УДК 621.51

А.А. Стенин, В.П. Пасько, И.Г. Дроздович

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Ключевые слова: линейные динамические системы, критерии оптимизации, функциональный анализ, норма вектора управления, неравенство Гельдера.

Введение

Решению задач оптимизации линейных динамических систем посвящен ряд фундаментальных работ, в частности [1–3]. В большинстве из них задача оптимизации решается на основе вариационного исчисления, принципа максимума и динамического программирования. Впервые применение методов функционального анализа к решению задачи максимального быстродействия было предложено в работе [4], где для построения оптимального управления использовались некоторые свойства функционалов в нормированных пространствах, полученных в [5]. Кроме того, в [6] показано, что результаты работы [5] применимы при гораздо более общих предположениях относительно переменных управления. Так, в работе [7] предложена новая синергетическая концепция оптимизации нелинейных объектов, опирающаяся на фундаментальное свойство самоорганизации природных диссипативных систем. В данной статье описан практический инструментарий методов функционального анализа для решения типовых задач оптимизации линейных динамических систем.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации управления полностью управляемой линейной динамической системы:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \\ \bar{y}(t) &= C\bar{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\bar{x}$ — n-мерный вектор состояния системы; $\bar{u}(t)$ — r-мерный вектор управления; $\bar{y}(t)$ — m-мерный вектор наблюдения; A, B, C — матрицы коэффициентов объекта, интенсивности управления и измерителя размерности $(n\times n)$, $(n\times r)$ и $(m\times n)$.

Пусть заданы граничные условия вида

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0,\ \ \bar{x}(T) = \bar{x}_T. \tag{2}$$

Считаем также, то норма управления в банаховом пространстве задается в виде

$$\|\bar{u}(t)\|_p = \left[\int_0^T \left(\sum_{j=1}^r |u_j(t)|^p dt\right)\right]^{1/p} = \|\bar{u}^T(t)\|_p. \tag{3}$$

Предположим также, что вектор допустимого управления ограничен, т.е.

$$\left\|\bar{u}(t)\right\|_p \le M. \qquad (4)$$

Из последнего условия следует, что при $p=\infty$

$$\max_j \max_t u_j(t) \le M, \;\; 0 \le t \le T. \qquad (5)$$

Выбор нормы вектора управления в виде (3) неслучаен, так как при $p=\infty$ имеем задачу максимального быстродействия. Действительно,

$$\lim_{p\to\infty}\left\|\bar{u}(t)\right\|_p = r\ln M\int_0^T 1dt = k\int_0^T 1dt, \text{ или } \frac{\left\|\bar{u}(t)\right\|_p}{k} = \int_0^T 1dt.$$

Кроме того, при $p=2$ неравенству (5) с учетом (3) отвечает ограничение на энергию управления на интервале [0, T], т.е. имеем задачу оптимизации среднего значения энергии. Для $p=1$ это неравенство с учетом (3) означает ограниченность интеграла, взятого на промежутке времени [0, T] от суммы абсолютных значений управляющих переменных, т.е. имеем задачу чистого расхода топлива.

Известно [2], что решение дифференциального уравнения вида (1) определяется выражением

$$\bar{x}(t) = \Phi(t)\,\bar{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,B\bar{u}(\tau)\,d\tau,$$

где $\Phi(t)$ — матрица перехода. Отсюда имеем

$$\bar{y}(t) = C\Phi(t)\,\bar{x}_0 + \int_0^t C\Phi(t-\tau)\,B\bar{u}(\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Необходимо найти управление, минимизирующее норму (3) и удовлетворяющее граничным условиям (2) при ограничении (4) на интервале управления [0, T].

Решение задачи

Рассмотрим вектор разности:

$$\bar{d} = \bar{x}_T - C\Phi(T)\,\bar{x}_0. \qquad (7)$$

С учетом (6) имеем

$$\bar{d} = \int_0^T G(T-\tau)\,\bar{u}(\tau)\,d\tau, \qquad (8)$$

где $G(t) = C\Phi(t)\,B$ — матрица размерности ($m\times n$).

Введем некоторый вспомогательный m-мерный вектор v, для которого справедливо

$$\bar{w}^T(t) = \bar{v}^T G(t) \;\text{ или }\; G(t)^T\,\bar{v} = \bar{w}(t). \qquad (9)$$

Применяя неравенство Гельдера [8], с учетом соотношений (8) и (9) получаем

$$\left|\bar{v}^T d\right| = \left|\int_0^T \bar{w}^T(T-\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau\right| \le \int_0^T \left|\bar{w}^T(T-\tau)\bar{u}(\tau)\,d\tau\right| \le \left\|\bar{w}(t)\right\|_q \left\|\bar{u}(t)\right\|_q, \qquad (10)$$

где

$$\left\|\bar{w}(t)\right\|_q = \left\|\bar{w}^T(t)\right\|_q = \left[\int_0^T \sum_{j=1}^r \left|w_j(T-\tau)^q\right|^T d\tau\right]^{1/q} = \left[\int_0^T \sum_{j=1}^r \left|w_j(\tau)\right|^q d\tau\right]^{1/q}$$

или ($1/p$ + $1/p$) = 1.

Согласно неравенству (10) имеем

$$\|\bar{u}(t)\|_p \geq \frac{|\bar{v}^T d|}{\|\bar{w}(t)\|_q} = \frac{|\bar{v}^T d|}{\|\bar{v}^T G(t)\|}. \tag{11}$$

Правая часть этого выражения зависит от выбора вектора v. Из равенства (8) следует, что соотношение (10) выполняется для любого вектора v. Следовательно, неравенства (10) и (11) также выполняются для любого вектора v. Отсюда следует, что

$$\|\bar{u}(t)\|_p \geq \max_{\bar{v}} \frac{|\bar{v}^T d|}{\|\bar{w}(t)\|_q}, \tag{12}$$

$$(\|\bar{u}(t)\|_p)_{\min} \geq \max_{\bar{v}} \frac{|\bar{v}^T d|}{\|\bar{w}(t)\|_q}. \tag{13}$$

Исключим из рассмотрения все векторы, кроме тех, для которых $\bar{v}^T d = 1.$ Это возможно, так как $\|\bar{u}(t)\|_p$ не зависит от используемой формы записи (cv или v). Тогда

$$\max_{\bar{v}} \frac{|\bar{v}^T d|}{\|\bar{w}(t)\|_q} = \max \frac{1}{\|\bar{w}(t)\|_q} = \frac{1}{\min\limits_{v} \|\bar{w}(t)\|_q}.$$

Обозначим $\bar{v}^0$ вектор, для которого норма $\|\bar{w}(t)\|_q$ минимальна при условии, что $\bar{v}^T \bar{d} = 1.$ При этом

$$\|\bar{w}^0\|_q = \min_{\bar{v}} \|\bar{w}(t)\|_q = \|G(t)\bar{v}^0\|_q.$$

Тогда из соотношения (13) получим равенство

$$(\|\bar{u}(t)\|_p)_{\min} = \frac{1}{\|\bar{w}^0\|_q}.$$

Последнее соотношение выполняется всегда, когда неравенство

$$1 = |(\bar{v}^0)^T d| \leq \|\bar{w}^0\|_q \|\bar{u}(t)\|_p, \tag{14}$$

полученное из неравенства Гельдера (10), обращается в равенство. Нетрудно убедиться, что неравенство Гельдера, а следовательно, и неравенство (14) превращаются в равенства тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$u_j^0(t) = u_j^{\text{opt}}(t) = \frac{|w_j^0(T-t)|^{q-1}}{(\|\bar{w}^0\|_q)^q} \operatorname{sign} w_j^0(T-t) \tag{15}$$

для всех $t \in [0, T]$ и $j = 1, 2, ..., r.$

Соотношение (15) является необходимым и достаточным условием оптимальности в задачах оптимизации линейных динамических систем. На его основе нетрудно получить выражение для оптимального управления в частных случаях задач оптимизации. Например, для задачи максимального быстродействия (минимального времени перехода) в норме вектора управления (3) следует принять

$p=\infty$. В этом случае норма вектора управления равна максимальному смещению M в выражении (4), что, как было показано ранее, и соответствует bang-bang-control (двухступенчатый или двухпозиционный контроль) в оптимальных по быстродействию системах [2].

Убедимся в этом следующим образом. С учетом (4) минимальное время $T = T_{\min}$ существует, исходя из неравенства

$$\|\bar{u}(t)\|_p \geq \frac{1}{\|\bar{w}^0\|_p},$$

полученного из неравенства (14), тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$M \geq \frac{1}{\|\bar{w}^0\|_p} \text{ или } \|\bar{w}^0\|_p \geq \frac{1}{M}. \tag{16}$$

Из (16) следует, что если $\|\bar{w}^0\|_p$ является непрерывной функцией T, то время $T_{\min}$ равно минимальному значению T, для которого

$$\|\bar{w}^0\|_p = \frac{1}{M}. \tag{17}$$

В этом случае из соотношений (15) и (17) следует, что координаты вектора оптимального управления

$$u_j^0(t) = u_j^{\text{opt}}(t) = M^q \left| w_j^0(T_{\min}-t)\right|^{q-1} \operatorname{sign} w_j^0(T_{\min}-t). \tag{18}$$

Наконец, учитывая, что при $p=\infty$, $q=1$, окончательно имеем

$$u_j^0(t) = u_j^{\text{opt}}(t) = \operatorname{sign} w_j^0(T_{\min}-t). \tag{19}$$

Если неравенства (16) не выполняются для никакого значения времени T, то для заданного ограничения M задача не имеет решения.

Как указывалось ранее, при $p = 1$ имеем задачу чистого расхода топлива, а при $p = 2$ — задачу оптимизации расхода энергии, для которых также нетрудно получить конечное выражение для оптимального управления.

Покажем практическое использование предложенного инструментария методов функционального анализа для решения задач минимизации энергетических затрат и минимизации времени перехода в линейной динамической системе (1).

Пусть динамика полностью наблюдаемого и управляемого объекта описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = u_3(t). \end{cases} \tag{20}$$

Для системы однородных дифференциальных уравнений, получаемой из (20) при $u(t) = 0$, находим матрицу перехода

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решим задачу построения оптимального управления $u^0(t)$, для которого время перехода рассматриваемой системы из начального состояния $x(0) = x_0$ в конечное $x(T) = x_T = 0$ принимает минимальное значение и, кроме того, выполнено условие (4).

Найдем $G(t)$ как

$$G(t) = C\Phi(t)B = \begin{bmatrix} t & t^2/2 \\ 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что начальное состояние системы $x(0) = [-1, 0, 0]^T$. Из (8) находим вектор $d = [1, 0, 0]^T$. Предположим, что полная энергия переменных управления ограничена ($p=2$ и $q=2$), т.е.

$$(\|\bar{u}(t)\|_2)^2 = \int_0^T \left| |u_2(t)|^2 + |u_3(t)|^2 \right| dt \le E = M^2.$$

В этом случае решение поставленной задачи сводится к минимизации выражения

$$\|\bar{w}(t)\|_2 = \left[\int_0^T \left| |w_2(t)|^2 + |w_3(t)|^2 \right| dt \right]^{1/2}. \qquad (21)$$

Из соотношения (10) получим

$$\bar{w}^T(t) = \left[0;\ v_1 t + v_2;\ v_1 \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3 \right]^T. \qquad (22)$$

Следовательно, минимальное значение нормы выражения (21) с учетом (22) можем записать как

$$(\|\bar{w}^0\|_2)^2 = \min_{v_1, v_2, v_3} \int_0^T \left[(v_1 t + v_2)^2 + \left(v_1 \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3 \right)^2 \right] dt. \qquad (23)$$

Условие $v^T d = 1$ означает, что $v_1 = 1$.

Интегрируя выражение (23) и приравнивая частные производные по v_2 и v_3 нулю, имеем

$$v_2^0 = -\frac{T}{2};\ v_3^0 = -\frac{T^2}{12}.$$

Подставив эти значения в (23), получим

$$(\|\bar{w}^0\|_2)^2 = T^3 \left(\frac{T^2}{720} + \frac{1}{12} \right).$$

Отсюда с учетом (23) имеем

$$T_{\min}^3 \left(\frac{T_{\min}^2}{720} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{M^2} = \frac{1}{E}.$$

 ISSN 0572-2691

Поскольку значение E известно (задано заранее), можно найти минимальное время перехода $T_{\min}$. И наконец, используя (18), находим оптимальное управление:

$$u_2^{\text{opt}}(t) = E\left(\frac{T_{\min}^2}{12} - \frac{T_{\min}}{2}t + \frac{t^2}{12}\right),$$

$$u_3^{\text{opt}}(t) = E\left(\frac{T_{\min}}{2} - t\right), \; 0 \le t \le T_{\min}.$$

Таким образом, решена задача минимизации времени перехода рассматриваемой линейной динамической системы при ограниченных энергетических ресурсах и при отсутствии ограничений на переменные управления.

В случае классической задачи максимального быстродействия при ограничениях на переменные управления, т.е.

$$\max\|u_2(t), u_3(t)\| \le U_M = M, \; 0 \le t \le T,$$

будем иметь

$$\|\overline{w}^0\|_1 = \min_{\overline{V}}\|\overline{w}\|_1 = \min_{v_2, v_3}\int_0^T \left[|v_1 t + v_2| + \left|\frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right|\right] dt. \tag{24}$$

Интеграл (24) достигает минимума при

$$v_2^0 = -\frac{T}{2}; \; v_3^0 = -\frac{3T^2}{32},$$

причем

$$\|\overline{w}^0\|_1 = \frac{T^2}{32}(T+8).$$

Согласно формуле (17) минимальное значение времени $T_{\min}$ находится из условия

$$\|\overline{w}^0\|_1 = \frac{T_{\min}^2}{32}(T_{\min}^2 + 8) = \frac{1}{u_M} = \frac{1}{M}.$$

Исходя из (19), оптимальное управление окончательно запишем в виде

$$u_2^{\text{opt}}(t) = M\,\text{sign}\left(\frac{3T_{\min}^2}{32} - \frac{T_{\min}}{2}t + \frac{t^2}{2}\right),$$

$$u_2^{\text{opt}}(t) = M\,\text{sign}\left(\frac{T_{\min}}{2} - t\right), \; 0 \le t \le T_{\min}.$$

Заключение

При достаточно общих предположениях на основе функционального анализа получены соотношения для вектора оптимального управления. Однако для окончательного построения оптимального управления требуется решить задачу минимизации нормы (3) вектора управления, что, как правило, достаточно трудно [9]. В приведенных примерах показано, что в отдельных случаях возможно аналитическое решение задачи оптимизации линейных динамических систем [10] без использования численных методов и дополнительных упрощающих условий.

О.А. Стенін, В.П. Пасько, І.Г. Дроздович

ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Запропоновано практичний інструментарій методів функціонального аналізу для вирішення типових задач оптимізації лінійних динамічних систем. Реалізація запропонованих методів продемонстрована на прикладах, в яких показано, що в окремих випадках можливе аналітичне розв’язання задач оптимізації без використання чисельних процедур і додаткових спрощувань умов.

Ключові слова: лінійні динамічні системи, критерії оптимізації, функціональний аналіз, норма вектора управління, нерівність Гельдера.

A.A. Stenin, V.P. Pasko, I.G. Drozdovich

OPTIMIZATION OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS BY METHODS OF FUNCTIONAL ANALYSIS

A practical toolkit for methods of functional analysis for solving typical problems of optimizing linear dynamical systems is proposed. The implementation of the proposed methods is demonstrated by examples in which it is shown that in some cases an analytical solution of optimization problems is possible without the use of numerical procedures and additional simplifying conditions.

Keywords: linear dynamic systems, optimization criteria, functional analysis, control vector norm, Helder inequality

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1969. 384 с.
2. Michael Athans, Peter L. Falb optimal control: an introduction to the theory and its applications. Courier Corporation, 2006. 879 p.
3. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. 4-е изд. Спб. : БХВ-Петербург, 2016. 560 с.
4. Красовский Н.Н. К теории оптимального регулирования. *Автоматика и управление*. 1957. Т. 18, № 11. С. 960–970.
5. Крейн М.Г., Ахиезер Н.И. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков : ГНТИ Украины, 1938. 256 с.
6. Куликовски Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. М. : Наука,1967. 380 с.
7. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М. : Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
8. Соболев Л.С. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988. 336 с.
9. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. *Методы функционального анализа.* Минск : Издательство БГУ им. Ленина, 1973. 246 с.
10. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М. : Наука,1969, 118 с.

Получено 07.08.2018