УДК 517.5

Ю.И. Харкевич

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Ключевые слова: модуль непрерывности, асимптотическое равенство, класс Гельдера, задача Колмогорова–Никольского.

Введение

Исследование современных прикладных проблем естествознания зачастую связано с выбором таких решений, которые позволили бы получить некие оптимальные результаты — затратить минимум средств, достичь максимальной прибыли, наилучших показателей и т.д. Но чтобы что-то рассчитать, надо формализовать задачу, т.е. составить математическую модель изучаемого явления, поскольку математические методы можно применять не к непосредственно изучаемой деятельности, а лишь к моделям того или иного типа объектов.

При представлении конфликтной ситуации в теории игр возникает ряд трудностей в связи с описанием правил, условий, игроков, стратегий, ходов и выигрышей, т.е. в описании математической модели предстоящего конфликта по сценарию «если–то». Задача заключается в том, чтобы данную конфликтную ситуацию по возможности привести к формализованной игре [1] без значительных потерь реальных целей, найти метод решения, провести расчеты и анализ. Результаты исследований математических моделей представляют практический интерес только тогда, когда модели адекватно отображают реальные ситуации. Даже в тех случаях, когда принятие решения, казалось бы, полностью автоматизировано (например, в процессе автоматического управления предприятием или летательным объектом), роль человека не упраздняется, ибо, в конечном счете, от него зависит выбор алгоритма, по которому осуществляется управление.

В теории игр рассматриваются вопросы выбора оптимальных стратегий в различных конфликтных ситуациях. Данная тема актуальна и недостаточно изучена применительно к практическим задачам естествознания, экономики, управления, юриспруденции, политики и т.д. С помощью теории игр для нескольких бескоалиционных противников (или противоборствующих сторон) определяются стратегии, которые приведут если не к положительному выигрышу, то, по крайней мере, к наименьшим потерям. В условиях конфликта принимающему решение необходимо учитывать не только свои собственные интересы, но цели и интересы противника, которые в общем случае неизвестны. Таким образом, возникает достаточно непростая ситуация выбора оптимального действия для каждого участника конфликтной ситуации. Такой анализ более неопределенный в смысле законов, предсказаний и логики и имеет вероятностный характер. Поэтому моделирование с тщательно подобранными реалистическими деталями может дать общий достоверный результат только при многократном проведении эксперимента. Особенно важно, чтобы такие заключения были выведены из упрощенной модели. Заинтересованные стороны называют игроками. Любое возможное для игрока действие в рамках заданных правил игры называется его стратегией. В условиях конфликта каждый игрок выбирает свою стратегию, в результате складывается набор стратегий, называемый ситуацией. Каждому игроку в каждой ситуации приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в этой ситуации и называемое его выигрышем. Протекание конфликта состоит в выборе каждым игроком своей стратегии и получении им в сложившейся ситуации выигрыша. Собственно успех такого моделирования в большой степени зависит от удачного выбора функции, реализующей выбор (стратегию) того или иного игрока. Одной из таких функций может выступать модуль непрерывности, который представляет собой функцию, характеризующую максимальное абсолютное приращение исследуемой функции между точками области определения, отстающими одна от другой на расстояние, не больше какой-то величины. Таким образом, модуль непрерывности функции зависит не только от самой функции, но и от области определения, на которой рассматриваем функцию. Расширяя или изменяя область определения функции, получаем новый модуль непрерывности. Понятие модуля непрерывности непосредственно связано с понятием равномерной непрерывности функции: всякая равномерно непрерывная функция имеет модуль непрерывности, но при этом можно построить пример разрывной функции, имеющей модуль непрерывности.

Наряду с модулем непрерывности рассматривают его различные обобщения. В частности, исследуются модули непрерывности высших порядков (модуль непрерывности при этом часто называют модулем непрерывности первого порядка). Модули непрерывности и его обобщения находят применение в различных областях современной математики.

С помощью классического модуля непрерывности первого порядка определяется так называемый класс H^{ω}, который активно используется при решении различного рода задач теории приближения функций. Начало таких исследований было положено известным отечественным математиком А. Н. Колмогоровым. Позже эти исследования продолжили другие выдающиеся исследователи: С. М. Никольский, Б. Надь, С. Б. Стечкин, В. К. Дзядык, Н. П. Корнейчук, А. И. Степанец и др.

Особую роль среди всех типов экстремальных задач занимает задача Колмогорова–Никольского — нахождение асимптотических равенств для верхних граней уклонения некоторых специальных операторов от функций определенного класса, получения наиболее эффективной модели реальных процессов.

Следует отметить, что среди всех типов задач Колмогорова–Никольского к наиболее актуальным, с точки зрения прикладного естествознания, в данное время относятся именно задачи, которые решаются на классах функций, порождаемых первыми модулями непрерывности. Именно эта концепция легла в основу исследования данной работы для обобщенных интегралов Пуассона. В частности, здесь получены асимптотические равенства для величин приближения функций классов Гельдера их обобщенными интегралами Пуассона.

1. Постановка задачи

Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных функций, в котором норма задается равенством $\|f\|_{\tilde{N}} = \max_t |f(t)|$.

Приведем определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Определение 1 [2, с. 147]. Для непрерывной на [a, b] функции $f(x)$ назовем модулем непрерывности первого порядка или же просто модулем непрерывности — функцию $\omega(u) = \omega(f, u)$, определенную на $[0, b-a]$ следующим равенством:

$$\omega(f; u) = \sup_{\substack{a \le x \le b-h \\ 0 \le h \le u}} |f(x+h) - f(x)|,$$

или, что то же самое,

$$\omega(f; u) = \sup_{\substack{|\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1| \le u \\ x_1,\, x_2 \in [a,b]}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Согласно этому определению модуль непрерывности $\omega(f, u)$ функции $f(\tilde{o})$ при каждом фиксированном $u \in [0, b-a]$ указывает величину максимального колебания функции на произвольном сегменте длины u, содержащемся в $[\grave{a}, b]$.

Отсюда, в частности, следует, что

$$|f(x+h) - f(x)| \le \omega(h), \quad x, \quad x+h \in [a, b];$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le \omega(|x_2 - x_1|), \quad x_1, x_2 \in [a, b]. \tag{1}$$

Определение 2 [2, с. 154]. При каждом фиксированном $\alpha \in (0,1]$ классом Гельдера порядка α называется множество всех непрерывных функций f, модуль непрерывности каждой удовлетворяет условию

$$\omega(f, u) \le \grave{I}\ u^{\alpha},$$

где M — любая положительная постоянная, которая не зависит от u и различная для разных функций. Этот класс принято обозначать H^{α}.

Естественным обобщением классов Гельдера являются так называемые классы H^{ω}.

Определение 3 [2, с. 157]. Пусть $\omega(u)$ — любая функция, являющаяся модулем непрерывности, и M — постоянная. Тогда MH^{ω} — класс всех непрерывных функций f, для каждой из которых $\omega(f, u) \le \grave{I}\ \omega(u)$, а H^{ω} — множество всех функций, каждая из которых при любом M принадлежит классу MH^{ω}.

Далее через $P_{s,q}(\rho; f; x)$ будем обозначать обобщенный интеграл Пуассона [3] функции f:

$$P_{s,q}(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) K_{s,q}(\rho; t)\, dt, \; 0 \le \rho < 1, \tag{2}$$

где $K_{s,q}(\rho; t)$ — ядро обобщенного интеграла Пуассона вида

$$K_{s,q}(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k \cos kt, \;\; 0 \le s \le \frac{1}{2}, \; q \ge 1. \tag{3}$$

Сразу же отметим, что в случае $s = 0$ из (2) и (3) получим интеграл Пуассона [4] или, что то же самое, интеграл Абеля–Пуассона (см., например, [5, 6]):

$$A(\rho;\ f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right)dt,\ \ 0 \le \rho < 1.$$

Если в (2) положить $s = \dfrac{1}{2},\ \ q = 1,$ то будем иметь (см., например, [7, 8]) так называемый бигармонический интеграл Пуассона

$$B(\rho;\ f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k \cos kt\right)dt,\ \ 0 \le \rho < 1.$$

Согласно [9, с. 198] обозначим

$$\mathsf{E}(\mathrm{N};\ P_{s,\,q}(\rho))_X\ = \sup_{f\in \mathrm{N}}\left\| f(\cdot) - P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ \cdot)\right\|_{\tilde{O}}.$$

Тогда, следуя А. И. Степанцу, будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для данного класса N и обобщенного интеграла Пуассона $P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ x)$ в метрике пространства X, если в явном виде найдена функция $g(\rho) = g(\mathrm{N};\ \rho)$ такая, что при $\rho \to 1-0.$

$$\mathsf{E}(\mathrm{N};\ P_{s,\,q}(\rho))_X\ = g(\rho) + o(g(\rho)).$$

2. Приближения функций класса H^{ω} обобщенными интегралами Пуассона

Следует отметить, что аппроксимативные свойства как интегралов Абеля–Пуассона, так и бигармонических интегралов Пуассона достаточно хорошо изучены в работах [10–21]. Что же касается решения задачи Колмогорова–Никольского для вышеупомянутых интегралов на классах H^{ω}, то здесь успехи были более умеренными, именно поэтому цель настоящей работы — нахождение точных верхних граней уклонений функций класса H^{ω} от их обобщенных интегралов Пуассона $P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ x)$ в равномерной метрике, т.е.

$$\mathsf{E}(\acute{I}^{\ \omega};\ P_{s,\,q}(\rho))_C = \sup_{f\in \acute{I}^{\ \omega}}\left\| f(\cdot) - P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ \cdot)\right\|_C. \tag{4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для произвольного фиксированного модуля непрерывности $\omega(t)$ в принятых выше обозначениях справедливо равенство

$$\mathsf{E}(H^{\omega};\ P_{s,\,q}(\rho))_C =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\omega(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\ln\dfrac{1}{\rho}}{\ln^2\dfrac{1}{\rho} + (t+2\pi k)^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q\,\frac{(t+2\pi k)^2 - \ln^2\dfrac{1}{\rho}}{\left((t+2\pi k)^2 + \ln^2\dfrac{1}{\rho}\right)^2}\right)dt. \tag{5}$$

Доказательство. Преобразуем сначала ядро $K_{s,q}(\rho, t)$ (см. (3)) обобщенного интеграла Пуассона. Для этого, следуя работе [22], положим

$$\phi_{s,q}(\rho, k) := (1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k \cos kt. \tag{6}$$

Тогда согласно (6) ядро $K_{s,q}(\rho, t)$ обобщенного интеграла Пуассона примет вид

$$K_{s,q}(\rho, t) = \frac{1}{2}\phi_{s,q}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\phi_{s,q}(\rho, k). \tag{7}$$

Применив теперь к (7) формулу суммирования Пуассона (см., например, [23]), будем иметь

$$K_{s,q}(\rho, t) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}\hat{O}_{s,q}(\rho, 0) + \sum_{k=1}^{\infty}\hat{O}_{s,q}(\rho, 2\pi k)\right), \tag{8}$$

где $\varPhi_{s,q}(\rho, u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\phi_{s,q}(\rho, z)\cos zu\, dz$ — косинус-преобразование Фурье функции $\phi_{s,q}(\rho, z)$ (см., например, [24]). Таким образом, из последнего соотношения и формулы (6) получим, что

$$\varPhi_{s,q}(\rho, u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}(1 + sz(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^z \cos zt \cos zu\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(1 + sz(1+\rho)(1-\rho)^q)\,\rho^z \cos z(u-t) dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 + sz(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^z \cos z(u+t) dz = I_1 + I_2. \tag{9}$$

Интегрируя дважды частями, имеем

$$\int_0^{\infty}\rho^z \cos z(u-t) dz = \frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho} + (t-u)^2}. \tag{10}$$

Аналогично (10), дважды интегрируя частями, можно убедиться в справедливости равенства

$$\int_0^{\infty} z\rho^z \cos z(u-t)\, dz = \frac{1}{(u-t)^2}\left(-1 + \frac{2\ln^2\frac{1}{p}}{(u-t)^2 + \ln^2\frac{1}{p}} - \ln^2\frac{1}{p}\int_0^{\infty} z\rho^z \cos z(u-t) dz\right),$$

поэтому

$$\int_0^{\infty} z\rho^z \cos z(u-t) dz = -\frac{(t-u)^2 - \ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t-u)^2 + \ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}. \tag{11}$$

ISSN 0572-2691

Из (10) и (11) следует, что

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho}+(t-u)^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q \frac{(t-u)^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t-u)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right). \quad (12)$$

Точно так же, как и при вычислении интеграла I_1, можно показать, что

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho}+(t+u)^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q \frac{(t+u)^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t+u)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right). \quad (13)$$

Далее, подставляя (12) и (13) в правую часть (9), получаем

$$\Phi_{s,\,q}(\rho, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{(t-u)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}} + \frac{\ln\frac{1}{\rho}}{(t+u)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}} - \right.$$

$$\left. - s(1+\rho)(1-\rho)^q\left(\frac{(t-u)^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t-u)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{(t+u)^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t+u)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right)\right). \quad (14)$$

Из (8) и (14) следует, что

$$K_{s,\,q}(\rho, t) = \frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho}+t^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q \frac{t^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left(t^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{(t-2\pi k)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}} + \frac{\ln\frac{1}{\rho}}{(t+2\pi k)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}} - \right.$$

$$\left. - s(1+\rho)(1-\rho)^q\left(\frac{(t-2\pi k)^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t-2\pi k)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{(t+2\pi k)^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t+2\pi k)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right)\right).$$

Таким образом, ядро обобщенного интеграла Пуассона примет вид

$$K_{s,q}(\rho, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho}+(t+2\pi k)^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q \frac{(t+2\pi k)^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t+2\pi k)^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right). \quad (15)$$

Прежде чем перейти к доказательству равенства (5), отметим, что согласно [25] $K_{s,\,q}(\rho, t) \ge 0$ при всех $0 \le \rho < 1$, и более того,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{s,\,q}(\rho, t)dt = 1. \tag{16}$$

Поэтому в силу (2) и (16) будем иметь

$$f(x) - P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t))K_{s,\,q}(\rho;\ t)\,dt.$$

Далее, используя свойства определенного интеграла, положительности ядра $K_{s,\,q}(\rho, t)$ обобщенного интеграла Пуассона, из соотношений (4) и (1) запишем

$$\mathsf{E}(H^{\omega};\ P_{s,\,q}(\rho))_C \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega(|t|)K_{s,\,q}(\rho, t)dt. \tag{17}$$

Кроме того, согласно (4) можно записать

$$\mathsf{E}(H^{\omega};\ P_{s,\,q}(\rho))_C = \sup_{f \in H^{\omega}} \left\| f(0) - P_{s,\,q}(\rho;\ f;\ 0) \right\|_C. \tag{18}$$

Итак, поскольку в классе H^{ω} существует 2π-периодическая функция, равная $\omega(|\,t\,|)$ на промежутке $[-\pi;\,\pi]$, для которой неравенство (17) обращается в равенство, и поскольку имеет место (18), то

$$\mathsf{E}(H^{\omega};\ P_{s,\,q}(\rho))_C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega(|\,t\,|)K_{s,\,q}(\rho, t)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \omega(t)K_{s,\,q}(\rho, t)dt.$$

Наконец, подставив (15) в правую часть последнего равенства, получим утверждение теоремы.

Доказанная выше теорема записана в виде точного равенства верхней грани уклонения функций класса H^{ω} от их обобщенных интегралов Пуассона. Но если от классов H^{ω} перейти к более «тонким» классам функций Гельдера H^1, то можно получить более качественное решение задачи Колмогорова-Никольского (4) для обобщенных интегралов Пуассона в равномерной метрике, которое имеет более конкретное применение в прикладной математике.

Следствие 1. В принятых выше обозначениях при $\rho \to 1-0$ имеет место

$$\mathsf{E}(H^1;\ P_{s,q}(\rho))_C = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{1}{\rho} - s(1+\rho)(1-\rho)^q\right)\ln\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\rho}}\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{1}{\rho} - s(1+\rho)(1-\rho)^q\right)\ln\left(4\pi^2 + \ln^2\frac{1}{\rho}\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)^q + O\left(\ln^2\frac{1}{\rho}\right).$$

Доказательство. Положив в равенстве (5) $\omega(t) = t$, будем иметь

$$\mathsf{E}(H^1;\ P_{s,\,q}(\rho))_C =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho} + (t+2\pi k)^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q\,\frac{(t+2\pi k)^2 - \ln^2\frac{1}{\rho}}{\left((t+2\pi k)^2 + \ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(t)_{2\pi}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho}+t^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q\frac{t^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left(t^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right)dt,$$

где $(t)_{2\pi}$ — четное 2π-периодическое продолжение функции $f(t)=t$ из $[0;\pi]$ на всю числовую ось.

Последнее соотношение запишем в виде

$$\mathsf{E}(H^1; P_{s,q}(\rho))_C = I_3 + I_4, \tag{19}$$

где

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} t\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho}+t^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q\frac{t^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left(t^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right)dt, \tag{20}$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^{\infty}(t)_{2\pi}\left(\frac{\ln\frac{1}{\rho}}{\ln^2\frac{1}{\rho}+t^2} - s(1+\rho)((1-\rho)^q\frac{t^2-\ln^2\frac{1}{\rho}}{\left(t^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}\right)dt. \tag{21}$$

Так как

$$\int_0^{2\pi}\frac{t}{\ln^2\frac{1}{\rho}+t^2}dt = \ln\frac{1}{\ln\frac{1}{\rho}} + \frac{1}{2}\ln\left(4\pi^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right),$$

$$2\ln^2\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{t}{\left(t^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)^2}dt = 1 - \frac{1}{4\pi^2\ln^2\frac{1}{\rho}+1}$$

то очевидно, что из (20)

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\rho}\ln\frac{1}{\ln\frac{1}{\rho}} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\rho}\ln\left(4\pi^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi}s(1+\rho)(1-\rho)^q\left(1-\frac{1}{4\pi^2\ln^2\frac{1}{\rho}+1}\right) - \frac{s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q\left(\ln\frac{1}{\ln\frac{1}{\rho}}+\frac{1}{2}\ln\left(4\pi^2+\ln^2\frac{1}{\rho}\right)\right). \tag{22}$$

Далее из (21) легко показать, что

$$I_4 = \hat{I}\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \tag{23}$$

Подставив (22) и (23) в правую часть равенства (19), убедимся в справедливости следствия 1.

Замечание. Так как $\ln\frac{1}{\rho} \sim (1-\rho)$ при $\rho \to 1-0,$ то можно сделать вывод, что результат следствия 1 при $s = 0$ эквивалентен результатам работ [26, 27], а при $s = \frac{1}{2}$ $q = 1$ — результатам работ [28, 29] соответственно.

Заключение

В настоящей работе решена задача Колмогорова–Никольского для обобщенного интеграла Пуассона на классах 2π-периодических функций, которые определяются с помощью первого модуля непрерывности.

Изучен сложный случай, когда для класса 2π-периодических функций H^{ω} получено точное равенство верхней грани уклонения функций класса H^{ω} от их обобщенных интегралов Пуассона. Более того, показано, что если от классов H^{ω} перейти к более «тонким» классам функций Гельдера $H^{1},$ то можно получить более качественное решение задачи Колмогорова–Никольского (5) для обобщенных интегралов Пуассона в равномерной метрике, которое имеет более конкретное применение в прикладной математике, например для математической формализации в определенных типах в теории игр.

Результаты статьи представляют интерес как с точки зрения теории приближения функций, так и с точки зрения игровых задач [30, 31] о сближении траектории систем специальными множествами функций. Полученные результаты позволяют предложить новые математические модели теории управляемых систем.

Ю.І. Харкевич

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ ФУНКЦІЇ, ЯКІ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДУЛЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Одне з найважливіших завдань прикладної математики — вивчення різних проблем природознавства, що в кінцевому підсумку призводить до складання математичних моделей досліджуваних явищ. Більш того, ці математичні моделі будуть представляти практичний інтерес тоді і тільки тоді, коли вони адекватно відображають реальні ситуації. Часто досліджувані об'єкти надзвичайно складні. У таких випадках справжньою знахідкою може виявитися будь-який інший метод отримання додаткової інформації про цю величину, що дозволяє знайти її розв'язання хоча б наближено. У таких випадках доцільно використовувати методи і підходи теорії наближення функцій, а саме асимптотичні оцінки. Теорія наближення функцій має важливе значення, оскільки дає загальні підстави для практичного обчислення функцій, для наближеної заміни складних функцій функціями більш простими. В даному випадку важливу роль відіграє модуль неперервності, який характеризує максимальний абсолютний приріст функції, що досліджується, між точками області визначення. Також важливе значення мають класи функцій, які визначаються модулем неперервності, зокрема класи Гельдера. Досліджено питання знаходження точної верхньої межі відхилення класів функцій, які визначаються за допомогою модуля неперервності першого порядку, від узагальнених інтегралів Пуассона. Зокрема отримано асимптотичні рівності для наближення функцій класів Гельдера їх узагальненими інтегралами Пуассона. Тим самим показано, що перехід від класів H^{ω} до більш «тонких» класів функцій Гельдера H^{1} забезпечує більш якісний розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для узагальнених інтегралів Пуассона в рівномірній метриці, що безпосередньо застосовується в математичному моделюванні та в математичних формалізаціях в певних типах задач в теорії ігор.

Ключові слова: модуль неперервності, асимптотична рівність, клас Гельдера, задача Колмогорова–Нікольського.

Yu.I. Kharkevych

APPROXIMATIVE PROPERTIES OF THE GENERALIZED POISSON INTEGRALS ON THE CLASSES OF FUNCTIONS, DETERMINED BY A MODULUS OF CONTINUITY

One of the most important problems of applied mathematics is the study of various problems of natural science, which ultimately leads to the compilation of mathematical models of the phenomena under study. Moreover, these mathematical models will be of practical interest if and only if these models adequately reflect real situations. Often the objects studied are extremely complex. In such cases, some other method of obtaining additional information about this value may be a real find, allowing it to be found at least approximately. In this position, it is advisable to use the methods and approaches of the theory of approximation of functions, namely, the asymptotic estimates. The theory of approximation of functions is important because it provides general grounds for the practical calculation of functions, for the approximate replacement of complex functions by simpler ones. In this case, an important role is played by the modulus of continuity, which characterizes the maximum absolute increment of the function under study between the points of the domain of definition. Also important are the classes of functions that are defined by the modulus of continuity, in particular, the Holder classes. In this paper, we study the problem of finding the exact upper border of deviation of functions classes that are determined by a first order modulus of continuity, from their generalized Poisson integrals. In a partial case, the asymptotic equalities were obtained for an approximation of functions from the Hölder classes by their generalized Poisson integrals. Thereby it is shown, that a transition from classes H^{ω} to the more susceptible Hölder classes H^1 provides more qualitative solution of the Kolmogorov–Nikol'skii problem for generalized Poisson integrals in the uniform metric, that has a direct application in mathematical modeling and in mathematical formalizations in certain types of problems in game theory.

Keywords: modulus of continuity, asymptotic equality, Hölder class, Kolmogorov–Nikol'skii problem.

1. Chikrii A. A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of Steklov Institute of Mathematics*. 2010. 271, N 1. P. 69-85. DOI: 10.1134/s0081543810040073.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами М. : Наука, 1977. 512 с.
3. Kharkevych Yu. I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018. **50**, N 8. P. 38–49. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40.
4. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu. I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals *Acta Comment*. Univ. Tartu. Math. 2018. **22**, N 1. P. 2336. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
5. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. 57, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
6. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
7. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. 68, N 11. — P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
8. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. On the approximation of the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. P. 625–634. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6.
9. Степанец А.И. Методы теории приближения. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.

10. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
11. Zhyhallo T. V., Kharkevych Yu. I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. by Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. 61, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
12. Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta} H^{\alpha}$. *Mathematical Notes*. 2014. **96**, N 5–6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/s0001434614110406.
13. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
14. Zhyhallo T.V. Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson-Chebyshev integral. *Journal of Automation and Information Sciences* . 2018. **50**, N 5. P. 34–48. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.40.
15. Hembars'ka S. B., Zhyhallo K. M. Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 7. P. 1075–1084. DOI: 10.1007/s11253-017-1416-5.
16. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
17. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
18. Kharkevych Yu. I., Kal'chuk I. V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
19. Zhyhallo K. M., Kharkevych Yu. I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
20. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
21. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. *63*, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
22. Baskakov V.A. Some properties of operators of Abel-Poisson type. *Mathematical Notes*. 1975. **17**, N 2. P. 101–107.
23. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л. : Гостехиздат, 1948. 460 с.
24. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. : Наука, 1973. 228 с.
25. Kharkevych Yu.I. On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 10. P. 74–81. DOI: 10.1615/JAutomatScien.v49.i10.80.
26. Натансон И. П. О порядке приближения непрерывной 2π- периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона. *Докл. АН СССР*. 1950. **72**. С.11–14.
27. Тиман А. Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. *Докл. АН СССР*. 1950. **74**. С. 17–20.
28. Каниев С. Об отклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений. *Доклады АН СССР.* 1963. 153, № 5. С. 995–998.
29. Pych P. On biharmonic function in unit disk. *Ann. pol. math.* 1968. **20**, N 3. P. 203–213.
30. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proceedings of Steklov Institute of Mathematics*. 2015. **291**. P. 56–65. DOI: 10.1134/s0081543815090047.
31. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. On a differential game in a system with dictributed parameters. *Proceedings of Steklov Institute of Mathematics.* 2016. **292**. P. 276–285. DOI: 10.1134/s0081543816020243.

Получено 26.12.2018