УДК 517.5

К.Н. Жигалло

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ КОНСТАНТ КОЛМОГОРОВА–НИКОЛЬСКОГО ВЕЛИЧИН ПРИБЛИЖЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Ключевые слова: оценка погрешности, классы сопряженных функций, численные алгоритмы, математическое моделирование, оптимальное управление, игровые задачи динамики, операторы, необходимая точность приближения.

Введение

В настоящее время в связи с интенсивным развитием таких направлений науки и техники, как аэронавтика, самолетостроение, теплотехника и т.д. возникла потребность не только вычисления приближенных решений различного рода задач, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям. И тут на помощь приходят так называемые полные асимптотические разложения [1] верхних граней отклонений некоторых классов функций (отвечают реальным процессам) от определенного рода операторов (соответственно отвечают математическим моделям реальных процессов). Очень веской характеристикой этих полных асимптотических разложений как раз и есть так называемые константы Колмогорова–Никольского [2]. Зная их точные значения при определенных степенях малости [3], можно оценить погрешность отклонения смоделированного процесса от реального. И чем больше значений этих констант при определенных степенях малости будем знать, тем точнее сможем оценить степень погрешности.

С другой стороны, при выборе множества приближения (математическая модель реального процесса), кроме безоговорочного требования получить необходимую точность, руководствуются еще и желанием иметь дело с простыми и удобными для исследований и вычислений функциями φ. Оказывается, что наиболее эффективными в этом плане как с точки зрения игровых задач динамики [4–8], так и с точки зрения получения необходимой точности приближения, являются операторы, которые задаются с помощью совокупности $\lambda = \{\lambda_\rho(\cdot)\}$ непрерывных на $[0, \infty)$ функций, зависящих от действительного параметра ρ. Конкретные примеры таких операторов — так называемые обобщенные операторы Пуассона [9], которые, в свою очередь, являются решениями дифференциальных уравнений в частных производных и напрямую связаны с методами решений интегральных, дифференциально-разностных и интегро-дифференциальных игр.

Данная статья как раз и посвящена нахождению констант Колмогорова–Никольского в полных асимптотических разложениях по степеням малости $1-\rho,\ \rho \to 1-0$, верхних граней уклонений сопряженных дифференцируемых функций от их обобщенных интегралов Пуассона.

Постановка задачи

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая суммируемая функция и

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$$

— ее ряд Фурье, где $a_0(f)\ a_k(f), b_k(f)$ — соответственно ее коэффициенты Фурье. Пусть $\Lambda = \{\lambda_\rho(k)\}$ (см., например, [10]) — множество функций натурального аргумента, зависящих от действительного параметра ρ, $0 \le \rho < 1$, $\lambda_\rho(0) = 1$. С помощью множества $\{\lambda_\rho(k)\}$ каждой функции $f(x)$ поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0(f)}{2}\lambda_\rho(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k)(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{1}$$

Предположим, что он при каждом $\lambda_\rho(k), 0 \le \rho < 1$, является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, которую обозначим $U_\Lambda(\rho; f; x)$. При условии, что последовательность $\{\lambda_\rho(k)\}_{k=\overline{0, \ldots, \infty}}$ такова, что ряд

$$K_\Lambda(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_\rho(k)\cos kt \tag{2}$$

— это ряд Фурье некоторой суммируемой функции, аналогично [11, с. 46] можно показать справедливость равенства

$$U_\Lambda(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\Lambda(\rho; t)dt. \tag{3}$$

В этом случае также говорят, что множество $\lambda_\rho(k)$ определяет конкретный метод (λ-метод) суммирования рядов Фурье. Понятно, что при каждом фиксированном ρ оператор $U_\Lambda(\rho; f; x)$ линейный. Поэтому λ-методы называют линейными методами [11, с. 46] (процессами) суммирования рядов Фурье.

Приведем примеры некоторых конкретных λ-методов суммирования рядов Фурье. Если в (2) положить $\lambda_\rho(k) = \rho^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то функцию в правой части (3) будем обозначать $A(\rho; f; x)$ и называть интегралом Абеля–Пуассона [12, 13]. В случае $\lambda_\rho(k) = \left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k$ функцию в правой части (3) обозначим $B(\rho; f; x)$ и назовем бигармоническим интегралом Пуассона [14–16]. Если же в (2) $\lambda_\rho(k) = \rho^{k^2}$, то в правой части (3) будем иметь так называемый интеграл Вейерштрасса $W(\rho; f; x)$ [17, 18].

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{R}; U_\Lambda(\rho))_X = \sup_{f\in\mathfrak{R}} \| f(x) - U_\Lambda(\rho; f; x)\|_X$$

где X — нормированное пространство, $\mathfrak{R} \subseteq X$ — заданный класс функций, $U_\Lambda(\rho; f; x)$ — операторы, порождаемые конкретным методом $U_\Lambda(\rho; f; x)$ суммирования рядов Фурье, следуя А. И. Степанцу [11, с. 9], будем называть задачей Колмогорова–Никольского. И если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho) = \varphi(\mathfrak{R}; U_\Lambda(\rho))$ такая, что при $\rho \to 1-0$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{R}; U_\Lambda(\rho))_X = \varphi(\rho) + 0(\varphi(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса $\mathfrak{R}$ и метода $U_\Lambda(p)$ в метрике пространства X.

Следует отметить ряд работ [19–26], посвященных решению задачи Колмогорова–Никольского для вышеупомянутых линейных методов: интеграла Абеля–Пуассона, бигармонического интеграла, интеграла Вейерштрасса.

Далее, если в правой части (2) положить

$$\lambda_\rho(k) = (1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k,\ 0 \le s \le \frac{1}{2},\ q \ge 1, \tag{4}$$

то согласно (3) получим линейный метод так называемого обобщенного интеграла Пуассона, который согласно [9] принято обозначать $P_{s,\,q}(\rho,\ f,\ x)$.

Известный интерес как с точки зрения прикладной математики, так и с точки зрения задач Колмогорова–Никольского вызывают так называемые классы сопряженных дифференцируемых функций $\overline{W}^r,\ r \in N$ [11, с. 22]. Именно поэтому возникает естественный вопрос о решении задачи Колмогорова–Никольского для обобщенных интегралов Пуассона $P_{s,\,q}(\rho,\ f,\ x)$ на классах сопряженных дифференцируемых функций $\overline{W}^r$, в метрике пространства $\tilde{N}$-непрерывных 2π-периодических функций, т.е.

$$\mathcal{E}\left(\overline{W^r},\ P_{s,\,q}(\rho)\right)_C = \sup_{f \in \overline{W^r}} \left\| f(x) - P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ x) \right\|_C. \tag{5}$$

Вычисление констант Колмогорова–Никольского в полных асимптотических разложениях верхних граней уклонений сопряженных дифференцируемых функций от их обобщенных интегралов Пуассона

Формальный ряд $(1-\rho)$ будем называть полным асимптотическим разложением или же полной асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho \to 1-0$ (см., например, [1]), если для всех $n \in N$ $|g_{n+1}(1-\rho)| = 0(|g_n(1-\rho)|)$ и при каждом $n \in N$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{m} g_n(1-\rho) + 0(g_m(1-\rho)),\ \ \rho \to 1-0,$$

кратко запишем так:

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-\rho).$$

Таким образом, основная задача, которая стоит перед нами, — не только решение задачи Колмогорова–Никольского (5) для обобщенного интеграла Пуассона, но и нахождение констант Колмогорова–Никольского при соответствующих степенях малости $1-\rho,\ \rho \to 1-0,$ в полных асимптотических разложениях правой части величины (5).

Теорема. При $\rho \to 1-0$ имеют место следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\overline{W}^2;\ P_{s,\,q}(\rho)) &= \frac{2}{\pi}(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \ln 2 + 1\right)(1-\rho) - \frac{\pi}{2}s(1-\rho)(1-\rho)^q + \\ &+ \frac{2}{\pi}s(1-\rho)(1-\rho)^{q+1}\ln\frac{1}{1-\rho} + \frac{2s}{\pi}(1+\rho)\left(\frac{\pi^2}{4} + \ln 2 + 1\right)(1-\rho)^{q+1} + \\ &+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\alpha_k^2(1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^2(1-\rho)^k\right\} + \frac{2}{\pi}s(1+\rho)\times \\ &\times \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\alpha_k^2(1-\rho)^{k+q}\ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^2(1-\rho)^{k+q}\right\},\end{aligned} \tag{6}$$

$$\mathcal{E}\left(\overline{W}^r, P_{s,q}(\rho)\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k^r(1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^r(1-p)^k\right\} + \frac{4s}{\pi}(1+\rho)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k^{r-1}(1-\rho)^{k+q}\ln\frac{1}{1-\rho}\beta_k^{r-1}(1-\rho)^{k+q}\right\} - s(1+\rho)(1-\rho)^q K_{r-1},\ r = 2l+2,\ l \in N. \quad (7)$$

Здесь коэффициенты α_k^r и β_k^r заданы соответственно формулами (10) и (11) из [27]:

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r; P_{s,q}(\rho)) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\begin{matrix}\gamma_k^r(1-\rho)^k - \dfrac{4s}{\pi}(1+\rho)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k^{r-1}(1-\rho)^{k+q} - \\ -\dfrac{4}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)^q\tilde{K}_r,\ r = 2l+1, l \in N,\end{matrix} \quad (8)$$

где коэффициенты γ_k^r заданы формулами (20) из [27], а

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\quad n = 0, 1, 2, \ldots,\quad \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\ n \in N, \text{—}$$

известные константы Ахизера–Крейна–Фавара.

Доказательство. Прежде чем перейти к непосредственному доказательству теоремы, остановимся на свойствах сопряженных дифференцируемых функций. Итак, пусть W^r, $r \in N$, — множество 2π-периодических функций, имеющих абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и почти всюду $\left|f^{(r)}(t)\right| \le 1$. Тогда

$$\overline{W}^r = \left\{\bar{f} : \bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt,\ f \in W^r\right\} \quad (9)$$

— множество функций, сопряженных с функциями из множества W^r. Причем интеграл в правой части (9) аналогично [28] будем подразумевать в смысле его главного значения т.е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}\right) f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt.$$

Для получения интегрального представления величины $\bar{f}(x) - P_{s,q}(\rho, \bar{f}, x)$ подставим (4) в (3). В результате получим

$$P_{s,q}(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\ (1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k\right)\cos kt\,dt,$$

$$0 \le s \le \frac{1}{2},\ q > 1.$$

Далее, следуя формулам (5) и (6) из [13], запишем

$$P_{s,q}(\rho, \overline{f}, x) = \overline{P_{s,q}}(\rho, f, x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}(1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k \sin kt\ \ dt.$$

ISSN 0572-2691

Принимая во внимание вышесказанное, получаем, что

$$\overline{f}(x)-P_{s,\,q}(\rho,\,\overline{f},\,x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}(1+ks(1+\rho)(1-\rho)^{q})\rho^{k}\sin kt\right)dt.$$

Используя последнее соотношение, перейдем к доказательству асимптотической формулы (6). А именно, после применения двукратного интегрирования коэффициентов Фурье функции f частями получим

$$\mathcal{E}\left(\overline{W^{2}},\,P_{s,\,q}(\rho)\right)=\frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^{2}}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}f''(t)\overline{V_{2}}(\rho,\,t)\,dt\right|,$$

где

$$\overline{V_{2}}(\rho,\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}(1-(1+ks(1+\rho)(1-\rho)^{q}))\rho^{k}\sin kt\ \ 0\le\rho<1.$$

Поскольку $f\in W^{2}$, $\overline{V}_{2}(\rho,\,t)$ нечетная, то

$$\mathcal{E}(\overline{W}^{2},\,P_{s,\,q}(\rho))_{C}\le\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\overline{V}_{2}(\rho,\,t)\right|dt.$$

С другой стороны, если $\overline{V}_{2}(\rho,\,t)>0,\ t\in(0,\,\pi)$, то функция f такова, что

$$f''=\operatorname{sign}(\overline{V}_{2}(\rho,\,t)),\ \ t\in[-\pi;\,\pi],$$

непрерывно и периодически продолжается на R и принадлежит классу W^{2} [29, с. 104–106], а значит,

$$\mathcal{E}(\overline{W}^{2},\,P_{s,\,q}(\rho))_{C}\ge\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\overline{V}_{2}(\rho,\,t)\right|dt$$

и таким образом,

$$\mathcal{E}(\overline{W}^{r},\,P_{s,\,q}(\rho))_{C}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\overline{V}_{2}(\rho,\,t)\right|dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\overline{V}_{2}(\rho,\,t)\,dt. \tag{10}$$

Покажем, что

$$\overline{V}_{2}(\rho,\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{k}\sin kt>0,\ \ c_{k}:=\frac{1-[1+ks(1+\rho)(1-\rho)^{q}]\rho^{k}}{k^{2}}$$

при $t\in(0,\,\pi)$ и $0\le\rho<1$. Для этого исследуем последовательность коэффициентов $\tilde{n}_{k}$ разложения этого ядра. Поскольку

$$\Delta c_{k}=c_{k}-c_{k+1}=\frac{1}{k^{2}}-\frac{1}{(k+1)^{2}}-\frac{\rho^{k}}{k^{2}}+\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)^{2}}-s(1+\rho)(1-\rho)^{q}\left(\frac{\rho^{k}}{k}-\frac{\rho^{k+1}}{k+1}\right):=\xi_{k}(\rho)$$

и $\xi_{k}(0)>0,\ \xi_{k}(1)=0,$

$$\xi_{k}{}'(\rho)=-\frac{\rho^{k-1}}{k}+\frac{\rho^{k}}{(k+1)}-s\left(\rho^{k-1}+\frac{k+1}{k}\rho^{k}\right)(1-\rho)^{q}+s\left(\frac{\rho^{k}}{k}+\frac{\rho^{k+1}}{k}\right)q(1-\rho)^{q-1}+$$

$$+s\left(\rho^{k}+\frac{k+2}{k+1}\rho^{k+1}\right)(1-\rho)^{q}-s\left(\frac{\rho^{k+1}}{k+1}+\frac{\rho^{k+2}}{k+1}\right)q(1-\rho)^{q-1}<0,\ \ 0\le\rho<1,\ k=1,\,2,\,\ldots,$$

то $\Delta c_{k}>0$ для произвольных $k\in N$ и $0\le\rho<1$.

Далее из того, что

$$\Delta_{c_k}^2 = c_k - 2c_{k+1} + c_{k+2} = \frac{1}{k^2}(1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k) - \frac{2}{(k+1)^2}(1-(1+s\times$$

$$\times(k+1)(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^{k+1}) + \frac{1}{(k+2)^2}(1-(1+s(k+2)(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^{k+2}) =: \eta_k(\rho)$$

и для произвольного $k \in N$:

$$\eta_k(0) > 0, \;\; \eta_k(1) = 0,$$

$$\eta_k{}'(\rho) = -\frac{\rho^{k-1}}{k} - \frac{s(k\rho^{k-1} + (k+1)\rho^k)}{k}(1-\rho)^q + \frac{sq(\rho^k + \rho^{k+1})}{k}(1-\rho)^{q-1} + \frac{2\rho^k}{k+1} +$$

$$+\frac{2s((k+1)\rho^k + (k+2)\rho^{k+1})}{k+1}(1-\rho)^q - \frac{2sq(\rho^{k+1} + \rho^{k+2})}{k+1}(1-\rho)^{q-1} - \frac{\rho^{k+1}}{(k+2)} -$$

$$-\frac{s((k+2)\rho^{k+1} + (k+3)\rho^{k+2})}{k+2}(1-\rho)^q + \frac{sq(\rho^{k+2} + \rho^{k+3})}{k+2}(1-\rho)^{q-1} < 0, \;\; 0 \le \rho < 1,$$

следует, что $\Delta_{c_k}^2 > 0$ при всех $k \in N$ и $0 \le \rho < 1$. Поскольку коэффициенты c_k ядра $\overline{V}_2(t) = \overline{V}_2(\rho;\, t)$ положительные, дважды монотонно стремятся к нулю $(\Delta c_k > 0, \Delta_{c_k}^2 > 0)$ и, кроме того, как несложно убедиться, удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-[1+ks(1+\rho)(1-\rho)^q]\rho^k}{k^3} < \infty,$$

то согласно [30, с. 297–298] $\overline{V}_2(\rho, t) > 0$ при $t \in (0, \pi)$, $0 \le \rho < 1$.

Значит, из (10) получим

$$\mathcal{E}(\overline{W}^2, P_{s,q}(\rho))_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-[1+(2k+1)s(1+\rho)(1-\rho)^q]\rho^{2k+1}}{(2k+1)^3} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^3} + \frac{4}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^2} - \frac{4}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Отсюда, используя обозначения леммы 1 из [31], а именно

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}} = \int_{\rho}^{1}\int_{0}^{t_n}\ldots\int_{0}^{t_2} \frac{1}{t_1\ldots t_n}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}\,dt_1\ldots dt_n = \varphi_n(\rho),$$

получаем, что

$$\mathcal{E}(\overline{W}^2, P_{s,\,q}(\rho))_C = \frac{2}{\pi}\varphi_2(\rho) + \frac{2}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)\varphi_1(\rho) - \frac{4}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Согласно этой же лемме 1 из работы [31]

$$\varphi_n(\rho) \cong \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k^n(1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^n(1-\rho)^k\right\},$$

где коэффициенты α_k^r и β_k^r заданы формулами

$$\alpha_k^r = \frac{(-1)^k}{k!} a_r^k, \qquad \beta_k^r = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \varphi_{r-i}(0) a_i^k + a_r^k \left(\ln 2 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \right) + S_k^r \right),$$

$$\varphi_j(0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} K_j, & j = 2l-1, \\ \frac{\pi}{2} \tilde{K}_j, & j = 2l, \end{cases} \quad l \in N,$$

$$K_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n \in N$$

$$S_k^r = \begin{cases} 0, & k \le r, \\ \sum\limits_{i=r+1}^{k} \frac{a_i^k}{2^{i-r}} + \sum\limits_{i=1}^{k-r} A_i^{k-1} a_r^{k-i}, & k > r, \end{cases}$$

$$a_i^j = \begin{cases} 0, & i > j, \\ (-1)^j (j-1)!, & i = 1, \\ a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}(j-1), & i \le j \le r, \\ a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}(j-2), & r+1 = i \le j, \\ -(i-r-1) a_{i-1}^{j-1} - a_i^{j-1}(j-i+r-1), & r+1 < i \le j, \end{cases}$$

$$A_k^r = (-1)^{k-1} \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k}.$$

Учитывая сказанное выше, получаем справедливость формулы (6).

Асимптотическое равенство (7) доказывается по схеме доказательства соотношения (6). Для доказательства асимптотического равенства (8) можно использовать ту же схему, что и при доказательстве равенства (6), но уже с учетом соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}} = \int_0^1 \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t_1 \ldots t_n} dt_1 \ldots dt_n = \psi_n(\rho)$$

и леммы 2 из работы [31], согласно которой

$$\psi_n(\rho) \cong \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^n (1-\rho)^k,$$

где коэффициенты γ_k^r заданы формулами

$$\gamma_k^r = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{i=1}^{r} \psi_{r-i}(0) b_i^k + \sigma_k^r \right),$$

$$\psi_j(0) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} K_j, & j = 2l, \\ \frac{\pi}{4} \tilde{K}_j, & j = 2l-1, \end{cases} \quad l \in N,$$

$$K_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \tilde{K}_n = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}}, \quad n \in N.$$

$$\sigma_k^r = \begin{cases} 0, & k \le r, \\ \sum\limits_{i=r+1}^{k} \dfrac{b_i^k}{2^{i-r}}, & k > r, \end{cases}$$

$$b_i^j = \begin{cases} 0, & i > j, \\ (-1)^j (j-1)!, & i = 1, \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-1), & i \le j \le r, \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-2), & r+1 = i \le j, \\ -2(i-r-1)b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-2i+2r), & r+1 < i \le j. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Заключение

В данной работе рассмотрены аппроксимативные свойства обобщенных интегралов Пуассона на классах сопряженных дифференцируемых функций. В результате исследований получены полные асимптотические равенства, которые позволяют выписывать все константы Колмогорова–Никольского при соответствующих степенях малости $1-\rho, \rho \to 1-0$. Из полученной выше теоремы в частных случаях, а именно при $s=0$, имеем ранее известный результат для интеграла Абеля–Пуассона, но уже в более удобной для компьютерной обработки форме, и при $s=\frac{1}{2}$, $q=1$ — соответственно результат для бигармонического интеграла Пуассона. В настоящей работе рассмотрен более общий случай одного из линейных методов суммирования рядов Фурье, так называемого обобщенного интеграла Пуассона, изучение аппроксимативных свойств которого позволяет более эффективно использовать задачи теории приближений в различных областях прикладной математики.

К.М. Жигалло

АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ КОНСТАНТ КОЛМОГОРОВА–НІКОЛЬСЬКОГО ВЕЛИЧИН НАБЛИЖЕННЯ СПРЯЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

У прикладній математиці при розв'язуванні низки задач доцільно використовувати методи і підходи теорії наближення функцій. Одним із найважливіших типів задач як теорії наближення функцій, так і прикладної математики є так звані екстремальні задачі Колмогорова–Нікольського. Суть задачі Колмогорова–Нікольського в прикладній математиці полягає в наближенні одних математичних об'єктів іншим, як правило, більш простої природи, властивості яких вже відомі, а необхідні характеристики обчислюються тим чи іншим способом. При цьому важливу роль відіграє оцінка похибки отриманого наближення, яка напряму залежить від точності розв'язку задачі Колмогорова–Нікольського. Ця точність, у свою чергу, буде залежати від кількості доданків у повних асимптотичних розкладах (за степенями $(1-\rho)$, $\rho \to 1-0$, у даній статті). Сталі, які стоять перед відповідними степенями $(1-\rho)$, $\rho \to 1-0$, у повних асимптотичних розкладах у прикладній математиці прийнято називати константами Колмогорова–Нікольського. Очевидно, що чим більше відомо цих констант, тим точніше можна отримати степінь похибки при наближенні одних математичних об'єктів іншими. Розроблений алгоритм обчислень констант Колмогорова–Нікольського будь-якого високого порядку малості при наближенні спряжених диференційовних функцій є їх узагальненими інтегралами Пуассона. Отриманий результат дозволить значно розширити межі застосування задач теорії наближення в прикладній математиці, а саме, при побудові чисельних алгоритмів, при розгляді задач оптимального керування, у математичному моделюванні складних технічних і екологічних систем та ін.

Ключові слова: оцінка похибки, класи спряжених функцій, чисельні алгоритми, математичне моделювання, оптимальне управління, ігрові задачі динаміки, оператори, необхідна точність наближення.

K.N. Zhyhallo

ALGORITHMIZATION OF CALCULATIONS OF THE KOLMOGOROV–NIKOL’SKII CONSTANTS FOR VALUES OF APPROXIMATIONS OF CONJUGATED DIFFERENTIABLE FUNCTIONS BY GENERALIZED POISSON INTEGRALS

In applied mathematics in solving a number of problems, it is advisable to use the methods and approaches of approximation theory. One of the most important types of problems, of both the theory of approximation of functions and applied mathematics, is the so-called extremal problems of Kolmogorov–Nikol’skii. The essence of the Kolmogorov–Nikol’skii problem in applied mathematics is the approximation of some mathematical objects by others, usually of a simpler nature, whose properties are already known, and the necessary characteristics are calculated in one way or another. In this case, an important role is played by the error estimate of the obtained approximation, which will directly depend on the accuracy of solving the Kolmogorov–Nikol’skii problem. And this accuracy will directly depend on the number of terms in complete asymptotic expansions (by powers $(1-\rho)$, $\rho\to 1-0$, in this article). The constants that face the corresponding degrees $(1-\rho)$, $\rho\to 1-0$ in complete asymptotic expansions in applied mathematics are called the Kolmogorov–Nikol’skii constants. Obviously, the more we know these Kolmogorov–Nikol’skii constants, the more accurately we can get the degree of error when some mathematical objects are approximated by others. An algorithm has been developed for computing the Kolmogorov–Nikol’skii constants of arbitrarily high order of smallness when approximating conjugate differentiable functions by their generalized Poisson integrals. The result obtained in this paper will allow us to expand significantly the boundaries of the application of problems of the theory of approximation in applied mathematics, namely, when constructing numerical algorithms, when considering optimal control problems, in mathematical modeling of complex technical and ecological systems, etc.

Keywords: error estimate, classes of conjugate functions, numerical algorithms, math modeling, optimal control, game tasks of dynamics, operators, required accuracy of approximation.

1. Kal’chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math*. 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03
2. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249
3. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550
4. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. **27**, N 1. P. 27–38.
5. Chikrii A.A. An analytic method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **271**, N 1. P. 69–85. DOI: 10.1134/s0081543810040073
6. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Pareto Optimality, Game Theory And Equilibria.* Springer Optimization and Its Applications. New York: Springer, 2008. **17**. P. 349–386. DOI: 10.1007/978-0-387-77247-9_13
7. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293** (Suppl 1). P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229

8. Dziubenko K.G., Chikrii A.A. An approach problem for a discrete system with random perturbations. *Cybernet. Systems Anal*. 2010. **46**, N 2. P. 271–281. DOI: 10.1007/s10559-010-9204-3
9. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.80
10. Zhyhallo T.V. Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson–Chebyshev integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 5. P. 34–48. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.40
11. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наук. думка, 1987. 268 с.
12. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z
13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y
14. Hrabova U. Z., Kal'chuk I. V., Stepanyuk T. A. On the approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6
15. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{N}_{\beta,\infty}^\psi$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9
16. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classec $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 650–656. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8
17. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. 59, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1
18. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W_\beta^r H^\alpha$. *J. Math. Sci.* (N. Y.). 2018. **231**, N 1. P. 41–47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2
19. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0
20. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $\tilde{N}_{\beta,\infty}^\psi$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y
21. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x
22. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_\beta^r H^\alpha$. *Ukrainian Math. J.* 2017. 68, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9
23. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4
24. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $\tilde{N}_{\beta,\infty}^\psi$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1
25. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2
26. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximation of functions from the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x
27. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals,. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502
28. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. 61, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x
29. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.
30. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. М.: Мир, 1965. **1**. 615 с.
31. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P.1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914

Получено 06.06.2019