УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

О СТРОБОСКОПИЧЕСКОЙ СТРАТЕГИИ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛАТЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрены линейные дифференциальные игры с терминальной функцией платы и интегральными ограничениями на управления. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в классе квазистратегий. Предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение игры за конечное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий. Показано, что без дополнительных предположений это время совпадает с гарантированным временем в классе квазистратегий.

Ключевые слова: линейная дифференциальная игра, терминальная функция платы, интегральные ограничения, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется подход к решению игровых задач динамики с терминальной функцией платы [1–4] и интегральными ограничениями на управления [5–9] применительно к общей схеме метода разрешающих функций [10, 11]. На основе методики [9, 12, 13] введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата в линейной дифференциальной игре с терминальной функцией платы и интегральными ограничениями в случае, когда условие М.С. Никольского [5] не имеет места. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии управления и дано сравнение гарантированных времен.

Важной особенностью общей схемы метода разрешающих функций является использование при построении управляющего воздействия информации о поведении противника в прошлом, необходимой для определения некоторого момента переключения, разделяющего активный и пассивный интервалы развития игры. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, определяемое стробоскопической стратегией Хайека [14]. В работах [4, 11] найдены условия, при которых информация о предыстории противника не играет роли. Одним из основных результатов настоящей работы является то, что для реализации гарантированного времени окончания линейной дифференциальной игры с терминальной функцией платы и интегральными ограничениями на управления можно ограничиться контруправлением без дополнительных условий.

Настоящая работа является развитием идей [1–13], примыкает к исследованиям [14–24] и определяет новые возможности применения метода разрешающих функций к решению игровых задач динамики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv. \tag{1}$$

Здесь $z \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^k$, $n \ge 1$, $m \ge 1$, $k \ge 1$; A, B, C — постоянные прямоугольные матрицы размера $n \times n$, $n \times m$, $n \times k$ соответственно; u —

управляющий параметр первого игрока; υ — управляющий параметр второго игрока. Параметры u и υ выбираются в виде измеримых функций $u = u(\cdot)$ и $\upsilon = \upsilon(\cdot)$ из класса $L_p[0,+\infty)$, $p > 1$, и удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^\infty ||u(\tau)||^p \, d\tau \le \mu^p, \ \mu > 1, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty ||\upsilon(\tau)||^p \, d\tau \le \nu^p, \ \nu > 1, \tag{3}$$

Такие управления назовем допустимыми.

Кроме процесса (1) задана собственная выпуклая замкнутая ограниченная снизу по z функция $\sigma(z)$, $\sigma: R^n \to R^1$, значения которой на траекториях процесса (1) определяют момент окончания игры.

Игру для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) из начального положения $z_0 \in R^n$ считаем законченной в момент $T = T(z_0)$, если по любой допустимой функции $\upsilon(t)$, $t \in [0, T]$, можно построить допустимую функцию

$$u(t) = u(t, z_0, \upsilon_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \tag{4}$$

где $\upsilon_t(\cdot) = \{\upsilon(\tau), \tau \in [0, t]\}$, или допустимое контруправление

$$u(t) = u(t, z_0, \upsilon(t)), \ t \in [0, T], \tag{5}$$

такое, что для абсолютно непрерывного решения $z(t)$ задачи Коши $\dot{z} = Az + Bu(t) - C\upsilon(t)$, $z(0) = z_0$, выполняется неравенство

$$\sigma(z(T)) \le 0. \tag{6}$$

Полагают, что управление $u(t) = u(z_0, \upsilon_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [10], а контруправление [15] $u(t) = u(z_0, \upsilon(t))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [14].

Согласно определению сопряженной функции и с учетом теоремы Фенхеля–Моро [25] имеем

$$\sigma(z) = \sup_{\psi \in R^n} [(\psi, z) - \sigma^*(\psi)],$$

где

$$\sigma^*(\psi) = \sup_{z \in R^n} [(\psi, z) - \sigma(z)]. \tag{7}$$

Функция $\sigma^*(\psi)$ собственная замкнутая и выпуклая [25]. Эффективное множество функции $\sigma^*(\psi)$ имеет вид $\operatorname{dom} \sigma^* = \{\psi \in R^n : \sigma^*(\psi) < +\infty\}$. В силу ограниченности снизу собственной функции $\sigma(z)$ и соотношения (7) получим $\sigma^*(0) = -\inf_{z \in R^n} \sigma(z)$, а значит, $0 \in \operatorname{dom} \sigma^*$.

Будем считать, что L — линейная оболочка множества $\operatorname{dom} \sigma^*$ (пересечение всех линейных подпространств, содержащих множество $\operatorname{dom} \sigma^*$). Тогда она является линейным подпространством. Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n на L. Справедливо соотношение $\sigma(z) = \sigma(\pi z)$, $z \in R^n$.

Рассмотрим линейные отображения $\pi e^{At} B_1 R^m \to L$, $\pi e^{At} C R^k \to L$, $t \ge 0$, где B_1 — постоянная прямоугольная матрица размера $n \times m$.

Условие 1. Пусть существует непрерывная неособая матрица $D(\cdot): R^k \to R^m$, которая является решением матричного уравнения $\pi e^{At} B_1 X = \pi e^{At} C$, где X — искомая матрица, B_1 — постоянная прямоугольная матрица размера $n \times m$.

Рассмотрим функцию [5]

$$\chi^p(t) = \sup_{\int_0^t ||\omega(\tau)||^p d\tau \le 1} \int_0^t ||D(t-\tau)\omega(\tau)||^p \, d\tau,$$

где $\omega(\cdot)$ — произвольная функция из пространства $L_p^k[0,t)$ с указанным ограничением, а $D(\cdot): R^k \to R^m$ — некоторая непрерывная неособая матрица, удовлетворяющая условию 1.

С помощью функции $\chi^p(t)$ определим величину [5] $\mathrm{X}^p = \sup\limits_{0 \le t < \infty} \chi^p(t)$.

Условие 2. Справедливо неравенство $\hat{\gamma} = \mu^p - \nu^p \mathrm{X}^p > 0$.

Обозначим

$$U(t, \tau, \upsilon, \alpha) = \{u \in R^m : ||u|| \le (||D(t-\tau)\upsilon||^p + \alpha\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}\},$$

где $(t, \tau) \in \Delta = \{(t, \tau): 0 \le \tau \le t < \infty\}$, $\upsilon \in R^k$, $\alpha \ge 0$. Отображение $U(t, \tau, \upsilon, \alpha)$ является выпуклозначным компактнозначным многозначным отображением [25].

Пусть справедливы условия 1, 2 и $\gamma(\cdot)$ — измеримая функция из класса $L_p^m[0, +\infty)$, $p > 1$, удовлетворяющая ограничению $\int\limits_0^\infty ||\gamma(\tau)||^p \, d\tau \le \hat{\gamma}$. Следуя [9, 12, 13], назовем ее функцией сдвига. Зафиксируем некоторую функцию сдвига $\gamma(\cdot)$ и положим

$$\xi(t) = \xi(t, z_0, \gamma(\cdot)) = \pi e^{tA} z_0 + \int\limits_0^t \pi e^{(t-\tau)A} B\gamma(\tau) \, d\tau, \ (t, \tau) \in \Delta, \ z_0 \in R^n.$$

Условие 3. Пусть справедливы условия 1, 2. Для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot)$ при любом $\alpha \ge 0$ на множестве $\Delta \times R^k$ имеет место неравенство

$$\min_{u \in U(t, \tau, \upsilon, \alpha)} \max_{\psi \in \mathrm{dom}\, \sigma^*} [(\psi, \pi e^{(t-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(t-\tau)A} C\upsilon)] \le 0.$$

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}(z_0, \gamma(\cdot)) = \{t \ge 0 : \sigma(\xi(t, z_0, \gamma(\cdot))) \le 0\}.$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t \ge 0$, то положим $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (6) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 1–3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $\mathrm{P}(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто, $\mathrm{P} \in \mathrm{P}(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент Р с использованием управления вида (5).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3). Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим многозначное отображение для $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $\upsilon \in R^k$

$$U_0(\tau, \upsilon) = \left\{ u \in U\left(\mathrm{P}, \tau, \upsilon, \frac{1}{\mathrm{P}}\right) : \max_{\psi \in \mathrm{dom}\, \sigma^*} [(\psi, \pi e^{(P-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(P-\tau)A} C\upsilon)] \le 0 \right\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и функции $\sigma(z)$ отображение $U_0(\tau, \upsilon)$ $L \otimes B$-измеримо [11] при $\upsilon \in R^k$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. В работе [26] впервые введено понятие лексикографического максимума по ортогональому базису $e_1, \ldots, e_n$ от компакта $A \in K(R^n)$ по формуле

$$\operatorname*{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_n} A = \bigcap_{k=0}^n A_k,$$

где $A_0 = A$, $A_k = \{x \in A_{k-1} : (x, e_k) = c(A_{k-1}, \psi)\}$, $c(A_{k-1}, \psi)$ — опорная функция множества A_{k-1} [25], $k = 1, \ldots, n$. Множество $\operatorname*{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_n} A$ состоит из одной точки, принадлежащей множеству крайних точек выпуклой оболочки множества A. При этом, если взять многозначное отображение $U(\tau, \upsilon)$ и ортогональный базис такой, что $e_1 = \psi$, $\psi \in R^m$, $\psi \neq 0$, то выполняется равенство $(\operatorname*{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_m} U(\tau, \upsilon), \psi) = c(U(\tau, \upsilon), \psi)$ [27]. Поэтому согласно теореме об опорной функции [28] многозначное отображение $U_0(\tau, \upsilon)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_0(\tau, \upsilon) = \operatorname*{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_m} U_0(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [11], и $\| u_0(\tau, \upsilon) \| = (\| D(\mathrm{P} - \tau)\upsilon \|^p + \frac{1}{\mathrm{P}} \hat{\gamma})^{1/p}$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $\upsilon \in R^k$.

Положим управление первого игрока $u_0(\tau) = u_0(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(\mathrm{P}) = \xi(\mathrm{P}, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^{\mathrm{P}} \pi e^{(\mathrm{P} - \tau)A} [B[u_0(\tau) - \gamma(\tau)] - C\upsilon(\tau)] d\tau. \qquad (8)$$

Приняв во внимание равенство $\sigma(z(\mathrm{P})) = \sigma(\pi z(\mathrm{P}))$, формулу (8) и определение сопряженной функции, получим

$$\sigma(z(\mathrm{P})) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(\psi, \xi(\mathrm{P}, z_0, \gamma(\cdot))) +$$
$$+ \int_0^{\mathrm{P}} (\psi, \pi e^{(\mathrm{P} - \tau)A} [B[u_0(\tau) - \gamma(\tau)] - C\upsilon(\tau)] d\tau - \sigma^*(p)]. \qquad (9)$$

Тогда, с учетом закона выбора управления первым игроком, из соотношения (9) вытекает

$$\sigma(z(\mathrm{P})) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}, z_0, \gamma(\cdot)) \le 0,$$

откуда следует неравенство (6) в момент Р.

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Имеем

$$\int_0^{\mathrm{P}} \| u_0(\tau) \|^p \, d\tau = \int_0^{\mathrm{P}} \| D(\mathrm{P} - \tau) \upsilon(\tau) \|^p \, d\tau + \frac{1}{\mathrm{P}} \hat{\gamma} \int_0^{\mathrm{P}} d\tau \le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p,$$

что завершает доказательство теоремы.

Условие 4. Пусть существует непрерывная неособая матрица $\Phi(\cdot) : R^k \to R^m$, являющаяся решением матричного уравнения $\pi e^{At} BX = \pi e^{At} C$, где X — искомая матрица.

Как и ранее, рассмотрим функцию [5]

$$\chi_\Phi^p(t) = \sup_{\int_0^t \|\omega(\tau)\|^p d\tau \le 1} \int_0^t \| \Phi(t - \tau) \omega(\tau) \|^p \, d\tau,$$

где $\omega(\cdot)$ — произвольная функция из пространства $L_p^k[0, t)$ с указанным ограничением, и определим величину $\mathrm{X}_\Phi^p = \sup_{0 \le t < \infty} \chi_\Phi^p(t)$.

Условие 5. Справедливо неравенство $\hat{\gamma}_\Phi = \mu^p - \nu^p \mathrm{X}_\Phi^p \ge 0$.

Замечание 1. Пусть справедливы условия 4, 5. Рассмотрим многозначное отображение $W(t)=\left\{u \in R^m : ||u|| \le \left(\frac{1}{t}\hat{\gamma}_{\Phi}\right)^{1/p}\right\}$, $t>0$. Обозначим $\Gamma_t = \{\gamma(\cdot) : \gamma(t) \in \in W(t)\}$ совокупность измеримых селекторов отображения $W(t)$. Если $\gamma(\cdot) \in \Gamma_t$, то $\gamma(\cdot)$ — измеримая функция из класса $L_p^m[0, t)$, $p>1$, удовлетворяющая ограничению $\int_0^t ||\gamma(\tau)||^p \, d\tau \le \hat{\gamma}_{\Phi}$, $t>0$. Легко проверить, что для $\gamma(\cdot) \in \Gamma_t$ справедливо включение

$$0 \in \pi e^{(t-\tau)A} BU\left(t, \tau, \upsilon, \frac{1}{t}\right) - \pi e^{(t-\tau)A} C\upsilon - \pi e^{(t-\tau)A} B\gamma(\tau), \tag{10}$$

где $U\left(t, \tau, \upsilon, \frac{1}{t}\right) = \left\{u \in R^m : ||u|| \le \left(||\Phi(t-\tau)\upsilon||^p + \frac{1}{t}\hat{\gamma}\right)^{1/p}\right\}$, $(t, \tau) \in \Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le \le t < \infty\}$, $\upsilon \in R^k$.

Из соотношения (10) с учетом аппарата опорных функций [25] следует, что существует измеримый селектор $\gamma(\cdot)$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma_t$, для которого выполняется условие 3 и справедлива теорема 1. Приведенную схему, изложенную в теореме 1, с учетом замечания 1 можно рассматривать как аналог первого прямого метода Понтрягина [16, 17] для линейных дифференциальных игр с терминальным функционалом и интегральными ограничениями. Доказательство теоремы 1 использует аналог условия М.С. Никольского [5] и является обобщением его результатов.

Рассмотрим для $(t, \tau) \in \Delta$, $\upsilon \in R^k$, $z_0 \in R^n$ многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0) = \{\alpha \ge 0 : \inf_{u \in U(t, \tau, \upsilon, \alpha)} \sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [\psi, \pi e^{(t-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] -$$

$$- \pi e^{(t-\tau)A} C\upsilon + \alpha[(\psi, \xi(t)) - \sigma^*(\psi)]] \le 0\}. \tag{11}$$

Условие 6. Для некоторого начального положения $z_0 \in R^n$ и функции сдвига $\gamma(\cdot)$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta \times R^k$.

Если это условие выполнено, то по аналогии с работами [9, 12, 13] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции

$$\alpha^*(t, \tau, \upsilon, z_0) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)\}, \ \alpha_*(t, \tau, \upsilon, z_0) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)\},$$

где $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in R^k$, $z_0 \in R^n$. Нетрудно показать [11], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)$ замкнутозначно, $L \otimes B$-измеримо по совокупности (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in R^k$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $L \otimes B$-измеримы по совокупности (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in R^k$. Поэтому они суперпозиционно измеримы [11], т.е. $\alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)$ и $\alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой допустимой функции $\upsilon(\cdot)$, для которой выполняется ограничение (3). Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя — полунепрерывна снизу по переменной υ [10]. Тогда можно показать [9], что функции $\inf_{\upsilon \in R^k} \alpha^*(t, \tau, \upsilon, z_0)$ и $\sup_{\upsilon \in R^k} \alpha_*(t, \tau, \upsilon, z_0)$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, $z_0 \in R^n$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^1(z_0,\gamma(\cdot))=\left\{t\ge 0:\ \sigma(\xi(t,z_0,\gamma(\cdot)))\le 0,\ \ \int_0^t \sup_{v\in R^k}\alpha_*(t,\tau,v,z_0)d\tau<1\right\}.$$

Если неравенства в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*^1(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (6) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 1, 2, 6 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $\mathrm{P}_*^1(z_0,\gamma(\cdot))$ не пусто, $\mathrm{P}_*^1\in\mathrm{P}_*^1(z_0,\gamma(\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^1 с использованием управления вида (5).

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3). Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^1(\tau,v)=\{u\in U(\mathrm{P}_*^1,\tau,v,\alpha(\mathrm{P}_*^1,\tau,v,z_0)):\ \sup_{\psi\in\mathrm{dom}\ \sigma^*}[(\psi,\pi e^{(\mathrm{P}_*^1-\tau)A}B[u-\gamma(\tau)]-$$

$$-\pi e^{(\mathrm{P}_*^1-\tau)A}Cv)+\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v,z_0)[(\psi,\xi(\mathrm{P}_*^1,z_0,\gamma(\cdot)))-\sigma^*(\psi)]]\le 0\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(z)$ и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v,z_0)$ компактнозначное отображение $U_*^1(\tau,v)$ $L\otimes B$-измеримо [11] при $v\in R^k$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^1]$. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [28] многозначное отображение $U_*^1(\tau,v)$ содержит $L\otimes B$-измеримый селектор $u_*^1(\tau,v)=\underset{e_1,\dots,e_m}{\mathrm{lex\ max}}\,U_*^1(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [11], и $||u_*^1(\tau,v)||=(||D(\mathrm{P}_*^1-\tau)v||^p+\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v,z_0)\hat{\gamma})^{1/p}$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^1]$, $v\in R^k$.

Положим управление первого игрока $u_*^1(\tau)=u_*^1(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^1]$. Прибавив и вычтя в квадратных скобках выражения (9) величину $[(\psi,\xi(\mathrm{P}_*^1))-$ $-\sigma^*(\psi)]\int_0^{\mathrm{P}_*^1}\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v(\tau),z_0)d\tau$, получим

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1))=\max_{\psi\in\mathrm{dom}\ \sigma^*}\left\{[(\psi,\xi(\mathrm{P}_*^1))-\sigma^*(\psi)]\left(1-\int_0^{\mathrm{P}_*^1}\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v(\tau),z_0)d\tau\right)+\right.$$

$$+\int_0^{\mathrm{P}_*^1}[(\psi,\pi e^{(\mathrm{P}_*^1-\tau)A}B[u_*^1(\tau)-\gamma(\tau)]-\pi e^{(\mathrm{P}_*^1-\tau)A}Cv)+$$

$$\left.+\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v(\tau),z_0)[(\psi,\xi(\mathrm{P}_*^1))-\sigma^*(\psi)]]d\tau\right\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент P_*^1 выполнение неравенства

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1))\le\sigma(\xi(\mathrm{P}_*^1,z_0,\gamma(\cdot)))\left(1-\int_0^{\mathrm{P}_*^1}\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v(\tau),z_0)d\tau\right)\le 0,$$

поскольку по определению P_*^1 имеем $\sigma(\xi(\mathrm{P}_*^1, z_0, \gamma(\cdot))) \le 0,$ а также

$$1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau), z_0)d\tau \ge 1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{\upsilon \in R^k} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon, z_0)d\tau > 0.$$

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Имеем

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^1} ||u_*^1(\tau)||^p d\tau = \int_0^{\mathrm{P}_*^1} ||D(\mathrm{P}_*^1 - \tau)\upsilon(\tau)||^p d\tau + \hat{\gamma} \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon(\tau), z_0)d\tau \le$$

$$\le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{\upsilon \in R^k} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, \upsilon, z_0)d\tau < \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p,$$

что завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Если справедливы условия 1, 2 и для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot)$ на множестве $\Delta \times R^k$ выполнено условие 3, то для любого начального положения $z_0 \in R^n$ имеем $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)$, $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in R^k$. Поэтому справедливо условие 6 и на множестве $\Delta \times R^k$ имеем $\alpha_*(t, \tau, \upsilon, z_0) = \inf\{\alpha : \alpha \in \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon, z_0)\} = 0$

Рассмотрим множество

$$T(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \inf_{\int_0^t ||\upsilon(\tau)||^p d\tau \le \nu^p} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0)d\tau \ge 1, \right.$$

$$\left. \int_0^t \sup_{\upsilon \in R^k} \alpha_*(t, \tau, \upsilon, z_0)d\tau < 1 \right\}. \qquad (12)$$

Если при некотором $t > 0$ имеем $\alpha^*(t, \tau, \upsilon, z_0) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in R^k$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (12) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T(z_0, \gamma(\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (12) не выполняются при всех $t > 0$, положим $T(z_0, \gamma(\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (6) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 1, 2, 6 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $T(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто, $T \in T(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3). Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим вначале случай $\sigma(\xi(T, z_0, \gamma(\cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0)d\tau - \int_t^T \sup_{\upsilon \in R^k} \alpha_*(T, \tau, \upsilon, z_0)d\tau, \ t \in [0, T].$$

Функция $\alpha^*(T,\tau,v,z_0)$ $L \otimes B$-измерима по совокупности (τ, v), $\tau \in [0,T]$, $v \in R^k$, поэтому она суперпозиционно измерима, т.е. функция $\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)$ измерима по τ, $\tau \in [0,T]$. Функция $\sup\limits_{v \in R^k} \alpha_*(T,\tau,v,z_0)$ измерима по τ, $\tau \in [0,T]$ [9].

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{v \in R^k} \alpha_*(T,\tau,v,z_0)d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau \le 1 - \inf_{\int_0^t \|v(\tau)\|^p d\tau \le v^p} \int_0^T \alpha^*(t,\tau,v,z_0)d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0,T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим многозначное отображение при $v \in R^k$, $\tau \in [0,T]$

$$U^1(\tau, v) = \{u \in U(T,\tau,v,\alpha(T,\tau,v,z_0)) : \sup_{\psi \in \operatorname{dom}\sigma^*} [(\psi, \pi e^{(T-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] -$$

$$- \pi e^{(T-\tau)A} Cv) + \alpha(T,\tau,v,z_0)[(\psi, \xi(T, z_0, \gamma(\cdot))) - \sigma^*(\psi)]] \le 0\}, \qquad (13)$$

где

$$\alpha(T,\tau,v,z_0) = \begin{cases} \alpha^*(T,\tau,v,z_0), & 0 \le \tau \le t_*, \\ \sup\limits_{v \in R^k} \alpha_*(T,\tau,v,z_0), & t_* < \tau \le T. \end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), функций $\sigma(z)$, $\alpha^*(T,\tau,v,z_0)$ и $\sup\limits_{v \in R^k} \alpha_*(T,\tau,v,z_0)$ отображение $U^1(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо [11] и компактнозначно при $v \in R^k$, $\tau \in [0,T]$. Поэтому согласно теореме об опорной функции [28] многозначное отображение $U^1(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u^1(\tau, v) = \operatorname{lex}\max\limits_{e_1,\ldots,e_m} U^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [11], и $\|u(\tau, v)\| = (\|D(T-\tau)v\|^p + \alpha(T,\tau,v,z_0)\hat{\gamma})^{1/p}$, $\tau \in [0,T]$, $v \in R^k$. Положим управление первого игрока $u^1(\tau) = u^1(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0,T]$.

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (9) при выбранных управлениях величину

$$[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]\left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T,\tau,v,z_0)d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{v \in R^k} \alpha_*(T,\tau,v,z_0)d\tau\right].$$

Тогда получим

$$\sigma(z(T)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom}\sigma^*} \left\{ [(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]h(t_*) + \int_0^{t_*} [(\psi, \pi e^{(T-\tau)A} B[u^1(\tau) - \gamma(\tau)] - \right.$$

$$- \pi e^{(T-\tau)A} Cv(\tau)) + \alpha^*(T,\tau,v,z_0)[(\psi, \xi(T)) - \sigma^*(\psi)]]d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T}[(\psi,\pi e^{(T-\tau)A}B[u^1(\tau)-\gamma(\tau)]-$$

$$\left.-\pi e^{(T-\tau)A}Cv(\tau))+\sup_{v\in R^k}\alpha_*(T,\tau,v,z_0)[(\psi,\xi(T))-\sigma^*(\psi)]]d\tau\right\}.$$

С учетом соотношения (13) отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T))\le\sigma(\xi(T,z_0,\gamma(\cdot)))h(t_*)=0.$$

Осталось показать допустимость управления $u^1(\tau)=u^1(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,T]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^T||u^1(\tau)||^p\,d\tau=\int_0^T||D(T-\tau)v(\tau)||^p\,d\tau+$$

$$+\hat{\gamma}\left[\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{v\in R^k}\alpha_*(T,\tau,v,z_0)\,d\tau\right]\le\nu^p\mathrm{X}^p+\hat{\gamma}=\mu^p.$$

Для случая $\sigma(\xi(T,z_0,\gamma(\cdot)))\le 0$ достаточно применить теорему 2.

Теорема доказана.

СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ КЛАССА СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ

Из доказательства теоремы 1 видно, что преследователь в момент t использует информацию о $v_t(\cdot)$, причем она необходима лишь для определения момента переключения t_*, который разделяет активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, определяемое стробоскопической стратегией. В приведенной далее теореме 4 показано, что для реализации гарантированного времени теоремы 3 можно ограничиться контруправлением.

Рассмотрим множество

$$\widehat{T}(z_0,\gamma(\cdot))=\left\{t\ge 0:\int_0^t\inf_{v\in R^k}\alpha^*(t,\tau,v,z_0)d\tau\ge 1,\ \int_0^t\sup_{v\in R^k}\alpha_*(t,\tau,v,z_0)d\tau<1\right\}.\quad(14)$$

Функции $\inf\limits_{v\in R^k}\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ и $\sup\limits_{v\in R^k}\alpha_*(t,\tau,v,z_0)$ измеримы по τ, $\tau\in[0,t]$. Если при некотором $t>0$ имеем $\inf\limits_{v\in R^k}\alpha^*(t,\tau,v,z_0)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (14) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in\widehat{T}(z_0,\gamma(\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (14) не выполняются при всех $t>0$, положим $\widehat{T}(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (6) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 1, 2, 6, для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $\widehat{T}(z_0,\gamma(\cdot))$ не пусто и $\widehat{T}\in\widehat{T}(z_0,\gamma(\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент $\widehat{T}$ с использованием управления вида (5).

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3). Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим вначале случай $\sigma(\xi\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{v\in R^k} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)d\tau - \int_t^{\widehat{T}} \sup_{v\in R^k} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)d\tau,\ \ t\in[0, \widehat{T}].$$

По определению $\widehat{T}$ имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^{\widehat{T}} \sup_{v\in R^k} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)d\tau > 0,\ \ h(\widehat{T}) = 1 - \int_0^{\widehat{T}} \inf_{v\in R^k} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)\,d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, \widehat{T}]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s): s\in[0, t_*]\}$.

Рассмотрим при $v\in R^k$, $\tau\in[0,\widehat{T}]$ многозначное отображение

$$\widehat{U}^1(\tau, v) = \{u \in U(\widehat{T}, \tau, v, \alpha(\widehat{T}, \tau, z_0)):\ \sup_{\psi\in \operatorname{dom}\sigma^*} [(\psi, \pi e^{(\widehat{T}-\tau)A}B[u-\gamma(\tau)] -$$

$$-\pi e^{(\widehat{T}-\tau)A}Cv) + \alpha(\widehat{T}, \tau, z_0)[(\psi, \xi(\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot))) - \sigma^*(\psi)]] \le 0\}, \qquad (15)$$

где

$$\alpha(\widehat{T}, \tau, z_0) = \begin{cases} \inf\limits_{v\in R^k} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0), & 0\le\tau\le t_*, \\ \sup\limits_{v\in R^k} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, v, z_0), & t_* < \tau \le \widehat{T}. \end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), функций $\sigma(z)$, $\inf\limits_{v\in R^k} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)$ и $\sup\limits_{v\in R^k} \alpha_*(T, \tau, v, z_0)$ отображение $\widehat{U}^1(\tau, v)$ $L\otimes B$-измеримо [11] и компактнозначно при $v\in R^k$, $\tau\in[0, T]$. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [28] многозначное отображение $\widehat{U}^1(\tau, v)$ содержит $L\otimes B$-измеримый селектор $\widehat{u}^1(\tau, v) = \operatorname{lex}\max\limits_{e_1,\dots,e_m} \widehat{U}^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [11], и $\|\widehat{u}^1(\tau, v)\| = (\|D(\widehat{T}-\tau)v\|^p + \alpha(\widehat{T}, \tau, v, z_0)\hat{\gamma})^{1/p}$, $\tau\in[0,\widehat{T}]$, $v\in R^k$. Положим управление первого игрока $\widehat{u}^1(\tau) = \widehat{u}^1(\tau, v(\tau))$, $\tau\in[0,\widehat{T}]$.

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (9) при выбранных управлениях величину

$$[(\psi, \xi(\widehat{T})) - \sigma^*(\psi)]\left[\int_0^{t_*} \inf_{v\in R^k} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)d\tau + \int_{t_*}^{\widehat{T}} \sup_{v\in R^k} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)d\tau\right].$$

Тогда получим

$$\sigma(z(\widehat{T})) = \max_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}\left\{[(\psi, \xi(\widehat{T})) - \sigma^*(\psi)]h(t_*) + \int_0^{t_*}[(\psi, \pi e^{(\widehat{T}-\tau)A}B[\widehat{u}^1(\tau) - \gamma(\tau)] -\right.$$

$$-\pi e^{(\widehat{T}-\tau)A}Cv(\tau)) + \inf_{v\in R^k}\alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)[(\psi, \xi(\widehat{T})) - \sigma^*(p)]]d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{\widehat{T}}[(\psi, \pi e^{(\widehat{T}-\tau)A}B[\widehat{u}^1(\tau) - \gamma(\tau)] - \pi e^{(\widehat{T}-\tau)A}Cv(\tau)) +$$

$$\left. + \sup_{v\in R^k}\alpha_*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)[(\psi, \xi(\widehat{T})) - \sigma^*(p)]]d\tau\right\}.$$

С учетом соотношения (15) отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент $\widehat{T}$ выполнение неравенства

$$\sigma(z(\widehat{T}))\le\sigma(\xi(\widehat{T},z_0,\gamma(\cdot)))h(t_*)=0.$$

Осталось показать допустимость управления $\widehat{u}^1(\tau)=\widehat{u}^1(\tau,\upsilon(\tau)),\ \tau\in[0,\widehat{T}]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^{\widehat{T}}||\widehat{u}^1(\tau)||^p\,d\tau=\int_0^{\widehat{T}}||D(\widehat{T}-\tau)\upsilon(\tau)||^p\,d\tau+$$

$$+\hat{\gamma}\left[\int_0^{t_*}\inf_{\upsilon\in R^k}\alpha^*(\widehat{T},\tau,\upsilon,z_0)\,d\tau+\int_{t_*}^{\widehat{T}}\sup_{\upsilon\in R^k}\alpha_*(\widehat{T},\tau,\upsilon,z_0)\,d\tau\right]\le\nu^p\mathrm{X}^p+\hat{\gamma}=\mu^p.$$

Для случая $\sigma(\xi(\widehat{T},z_0,\gamma(\cdot)))\le 0$ достаточно применить теорему 2.

Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (6) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 1, 2, 6. Тогда в силу результатов работ [9, 29] при всех $t>0$ справедливо равенство

$$\inf_{\int_0^t\|\upsilon(\tau)\|^p d\tau\le\nu^p}\int_0^t\alpha^*(t,\tau,\upsilon(\tau),z_0)d\tau=\int_0^t\inf_{\upsilon\in R^k}\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)d\tau.$$

Поэтому, если для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $T(z_0,\gamma(\cdot))$ не пусто, множество $\widehat{T}(z_0,\gamma(\cdot))$ не пусто и они совпадают. Следовательно, теорема 4 усиливает теорему 3 и вместо квазистратегии (4) можно применить стробоскопическую стратегию (5).

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)=\bigcap_{\upsilon\in R^k}\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,z_0),\ (t,\tau)\in\Delta,\ z_0\in R^n.$$

Условие 7. Для некоторого начального положения $z_0\in R^n$ и функции сдвига $\gamma(\cdot)$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

Если это условие выполнено, то введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\beta^*(t,\tau,z_0)=\sup\{\beta:\beta\in\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)\},$$

$$\beta_*(t,\tau,z_0)=\inf\{\beta:\beta\in\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)\},\ (t,\tau)\in\Delta,\ z_0\in R^n.$$

Можно показать [11], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)$ замкнутозначно, измеримо по τ, а верхняя и нижняя разрешающие функции измеримы по переменной τ при фиксированном t.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^2(z_0,\gamma(\cdot))=\left\{t\ge 0:\sigma(\xi(t,z_0,\gamma(\cdot)))\le 0,\ \int_0^t\beta_*(t,\tau,z_0)d\tau<1\right\}.$$

Если неравенства в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*^2(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (6) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 1, 2, 7 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $\mathrm{P}_*^2(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто, $\mathrm{P}_*^2 \in \mathrm{P}_*^2(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^2 с использованием управления вида (5).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3). Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^2(\tau, \upsilon) = \{u \in U(\mathrm{P}_*^2, \tau, \upsilon, \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0)) : \sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(\psi, \pi e^{(\mathrm{P}_*^2 - \tau)A} B[u - \gamma(\tau)] -$$

$$- \pi e^{(\mathrm{P}_*^2 - \tau)A} C\upsilon) + \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0)[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^2, z_0, \gamma(\cdot))) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(z)$ и нижней разрешающей функции $\beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0)$ компактнозначное отображение $U_*^2(\tau, \upsilon)$ $L \otimes B$-измеримо [11] при $\upsilon \in R^k$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Поэтому согласно теореме об опорной функции [28] многозначное отображение $U_*^2(\tau, \upsilon)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_*^2(\tau, \upsilon) = \operatorname{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_m} U_*^2(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [11], и $\| u_*^2(\tau, \upsilon) \| = (\| D(\mathrm{P}_*^2 - \tau)\upsilon \|^p + \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0)\hat{\gamma})^{1/p}$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$, $\upsilon \in R^k$.

Положим управление первого игрока $u_*^2(\tau) = u_*^2(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Прибавив и вычтя в квадратных скобках выражения (9) величину $[(p, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(p)] \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0) d\tau$, получим

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) = \max_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ [(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi)] \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0) d\tau \right) + \right.$$

$$+ \int_0^{\mathrm{P}_*^2} [(\psi, \pi e^{(\mathrm{P}_*^2 - \tau)A} B[u_*^2(\tau) - \gamma(\tau)] - \pi e^{(\mathrm{P}_*^2 - \tau)A} C\upsilon) +$$

$$\left. + \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0)[(\psi, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(\psi)]] d\tau \right\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент P_*^2 выполнение неравенства

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) \leq \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, z_0, \gamma(\cdot))) \left(1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0) d\tau \right) \leq 0,$$

поскольку по определению P_*^2 имеем $\sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, z_0, \gamma(\cdot))) \leq 0$, а $1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0) d\tau > 0$.

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Имеем

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \| u_*^2(\tau) \|^p \, d\tau = \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \| D(\mathrm{P}_*^2 - \tau)\upsilon(\tau) \|^p \, d\tau + \hat{\gamma} \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \beta_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, z_0) d\tau < \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p,$$

что завершает доказательство теоремы.

Замечание 4. Если справедливы условия 1, 2 и для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot)$ на множестве $\Delta \times R^k$ выполнено условие 3, то для любого начального положения $z_0 \in R^n$ имеем $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, z_0)$, $\tau \in [0, t]$. Поэтому выполнены условие 6, 7 и справедливо равенство

$$\sup_{v \in R^k} \alpha_*(t, \tau, v, z_0) = \beta_*(t, \tau, z_0) = 0.$$

Рассмотрим множество

$$\Theta(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \beta^*(t, \tau, z_0) d\tau \geq 1, \int_0^t \beta_*(t, \tau, z_0) d\tau < 1 \right\}. \tag{16}$$

Если при некотором $t > 0$ имеем $\beta^*(t, \tau, z_0) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (16) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \Theta(z_0, \gamma(\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (16) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta(z_0, \gamma(\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (6) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнены условия 1, 2, 7 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $\Theta(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто, $\Theta \in \Theta(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент Θ с использованием управления вида (5).

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Положим $\beta(\Theta, \tau, z_0) = \dfrac{1}{\int_0^\Theta \beta^*(\Theta, \tau, z_0) d\tau} \beta^*(\Theta, \tau, z_0)$, $\tau \in [0, \Theta]$, $z_0 \in R^n$, и рассмотрим вначале случай $\sigma(\xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot))) > 0$.

Поскольку $\int_0^\Theta \beta^*(\Theta, \tau, z_0) d\tau \geq 1$, то $\beta(\Theta, \tau, z_0) \leq \beta^*(\Theta, \tau, z_0)$, $\tau \in [0, \Theta]$, $z_0 \in R^n$. В силу условия $\int_0^\Theta \beta_*(\Theta, \tau, z_0) d\tau < 1$ получим $\beta(\Theta, \tau, z_0) > \beta_*(\Theta, \tau, z_0)$, $\tau \in [0, \Theta]$, $z_0 \in R^n$. Действительно, предположим, что $\beta(\Theta, \tau, z_0) \leq \beta_*(\Theta, \tau, z_0)$. Тогда имеем $1 = \int_0^\Theta \beta(\Theta, \tau, z_0) d\tau \leq \int_0^\Theta \beta_*(\Theta, \tau, z_0) d\tau$, что противоречит определению момента времени Θ. Таким образом, $\beta(\Theta, \tau, z_0) \in \mathfrak{A}(\Theta, \tau, z_0)$, $\tau \in [0, \Theta]$, $z_0 \in R^n$.

Рассмотрим при $v \in R^k$, $\tau \in [0, \Theta]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U^2(\tau, v) = \{u \in U(\Theta, \tau, v, \beta(\Theta, \tau, z_0)) : \sup_{\psi \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(\psi, \pi e^{(\Theta-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] -$$
$$- \pi e^{(\Theta-\tau)A} Cv) + \beta(\Theta, \tau, z_0)[(\psi, \xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot))) - \sigma^*(\psi)]] \leq 0\}. \tag{17}$$

Как и в предыдущей подобной ситуации, отображение $U^2(\tau, v)$ компактнозначно и $L \otimes B$-измеримо [11] при $v \in R^k$, $\tau \in [0, \Theta]$. В силу теоремы об опорной функции [28] многозначное отображение $U^2(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u^2(\tau, v) = \operatorname{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_m} U^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [11], и $||u^2(\tau,\upsilon)||=(||D(\Theta-\tau)\upsilon||^p+\beta(\Theta,\tau,\upsilon,z_0)\hat{\gamma})^{1/p}$, $\tau\in[0,\Theta]$, $\upsilon\in R^k$. Положим управление первого игрока равным $u^2(\tau)=u^2(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\Theta]$.

Прибавив и вычтя в квадратных скобках выражения (9) величину $[(\psi,\xi(\Theta))-\sigma^*(\psi)]\int\limits_0^\Theta\beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau$, получим

$$\sigma(z(\Theta))=\max_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}\left\{[(\psi,\xi(\Theta))-\sigma^*(\psi)]\left(1-\int\limits_0^\Theta\beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\Theta[(\psi,\pi e^{(\Theta-\tau)A}B[u^2(\tau)-\gamma(\tau)]-\pi e^{(\Theta-\tau)A}C\upsilon)+\beta(\Theta,\tau,z_0)[(\psi,\xi(\Theta))-\sigma^*(\psi)]]d\tau\right\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент Θ справедливость неравенства

$$\sigma(z(\Theta))\le\sigma(\xi(\Theta,z_0,\gamma(\,\cdot\,)))\left(1-\int\limits_0^\Theta\beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau\right)\le 0,$$

поскольку по предположению имеем $\sigma(\xi(\Theta,z_0,\gamma(\,\cdot\,)))>0$, а по определению момента Θ справедливо неравенство $1-\int\limits_0^\Theta\beta(\Theta,\tau,\upsilon,z_0)d\tau\le 0$.

Осталось показать допустимость управления $u^2(\tau)=u^2(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\Theta]$.

По построению справедливы соотношения

$$\int\limits_0^\Theta||u^2(\tau)||^p\,d\tau=\int\limits_0^\Theta||D(\Theta-\tau)\upsilon(\tau)||^p\,d\tau+\hat{\gamma}\int\limits_0^\Theta\beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau\le\nu^p\mathrm{X}^p+\hat{\gamma}=\mu^p.$$

Для случая $\sigma(\xi(\Theta,z_0,\gamma(\,\cdot\,)))\le 0$ достаточно применить теорему 5.

Теорема доказана.

Замечание 5. Если выполнены условия 1, 2, 7, то для некоторого начального положения $z_0\in R^n$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)$ принимает непустые выпуклые значения на множестве Δ и $\sup\limits_{\upsilon\in R^k}\alpha_*(t,\tau,\upsilon,z_0)=\beta_*(t,\tau,z_0)$. Если к тому же при некотором $t>0$ $\sigma(\xi(t,z_0,\gamma(\,\cdot\,)))>0$, то $\inf\limits_{\upsilon\in R^k}\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)=$ $=\beta^*(t,\tau,z_0)$. Поэтому если множество $\widehat{T}(z_0,\gamma(\,\cdot\,))$ не пусто, то и множество $\Theta(z_0,\gamma(\,\cdot\,))$ не пусто и они совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены линейные дифференциальные игры с терминальной функцией платы и интегральными ограничениями на управления. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие М.С. Никольского [5] не выполняется. Предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение игры за конечное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий Хайека [9]. Показано, что без дополнительных предположений это время совпадает с гарантированным временем в классе квазистратегий. Дано сравнение гарантированных времен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. О гарантированном результате в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Прикладная математика и механика*. 1995. Т. 59, № 5. С. 714–720.
2. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. Гарантированный результат в дифференциальной игре группового преследования с терминальной функцией платы. *Прикладная математика и механика*. 1997. Т. 61, № 4. С. 584–594.
3. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 49–58.
4. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 90–102.
5. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Управляемые системы*. 1969. Вып. 2. С. 49–59.
6. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Автоматика*. 1993. № 4. С. 26–36.
7. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями сближения. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2009. Т. 15, № 4. С. 290–301.
8. Саматов Б.Т. О задачах группового преследования при интегральных ограничениях на управления. I. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. Т. 49, № 5. С. 132–145.
9. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций для игровых задач управления с интегральными ограничениями. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 5. С. 109–127.
10. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
11. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.
12. Чикрий А.А., Чикрий В.К. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 65–78.
13. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 1. С. 72–84.
14. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
15. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
16. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
17. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
18. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On a group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.
19. Chikrii A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object. *Cybernetics*. 1987. Vol. 23, N 4. P. 437–445.
20. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. Vol. 27, N 1. P. 27–38.
21. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
22. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.J. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving object. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91.
23. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.

24. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and Its Applications*. 2008. Vol. 17. P. 349–387.

25. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.

26. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия*. 1959. № 2. С. 25–32.

27. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Москва: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.

28. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.

29. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

Надійшла до редакції 11.11.2018

Й.С. Раппопорт

ПРО СТРОБОСКОПІЧНУ СТРАТЕГІЮ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ З ТЕРМІНАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПЛАТИ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ

Анотація. Розглянуто лінійні диференціальні ігри з термінальною функцією плати та інтегральними обмеженнями на керування. Сформульовано достатні умови закінчення гри за скінченний гарантований час у класі квазістратегій. Запропоновано дві схеми методу розв'язувальних функцій, що забезпечують завершення гри за скінченний гарантований час у класі стробоскопічних стратегій. Показано, що без додаткових припущень цей час збігається з гарантованим часом у класі квазістратегій.

Ключові слова: лінійна диференціальна гра, термінальна функція плати, інтегральні обмеження, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія.

J.S. Rappoport

STROBOSCOPIC STRATEGY IN GAME DYNAMIC PROBLEMS WITH TERMINAL PAY OFF FUNCTION AND INTEGRAL CONSTRAINTS ON CONTROLS

Abstract. The paper considers linear differential games with a terminal payoff function and integral constraints on controls. Sufficient conditions for game completion in a finite guaranteed time in the class of quasi-strategies are formulated. Two schemes of the method of resolving functions are proposed that ensure game completion in a final guaranteed time in the class of stroboscopic strategies. It is shown that without additional assumptions, this time coincides with the guaranteed time in the class of quasistrategies.

Keywords: linear differential game, terminal payoff function, integral constraints, multivalued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.