q(t)$ довжину черги в момент часу t:

$$\overline{Q}(t) = \sup_{0 \le s < t} Q(s), \;\; \overline{Q}_n = \overline{Q}(S_n).$$

У роботах [4–9] розглянуто задачу знаходження асимптотики величин $\overline{Q}_n$ та $\overline{Q}(t)$ навіть у більш загальній постановці. Але слід зазначити, що у всіх названих вище роботах досліджувався випадок слабкої збіжності.

У цій статті вивчається асимптотична поведінка екстремальних значень $\overline{Q}_n$ та $\overline{Q}(t)$ майже напевне (м.н.). Окрім того, ми розглянемо випадок $m = \infty$ (необмежена кількість каналів обслуговування). Виявляється, що для нього асимптотика $\overline{Q}_n$ та $\overline{Q}(t)$ істотно відрізняється від випадку $1 \le m < \infty$.

Сформулюємо основні результати роботи.

Теорема 1. Нехай для СМО $M/M/m$, $1 \le m < \infty$, виконано умову (1). Тоді м.н.

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\overline{Q}(t) \ln \frac{1}{\rho} - \ln t}{L_2(t)} = 1, \tag{2}$$

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{\overline{Q}(t) \ln \frac{1}{\rho} - \ln t}{L_3(t)} = -1, \tag{3}$$

тут і далі $L_2(t) = \ln \ln t$, $L_3(t) = \ln \ln \ln t$.

Зауваження 1. Якщо виконуються умови теореми 1, тоді рівності (2) та (3) справджуються у разі заміни $\overline{Q}(t)$ на $\overline{Q}_n$ і t на n.

Розглянемо випадок $m=\infty$, для якого використаємо такі позначення:

$$\widetilde{\rho}=\frac{\lambda}{\mu},\ a=\lambda^{-1}\exp(\widetilde{\rho}),$$

$$\alpha_n=\frac{\ln n}{L_2(n)}\left(1+\frac{L_3(n)+\ln\widetilde{\rho}+1}{L_2(n)}\right),$$

$$\alpha(t)=\frac{\ln t-\ln a}{L_2(t)}\left(1+\frac{L_3(t)+\ln\widetilde{\rho}+1}{L_2(t)}\right).$$

Теорема 2. Для СМО $M/M/\infty$ для довільних $\lambda>0$, $\mu>0$ виконуються рівності

$$\mathbf{P}(\exists n_0\ \forall n>n_0\ \overline{Q}_n\in A_n=\{[\alpha_n]+k,\ k=0,1,2,3\})=1, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}(\exists t_0\ \forall t>t_0\ \overline{Q}(t)\in A(t)=\{[\alpha(t)]+k,\ k=-1,0,1,2,3,4\})=1, \tag{5}$$

де $[x]$ — ціла частина числа x.

ДЕЯКІ ЛЕМИ ПРО АСИМПТОТИКУ МАКСИМУМІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

У цьому розділі наведено кілька загальних допоміжних результатів досліджень асимптотичної поведінки м.н. екстремальних значень дискретних незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.).

Розглянемо послідовність $\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots$ — н.о.р.в.в. з функцією розподілу (ф.р.) $F(t)=\mathbf{P}(\xi<t)$. Нехай $z_n=\max\limits_{1\le i\le n}\xi_i$.

Припустимо, що ξ — дискретна випадкова величина (в.в.) з розподілом $(k,\ p_k)$, $k\ge1$, для якої

$$\mathbf{P}(\xi=k)=p_k>0,\ \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1.$$

Покладемо

$$R(k)=-\ln(1-F(k))=-\ln\left(\sum_{i\ge k}p_i\right),\ r(k)=R(k)-R(k-1),$$

$$a_n=\max\left(k:\sum_{i\ge k}p_i\ge\frac{1}{n}\right).$$

Лема 1. Нехай ξ — дискретна в.в. з розподілом $(k,\ p_k)$, $k\ge1$, $r(k)$ — монотонна функція і виконано умову

$$r(k)\to\infty,\ k\to\infty. \tag{6}$$

Тоді рівність

$$\mathbf{P}(z_n<a_n-1\ \text{н.ч.})=0$$

має місце тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k\ge1}\exp(-e^{r(k)})<\infty. \tag{7}$$

Більш того, якщо (7) справджується, то

$$\mathbf{P}(z_n=a_n-1\ \text{н.ч.})=1.$$

Лема 2. Нехай ξ — дискретна випадкова величина з розподілом $(k,\, p_k)$, $k \ge 1$, $r(k)$ — монотонна функція і виконано умову (6). Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-jr(k)) \tag{8}$$

збігається для $j = m$ і розбігається для $j = m-1$, то

$$\mathbf{P}(z_n \ge a_n + m + 1 \ \text{н.ч.}) = 0,$$

$$\mathbf{P}(z_n \ge a_n + m \ \text{н.ч.}) = 1.$$

Лема 3. Нехай ξ — дискретна випадкова величина з розподілом $(k,\, p_k)$, $k \ge 1$, $R(t)$ — диференційовна функція. І нехай

$$R'(t) = \tilde{r}(t) = t^b h(t), \ -1 < b \le 0,$$

де $h(t)$ — повільно змінна функція для $t \to \infty$, причому для $b = 0$ виконується нерівність $|h(t)| \le C$.

Тоді м.н.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\tilde{r}(a_n)(z_n - a_n)}{L_2(n)} = 1, \tag{9}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\tilde{r}(a_n)(z_n - a_n)}{L_3(n)} = -1. \tag{10}$$

Доведення лем 1–3 наведено в [10].

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1

Доведемо рівність (2). Виведемо її із рівності (9). Позначимо $N(t) = \max(k \ge 0 \colon S_k < t)$, $t \ge 0$, лічильний процес для послідовності S_k,

$$Y_k = \sup_{S_{k-1} \le s < S_k} Q(s), \ k \ge 1.$$

Оскільки послідовність S_k утворює моменти регенерації процесу $Q(t)$, то Y_k є послідовністю н.о.р.в.в. Зрозуміло, що

$$\overline{Q}_n = \max_{1 \le k \le n} Y_k,$$

$$\overline{Q}_{N(t)} \le \overline{Q}(t) \le \overline{Q}_{N(t)+1}. \tag{11}$$

Нехай

$$q(u) = \mathbf{P}(Y_k \ge u).$$

Якщо виконано умови теореми 1, тоді для функції $q(u)$ відома така формула (див. [9]): для $u > m$

$$q(u) = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{(m\rho)^k} + \frac{m!((1/\rho)^{u-1} - (1/\rho)^m)}{m^m (1-\rho)} \right)^{-1} = \frac{m^m (1-\rho)\rho^{u-1}}{m!} + O(\rho^{2u}). \tag{12}$$

Використовуючи (12), неважко провести оцінювання функцій $R(u)$ та $\tilde{r}(u)$, що фігурують у лемі 3:

$$R(u) = -\ln q(u) = \ln\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{(m\rho)^k} + \frac{m!\,((1/\rho)^{u-1} - (1/\rho)^m)}{m^m (1-\rho)} \right) =$$

$$= (u-1)\ln(1/\rho) - \ln\left(\frac{m^m (1-\rho)}{m!}\right) + O(\rho^u), \tag{13}$$

$$\widetilde{r}(u) = (1/\rho)^{u-1} \ln(1/\rho) \frac{m!}{m^m (1-\rho)} q(u) = \ln(1/\rho) + o(1). \tag{14}$$

Із співвідношень (13), (14) випливає, що послідовність н.о.р.в.в. Y_n задовольняє умови леми 3. Таким чином, щоб застосувати цю лему, залишається знайти величину a_n.

Ще раз застосовуючи рівність (12), маємо

$$a_n = \max\left(k : \sum_{i\ge k} p_i \ge \frac{1}{n} \right) = \max\left(k : \frac{1}{q(k)} \le n \right) =$$

$$= \max\left(k : \left(\frac{1}{\rho}\right)^{k-1} \le \frac{m^m (1-\rho)}{m!} \left(n - \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{(m\rho)^k} + \frac{(1/\rho)^m}{m^m (1-\rho)} \right) \right) =$$

$$= \max\left(k : k \le 1 + \frac{\ln n + \ln(m^m (1-\rho)/m!) + O(1/n)}{\ln(1/\rho)} \right) = 1 + \left[\frac{\ln n + O(1)}{\ln(1/\rho)} \right]. \tag{15}$$

А отже, з леми 3 та асимптотичних співвідношень (14), (15) одержуємо таку рівність:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\overline{Q}_n \ln(1/\rho) - \ln n}{L_2(n)} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{16}$$

Далі опишемо імплікацію (16) $\Rightarrow$ (2).

Очевидно, що коли t пробігає додатну числову вісь $(0, \infty)$, то процес $N(t)$ пробігає усі цілі додатні числа м.н. Звідси зрозуміло, що в (16) замість n можна підставити $N(t)$, тобто

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\overline{Q}_{N(t)} \ln(1/\rho) - \ln N(t)}{L_2(N(t))} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{17}$$

Відомо [2, с. 219–220], що $Q(t)$ буде процесом загибелі та розмноження з параметрами

$$\lambda_k = \lambda, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_0 = 0, \ \mu_k = \begin{cases} k\mu, & 1 \le k \le m, \\ m\mu, & k > m. \end{cases}$$

Тоді якщо виконується умова (1), то існують стаціонарні ймовірності перебування процесу $Q(t)$ в станах k:

$$\pi_k = \limsup_{t\to\infty} \mathbf{P}(Q(t) = k), \ k = 0, 1, 2 \ldots$$

Окрім того, послідовність S_k утворює процес відновлення, а $T_k = S_k - S_{k-1}$, $k \ge 1$, є послідовністю н.о.р.в.в., до того ж

$$ET_k = a = \frac{1}{\lambda \pi_0}, \ \pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \right)^{-1}$$

(див. [1], [2, с. 493], [9]).

Із посиленого закону великих чисел маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{a}\ \text{ м.н.}$$

Звичайно, для $N(t)$ відомі і більш сильні асимптотичні результати, але нам досить останньої рівності. З неї для $t\to\infty$ випливає

$$\ln N(t)=\ln t-\ln a+o(1)\ \text{ м.н.} \tag{18}$$

Підставляємо останній вираз у рівність (17) і одержуємо

$$\limsup_{t\to\infty}\overline{Q}_{N(t)}\frac{\ln(1/\rho)-\ln t}{\ln\ln t}=1\ \text{ м.н.} \tag{19}$$

Зрозуміло, що так само і $\overline{Q}_{N(t)+1}$ задовольняє рівність (19). Щоб отримати звідси (2), залишається застосувати нерівності (11).

Рівність (3) теореми 1 виводять із рівності (10) леми 3 за допомогою аналогічних міркувань. □

Зауваження 2. Якщо в теоремі 1 маємо $m=1$, $\rho=\lambda/\mu=1$, то $q(u)=1/u$ (подібні обчислення див. в [9]). І нехай для деякої зростаючої послідовності d_n, $d_n>0$, справджується

$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{d_n}=\infty. \tag{20}$$

Тоді

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\overline{Q}_n}{d_n}=\infty\right)=1. \tag{21}$$

Якщо умова (20) не виконується, то

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\overline{Q}_n}{d_n}=0\right)=1 \tag{22}$$

(див. [11, с. 200–201, приклад 4.3.4]).

Отже, із рівностей (21) та (22) випливає, що для СМО $M/M/1$ за умови $\rho=1$ асимптотичну поведінку величин $\overline{Q}_n$ та $\overline{Q}(t)$ не можна описати співвідношеннями типу (2), (3).

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 2

Будемо використовувати позначення, введені вище. Для СМО $M/M/\infty$ для довільних $\lambda>0$, $\mu>0$ існують стаціонарні ймовірності π_k. Так само, як і у попередньому випадку, використаємо такі формули:

$$\pi_0=\exp(-\widetilde{\rho}),$$

$$ET_k=a=\frac{1}{\lambda\pi_0}=\frac{\exp(\widetilde{\rho})}{\lambda}, \tag{23}$$

$$q(u)=\left(\sum_{k=0}^{u-1}\frac{k!}{(\widetilde{\rho})^k}\right)^{-1} \tag{24}$$

(див. [1, 2, 9]).

У подальшому доведення буде ґрунтуватися на лемах 1, 2. Але для їхнього застосування необхідно досить точно обчислити величину a_n. Розв'язання цієї задачі містить така лема.

Лема 4. Нехай $q(k)$ задано рівністю (24). Тоді для досить великих n

$$a_n = \max\left(k : q(k) \geq \frac{1}{n}\right) = [\alpha_n] + 1, \tag{25}$$

де α_n визначено у теоремі 2.

Доведення. Аналогічно як і для рівності (15) маємо

$$a_n = \max\left(k : \frac{1}{q(k)} \leq n\right) = \max\,(k : R(k) \leq \ln n), \tag{26}$$

де

$$R(k) = \upsilon_1(k) + \upsilon_2(k),$$

$$\upsilon_1(k) = \ln(k-1)! + (k-1)\ln\frac{1}{\tilde{\rho}},\; \upsilon_2(k) = \ln\left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{k-1} + \frac{\tilde{\rho}^2}{(k-1)(k-2)} + \ldots\right).$$

Для оцінювання $\upsilon_2(k)$ застосуємо відому із аналізу нерівність

$$|\ln(1+z) - z| \leq z^2 \text{ для } |z| < \frac{1}{2}.$$

Тоді для $k \to \infty$ маємо

$$\upsilon_2(k) = \ln\left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{\tilde{\rho}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{27}$$

А щоб обчислити $\upsilon_1(k)$, скористаємось формулою Стірлінга [12, с. 67]

$$\ln n! = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отже,

$$\upsilon_1(k) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(k - \frac{1}{2}\right)\ln(k-1) - (k-1)(\ln\tilde{\rho} + 1) + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Звідси та з рівності (27) отримуємо

$$R(k) = k\left(\ln k - \ln\tilde{\rho} - 1 + O\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right). \tag{28}$$

Далі введемо функцію

$$\alpha_n(z) = \frac{\ln n}{L_2(n)}\left(1 + \frac{L_3(n) + \ln\tilde{\rho} + 1 + z}{L_2(n)}\right)$$

і підставимо її замість k у рівність (28). Тоді

$$R(\alpha_n(z)) = \alpha_n(z)\left(L_2(n) - L_3(n) - \ln\tilde{\rho} - 1 + O\left(\frac{L_3(n)}{L_2(n)}\right)\right) = B(n, z)\ln n,$$

де

$$B(n, z) = \left(1 + \frac{L_3(n) + \ln\tilde{\rho} + 1 + z}{L_2(n)}\right)\left(1 - \frac{L_3(n) + \ln\tilde{\rho} + 1 + O(L_3(n)/L_2(n))}{L_2(n)}\right).$$

Елементарні перетворення дозволяють записати $B(n, z)$ так:

$$B(n, z) = 1 + \frac{zL_2(n) - L_3^2(n) + O(L_3(n))}{L_2^2(n)}. \tag{29}$$

Із формули (29) випливає, що для досить великих n за умови $z>0$ виконується нерівність $B(n, z)>1$, а за умови $z \le 0$ — нерівність $B(n, z)<1$. Звідси зрозуміло, що найбільше ціле k, для якого $R(k) \le \ln n$, визначає формула

$$k = a_n = [\alpha_n(0)]+1.$$

Остання рівність та очевидна рівність $\alpha_n(0)=\alpha_n$ разом із (26) завершують доведення леми 4. □

Знову повертаючись до теореми 2, розглянемо послідовність н.о.р.в.в. Y_n із СМО $M / M / \infty$, які відповідають екстремальним значенням довжини черги на інтервалах (S_{n-1}, S_n). Знайдемо для них функції $R(k)$ та $r(k)$. Згідно з рівностями (24), (27) маємо

$$R(k) = -\ln q(k) = \ln\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{i!}{\widetilde{\rho}^{\,i}}\right) =$$

$$= \ln((k-1)!/\widetilde{\rho}^{\,k-1}) + \ln\left(1+\frac{\widetilde{\rho}}{k-1}+\frac{\widetilde{\rho}^{\,2}}{(k-1)(k-2)}+\ldots\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \ln i - (k-1)\ln\widetilde{\rho} + \frac{\widetilde{\rho}}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Звідси

$$r(k) = R(k) - R(k-1) = \ln k - \ln\widetilde{\rho} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{30}$$

$$r(k) - r(k-1) = \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Остання рівність означає, що для досить великих k функція $r(k)$ буде монотонно зростаючою. Скориставшись рівністю (30), також неважко перевірити, що умова (7) леми 1 виконується. Таким чином, за лемою 1

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\overline{Q}_n < a_n - 1 \text{ н.ч.}) = 0, \\ &\mathbf{P}(\overline{Q}_n = a_n - 1 \text{ н.ч.}) = 1. \end{aligned} \tag{31}$$

Так само легко перевіряють, що ряд (8) збігається для $j=2$ і розбігається для $j=1$. Тоді, застосовуючи лему 2, отримуємо

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\overline{Q}_n > a_n + 2 \text{ н.ч.}) = 0, \\ &\mathbf{P}(\overline{Q}_n = a_n + 2 \text{ н.ч.}) = 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Величину a_n в (31), (32) знайдено у лемі 4.

Разом співвідношення (31) та (32) дають

$$\mathbf{P}(\exists n_0 \ \forall n \ge n_0 : \overline{Q}_n \in \{a_n + k,\ k = -1, 0, 1, 2\}) = 1. \tag{33}$$

Рівність (4) з теореми 2 негайно випливає із співвідношень (25) та (33).

Щоб зробити перехід від (4) до (5) у теоремі 2, необхідно оцінити величину $[\alpha_{N(t)}]$. Для цього скористаємось оцінкою (18) та (23):

$$\alpha_{N(t)} = \frac{\ln N(t)}{L_2(N(t))}\left(1+\frac{L_3(N(t))+\ln\widetilde{\rho}+1}{L_2(N(t))}\right) =$$

$$= \frac{\ln t - \ln a + o(1)}{L_2(t)+O(1/\ln t)}\left(1+\frac{L_3(t)+\ln\widetilde{\rho}+1+O(1/(L_2(t)\ln t))}{L_2(t)+O(1/\ln t)}\right) =$$

$$= \frac{\ln t - \ln a}{L_2(t)} \left(1 + \frac{L_3(t) + \ln \tilde{\rho} + 1}{L_2(t)} \right) + O\left(\frac{1}{L_2(t)} \right) = \alpha(t) + O\left(\frac{1}{L_2(t)} \right) \text{ м.н.} \quad (34)$$

Тоді

$$\mathbf{P}(\exists t_0 \ \forall t > t_0 : [\alpha_{N(t)}] \in \{[\alpha(t)] + k, \ k = -1, 0, 1\}) = 1. \quad (35)$$

Отже, з рівностей (4) та (35) маємо

$$\mathbf{P}(\exists t_0 \ \forall t > t_0 : \overline{Q}_{N(t)} \in \{[\alpha(t)] + k, \ k = -1, 0, 1, 2, 3, 4\}) = 1. \quad (36)$$

Якщо повторити викладки із оцінювання (34) для $\alpha_{N(t)+1}$, то отримаємо

$$\alpha_{N(t)+1} = \alpha(t) + O\left(\frac{1}{L_2(t)} \right) \text{ м.н.}$$

(звичайно, це зовсім не означає, що випадкові величини $\alpha_{N(t)}$ та $\alpha_{N(t)+1}$ еквівалентні).

А отже, для $\alpha_{N(t)+1}$ так само виконується рівність (35) і

$$\mathbf{P}(\exists t_0 \forall t > t_0 : \overline{Q}_{N(t)+1} \in \{[\alpha(t)] + k, \ k = -1, 0, 1, 2, 3, 4\}) = 1. \quad (37)$$

Для завершення доведення теореми 2 залишається розглянути разом співвідношення (11), (36), (37). □

Отже, досліджено асимптотичну поведінку майже напевне екстремальних значень довжини черги в системі $M / M / m$. На нашу думку, запропоновані методи будуть корисними і для дослідження асимптотики екстремальних значень часу чекання в черзі для СМО $M / M / m$, а також і для більш загальних систем $M / G / m$ та $G / M / m$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Москва: Наука, 1966. 432 с.
2. Карлин С. Основы теории случайных процессов. Москва: Мир, 1971. 537 с.
3. Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. Київ: Вища шк., 1987. 248 с.
4. Cohen J.W. Extreme values distribution for the $M / G / 1$ and $GI / M / 1$ queueing systems. *Ann. Inst. H. Poincare., Sect. B.* 1968. Vol. 4. P. 83–98.
5. Anderson C.W. Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes. *J. Appl. Prob.* 1970. Vol. 7. P. 99–113.
6. Iglehart D.L. Extreme values in the $GI / G / 1$ gueue. *Ann. Math. Statist*. 1972. Vol. 43. P. 627–635.
7. Serfozo R.F. Extreme values of birdh and death processes and queues. *Stochastic Processess and Their Applications*. 1988. Vol. 27. P. 291–306.
8. Asmussen S. Extreme values theory for queues via cycle maxima. *Extremes*. 1998. Vol. 1. P. 137–168.
9. Закусило О.К., Мацак І.К. Про екстремальні значення деяких регенеруючих процесів. *Теорія ймовірн. та мат. статист*. 2017. Вип. 97. С. 58–71.
10. Мацак І.К. Асимптотична поведінка екстремальних значень випадкових величин. Дискретний випадок. *Укр. мат. журн.* 2016. Т. 68, № 7. С. 945–956.
11. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. Москва: Наука, 1984. 303 с.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. Москва: Мир, 1967. 498 с.

Надійшла до редакції 12.03.2018

Б.В. Довгай, И.К. Мацак

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $M / M / m$

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение почти наверное максимальной длины очереди в системах массового обслуживання. Для системы $M / M / m$, $1 \leq m < \infty$, устанавливается утверждение типа закона повторного логарифма. Рассматривается также случай $m = \infty$, для которого асимптотика имеет совершенно другой характер.

Ключевые слова: системы массового обслуживания $M / M / m$, экстремумы длины очереди, асимптотическое поведение почти наверное.

B.V. Dovhai, I.K. Matsak

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF EXTREME VALUES OF QUEUE LENGTH IN $M / M / m$ SYSTEMS

Abstract. The paper investigates the asymptotic behavior of almost surely extreme values of processes specifying queue length. For a system $M / M / m$, $1 \leq m < \infty$, a statement of the type of law of the iterated logarithm is established. We also consider the case $m = \infty$, for which the asymptotic behavior is much different.

Keywords: queuing system $M / M / m$, extreme values of queue length, asymptotic behavior almost surely.

Довгай Богдан Валерійович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: bogdov@gmail.com.

Мацак Іван Каленикович,
доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: ivanmatsak@univ.kiev.ua.