$f(z)$ чи $L(\lambda)$ має при порядках p та q нескінченний тип, то за умови виконання нерівності $1/p + 1/q > 1$ знайдуться $\varepsilon_1 > 0$ та $\varepsilon_2 > 0$ такі, що виконуватиметься нерівність $1/(p + \varepsilon_1) + 1/(q + \varepsilon_2) > 1$. Тоді існують $R > 0$, $k_1 > 0$ та $k_2 > 0$ такі, що $M_1(r) < e^{k_1 r^{p+\varepsilon_1}}$, $M_2(r) < e^{k_2 r^{q+\varepsilon_2}}$, $r > R$, де $M_1(r) = \max\limits_{z\in D_r} |f(z)|$, $M_2(r) = \max\limits_{z\in D_r} |L(z)|$. Тому коефіцієнти a_r та b_{r+s} степеневих рядів для функцій $f(z)$ та $L(\lambda)$ мають аналогічні до (а) та (б) оцінки. Далі доведення проводиться подібно до доведення теореми 1. Теорему доведено.

1. *Гольдберг А. А.* О формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных // Докл. и сообщ. Ужгород. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 1961. – № 4. – С. 101–103.
2. *Еремин С. А.* О целых функциях двух переменных // Укр. мат. журн. – 1957. – **9**, № 1. – С. 30–43.
3. *Маергойз Л. С.* К вопросу о связях между различными определениями порядка и типа целых функций многих комплексных переменных // Сиб. мат. журн. – 1966. – **7**, № 6. – С. 1268–1292.
4. *Темляков А. А.* Целые функции комплексных переменных // Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та. – 1954. – **20**. – С. 7–16.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. – Москва: Наука, 1985. – 464 с.
6. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту "Львів. політехніка", 2002. – 292 с.
7. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. – Москва: Наука, 1981. – 320 с.

Національний університет
"Львівська політехніка"

Надійшло до редакції 16.11.2006

УДК 512

Ю. Г. Леонов

Об оценке снизу роста одной смешанной группы автоморфизмов деревьев

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. А. Перестюком)

The lower bound of the growth for one infinite group of automorphisms of a regular tree is given.

Рост конечно порожденных бесконечных групп является одной из важнейших характеристик, изучаемой в аналитической теории групп.

Напомним, что функция роста конечно порожденной группы G с системой порождающих S определяется соотношением

$$\gamma(n) = \#\{g \in G;\ l_S(g) \leqslant n\},$$

где $l_S(g)$ — длина элемента g относительно S.

Будем говорить, что функция $f_1(n)$ растет не быстрее, чем $f_2(n)$: $f_1(n) \preceq f_2(n)$, если найдется $c > 0$ такое, что $f_1(n) \leqslant f_2(cn)$, для любых $n \in \mathbb{N}$. Если $f_1(n) \preceq f_2(n)$ и $f_2(n) \preceq f_1(n)$, то функции эквивалентны: $f_1(n) \sim f_2(n)$. Функции роста одной и той же конечно порожденной группы при различных конечных системах порождающих эквивалентны.

Исследуя функции роста группы, мы можем узнать другие важнейшие ее характеристики. Так, если группа G растет медленнее, чем экспоненциальная функция, т. е.

$$\gamma_G(n) \prec e^n,$$

то G является аменабельной, а если медленнее какой-либо степенной функции, то G почти нильпотентна [1].

Группа G, действующая на бесконечном регулярном корневом d-дереве (от каждой вершины вниз исходит ровно d ребер) T_d, называется самоподобной, если множество ограничений действий ее элементов на каждом поддереве совпадает с G. Первые примеры групп, функции роста которых имеют промежуточный рост, т. е. растут быстрее любой степенной функции, но медленнее экспоненциальной, были найдены именно среди самоподобных групп [2]. Впоследствии было показано, что не почти нильпотентные финитно-аппроксимируемые группы удовлетворяют неравенству $\gamma_G(n) \succeq e^{\sqrt{n}}$ [3]. Однако указать более лучшую оценку роста снизу для самоподобных групп очень непросто. Впервые это было сделано для известной 2-группы Григорчука (построенной в [4]) в работе [5]. Впоследствии метод оценки роста групп снизу был применен к известному классу p-групп Гупты–Сидки ([6]) в работе [7].

В данной работе мы развиваем методы, найденные в [5, 7], и указываем оценку снизу роста одной смешанной самоподобной группы, действующей на бинарном дереве.

Группа G, указанная Н. Гуптой, строится следующим образом. Элементы группы G являются автоморфизмами регулярного корневого 4-дерева T. Будем говорить, что вершина v дерева T находится на уровне $n > 0$, если эта вершина удалена от корневой вершины на расстоянии n. Регулярное корневое дерево T_v с корневой вершиной v является поддеревом дерева T и совпадает с ним после отождествления корневых вершин этих деревьев. Ясно, что число деревьев с корневой вершиной уровня n равно 4^n. Обозначим такие деревья как $T_{n,i}$, $i = 1, \ldots, 4^n$, и назовем их деревьями уровня n. Множество вершин уровня n обозначим $V^{(n)}$, а корневую вершину дерева $T_{n,i}$ — $v_{n,i}$.

Пусть $\alpha \in \operatorname{Aut} T$ является циклической перестановкой четырех деревьев с корневыми вершинами первого уровня ($T_{1,1}$ переходит в $T_{1,2}$ и так далее, $T_{1,4}$ в $T_{1,1}$). Определим действие элемента β. Его удобнее рассматривать на поддеревьях уровня 1. На деревьях $T_{1,1}$ и $T_{1,3}$ элемент β действует тривиально. На дереве $T_{1,2}$ элемент β действует как α на T (после отождествления T и $T_{1,2}$), а на дереве $T_{1,4}$ — как β.

Таким образом, действие элемента β задано рекуррентно. Схематично такое действие удобно обозначать следующим образом: $\beta = (1; \alpha; 1; \beta)$, где 1 — нейтральный элемент группы G. Группа $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ и является предметом нашего исследования. Она является бесконечной непериодической (хотя порождающие элементы имеют порядок 4), самоподобной группой. Ясно, что $G \leqslant \operatorname{Aut} T$. Основной результат показывает оценку снизу роста группы G.

Теорема 1. *Функция роста группы Гупты удовлетворяет неравенству*

$$\gamma_G(n) \succeq e^{n^{\log_Q 4}},$$

где $Q = \sqrt{255{,}2}$.

Так как $Q < 16$, то $\log_Q 4 > 1/2$ и указанная оценка нетривиальная.

Доказательство теоремы основывается на нескольких леммах. Пусть $g \in G$. Сужение действия элемента g на поддерево $T_{n,i}$ с корневой вершиной v назовем проекцией элемента g

и обозначим g_v. Из определения элементов группы G видно, что сужение элемента есть также элемент группы G (после отождествления дерева T с соответствующим поддеревом). Зафиксируем систему порождающих $S = \{\alpha, \beta\}$.

Лемма 1. *Длина любого элемента $g \in G$ оценивается следующим образом:*

$$l_S(g) \leqslant 4 \sum_{v \in V^{(1)}} l_S(g_v) + \mathrm{const}.$$

Глубиной элемента $g \in G$ назовем наименьшее $n \geqslant 0$ с условием $g_v \in S \bigcup \{1\}$ для любого $v \in V^{(n)}$. Такое число обозначим как $f(g)$. Каждый элемент группы G имеет конечную глубину. Будем считать, что глубина порождающих и нейтрального элементов равна 0. Обозначим $F(n) = \{g \in G \mid f(g) \leqslant n\}$. Ясно, что если $f(g) \geqslant k$, то $f(g_v) \leqslant f(g) - k$ для $v \in V^{(k)}$.

Метод оценки роста группы снизу основывается на изучении роста функции, характеризующей наибольшую длину элемента глубины n:

$$r(n) = \max_{g \in F(n)} l_S(g).$$

По индукции из предыдущей леммы следует, что $r(n) \leqslant C \cdot 4^n$, где C — некоторая константа. Однако этой оценки недостаточно для нетривиальной оценки снизу роста группы G. Рассмотрим "половину" множества вершин глубины 2:

$$V_1^{(2)} = \{v_{2,i} \mid i = 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12\}.$$

Для $\varepsilon \in [0; 1]$ рассмотрим ε-равномерное множество

$$F_\varepsilon(n) = \Big\{g \in G \mid f(g) \leqslant n, \min_{v \in V_1^{(2)}} l_S(g_v) \geqslant \varepsilon \max_{v \in V_1^{(2)}} l_S(g_v)\Big\}.$$

Максимальную длину элемента множества $F_\varepsilon(n)$ обозначим через $r_\varepsilon(n)$. Для ε-равномерного множества, благодаря сложным комбинаторным рассуждениям, можно существенно усилить лемму 1.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon \in [0; 1]$ и натурального $n > 2$ выполняется*

$$r_\varepsilon(n) \leqslant Q r(n-2) + \mathrm{const},$$

где $Q = 240 + 15{,}2\varepsilon$.

Каждый элемент группы G лежит в некотором ε-равномерном множестве. Отсюда и из леммы 2 в худшем случае (при $\varepsilon = 1$) имеем оценку $r(n) \leqslant 255{,}2 r(n-2) + \mathrm{const}$ или

$$r(n) \leqslant C \cdot (255{,}2)^{n/2}. \tag{1}$$

Покажем теперь, как, используя последнее неравенство, получить утверждение теоремы. Пусть $v \in V^{(n)}$. Рассмотрим множество

$$\operatorname*{Rist}_G(v) = \{g \in G;\ g_{v'} = 1,\ \text{при}\ v' \in V^{(n)}, v' \neq v\},$$

которое называется жестким стабилизатором вершины v. Группа, порожденная жесткими стабилизаторами вершин множества $V^{(n)}$, называется жестким стабилизатором уровня n и обозначается $\operatorname*{Rist}_G(n)$. Ясно, что $\operatorname*{Rist}_G(n) \triangleleft G$.

Лемма 3. *Жесткий стабилизатор группы G любого уровня является подгруппой конечного индекса*

$$|G/\operatorname*{Rist}_G(n)| < \infty.$$

Из последнего утверждения следует, что мощность множества $F(n)$ можно оценить снизу: $|F(n)| \geqslant R^{4^n}$, где $R \geqslant 2$ — некоторая константа. По определению, количество элементов длины $\leqslant r(n)$ не меньше, чем $|F(n)|$. Отсюда имеем неравенство $\gamma_G(r(n)) \geqslant R^{4^n}$. Принимая во внимание неравенство (1), легко получить утверждение теоремы.

Заметим, что данный метод оценки снизу роста самоподобных групп может быть применен ко многим известным самоподобным группам. Для большинства таких групп верны аналоги лемм 1 и 3. Однако наибольшая сложность состоит в комбинаторном утверждении леммы 2.

1. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Publ. Math. IHES. – 1981. – **53**. – P. 53–73.
2. *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – № 5. – С. 939–985.
3. *Григорчук Р. И.* О ряде Гильберта–Пуанкаре градуированных алгебр, ассоциированных с группами // Мат. сб. – 1989. – **180**, № 2. – С. 207–225.
4. *Григорчук Р. И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его приложения. – 1980. – **14**, вып. 1. – С. 53–54.
5. *Леонов Ю. Г.* Об оценке снизу роста 3-порожденной 2-группы // Мат. сб. – 2001. – **192**, вып. 11. – С. 77–92.
6. *Гупта Н., Сидки С.* Some infinite p-groups // Алгебра и логика. – 1983. – **22**, № 5. – С. 584–589.
7. *Леонов Ю. Г.* Нижняя оценка функции роста p-групп Гупты–Сидки // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 1. – С. 71–78.

Одесская национальная академия связи им. А. С. Попова

Поступило в редакцию 25.10.2006

УДК 519.6

О. М. Литвин

Інтерполювання звичайних диференціальних операторів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Basic statements of the theory of the approximation of ordinary differential operators by other ordinary differential operators are given. Approximated and approximating operators are equal on a given system of functions (functional knots).

1. Постановка проблеми. Теорія наближення функцій однієї та багатьох змінних включає в себе, як важливий частинний випадок, теорію інтерполювання. Оператори $L_n u(x)$ інтерполювання функцій $u(x)$ відновлюють (взагалі кажучи, наближено) $u(x)$ між заданими точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, використовуючи значення функції $u(x)$ або (у більш загальному