УДК 517.97

Г.Г. Исмаилова

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ МЛАДШЕМ ЧЛЕНЕ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, коэффициент младшего члена, обратная задача, оптимальное управление.

Введение

Коэффициентные обратные задачи для уравнений с частными производными, заключаются в необходимости определить коэффициенты уравнения состояния. Эти задачи тесно связаны с задачами оптимального управления для уравнений в частных производных с управлениями в коэффициентах. Коэффициентными обратными задачами для различных уравнений занимались авторы работ [1–5], а также [6, 7].

В большинстве этих публикаций обратные задачи решаются с помощью интегральных уравнений. Одним из эффективных методов решения обратных задач является приведение задач к задачам оптимального управления, исследование их с помощью методов теории оптимального управления [8]. Этот метод недостаточно разработан для гиперболических уравнений. В данной работе он применен к задаче определения коэффициента при младшем члене для многомерного гиперболического уравнения второго порядка с интегральным дополнительным условием.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения пары функций $(u(x,t),\ v(x)) \in W_2^1(Q)\times$ $\times L_\infty(\Omega)$ в цилиндре $Q=\Omega\times(0,\ T)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+v(x)u=f(x,t),\ (x,\ t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u\big|_S=0, \tag{3}$$

$$\int_0^T K(x,t)u(x,t)dt=\chi(x),\quad x\in\Omega. \tag{4}$$

Здесь Ω — область в R^n с гладкой границей Γ, $S=\Gamma\times(0,T)$ — боковая поверхность цилиндра Q, $f\in L_2(Q)$, $u_0\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $u_1\in L_2(\Omega)$, $K(x,t)\in L_\infty(Q)$, $\chi(x)\in$ $\in L_2(\Omega)$, $a_{ij}(x,t)\in L_\infty(Q)$, $i,\ j=\overline{1,n}$, — заданные функции, причем $\forall\xi\in R^n$, $\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\ge\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $\alpha=\text{const}>0$, $a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t)$, $i,\ j=\overline{1,n}$, $\left|\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}\right|\le$ $\le M$ п.в. на Q, $i,\ j=\overline{1,n}$.

При заданной функции $v(x) \in L_\infty(\Omega)$ задача (1)–(3) является прямой задачей и при принятых условиях имеет единственное обобщенное решение из пространства $W^1_{2,0}(Q)$ [9]. При этом существует оценка

$$\| u \|_{W_2^1(Q)} \le c \left[\| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)} + \| u_1 \|_{L_{2(\Omega)}} + \| f \|_{L_2(Q)} \right]. \tag{5}$$

Если функция $v(x)$ неизвестна, то (1)–(4) — обратная задача к (1)–(3).

Обратную задачу (1)–(4) приводим к следующей задаче оптимального управления: найти такую функцию $v(x)$ из $V = \{v(x) : v(x) \in L_2(\Omega),\ \alpha \le v(x) \le \beta$ п.в. на $\Omega\}$, α, β — заданные конечные числа, которая доставляет минимум функционалу

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^T K(x,t)\, u\,(x,t;\ v)\, dt - \chi(x) \right)^2 dx, \tag{6}$$

где $u(x,t;\ v)$ — решение задачи (1)–(3), соответствующее функции $v(x)$.

Функцию $v(x)$ назовем управлением, а множество V — классом допустимых управлений. Если найдем допустимое управление, которое доставляет функционалу (6) нулевое значение, то дополнительное условие (4) выполняется.

Существование оптимального управления

Теорема 1. Пусть выполняются условия при постановке задачи (1)–(4). Тогда в задаче оптимального управления (1)–(3), (6) множество $V_* = \{v_* \in V :$ $: J(v_*) = \inf\limits_{v \in V} J(v)\}$ непусто, слабокомпактно в $L_2(\Omega)$ и любая минимизирующая последовательность из V слабо сходится в $L_2(\Omega)$ к множеству V_*.

Доказательство. Докажем, что функционал (6) в $L_2(\Omega)$ слабо непрерывен на множестве V. Пусть $\{v^{(m)}(x)\} \in V$ — минимизирующая последовательность. Тогда из этой последовательности можно выделить такую подпоследовательность (ее тоже обозначим $\{v^{(m)}(x)\}$), которая слабо сходится в $L_2(\Omega)$ к некоторому элементу $v(x)$. Поскольку V выпукло и замкнуто в $L_2(\Omega)$, оно слабо замкнуто, поэтому $v(x) \in V$. Решения задач (1)–(3), которые соответствуют функциям $v^{(m)}(x)$, обозначим $u^{(m)}(x,t) = u(x,t;\ v^{(m)})$.

Из условий, налагаемых на данные задачи, следует [9], что для $u^{(m)}(x,t)$ имеет место оценка

$$\left\| u^{(m)} \right\|_{W_2^1(Q)} \le c \left[\| u_0 \|_{W_2^1(\Omega)} + \| u_1 \|_{L_2(\Omega)} + \| f \|_{L_2(Q)} \right]. \tag{7}$$

Тогда из (7) получаем, что из $\{u^{(m)}\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u^{(m_k)}\}$, для которой в силу теоремы вложения [10, c.116]

$$\begin{gathered} u^{(m_k)} \longrightarrow u \text{ сильно в } L_2(Q), \\ \frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i},\quad i = \overline{1, n}, \text{ слабо в } L_2(Q), \\ \frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(Q) \text{ при } k \to \infty. \end{gathered} \tag{8}$$

 ISSN 0572-2691

Покажем, что $u = u(x, t;\ v)$. В силу определения обобщенного решения задачи (1)–(3) при $t = 0$ выполняется условие $u^{(m)}(x, 0) = u_0(x)$ и

$$\int\limits_Q \left[-\frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + v^{(m_k)} u^{(m_k)} \eta \right] dxdt -$$

$$- \int\limits_\Omega u_1(x)\, \eta\, (x, 0) dx = \int\limits_Q f \eta dxdt, \tag{9}$$

$\forall \eta \in C^1(\overline{Q}),\ \eta(x, T) = 0,\ \eta|_S = 0.$

Тогда в (9)можно перейти к пределу при $k \to \infty$ с учетом соотношения (8):

$$\int\limits_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + vu\eta \right] dxdt - \int\limits_\Omega u_1(x)\, \eta(x,0) dx = \int\limits_Q f \eta dxdt,$$

$\forall \eta \in C^1(\overline{Q}),\ \eta(x, T) = 0,\ \eta|_S = 0.$

Это равенство показывает, что функция $u(x, t)$ соответствует допустимому управлению $v = v(x)$, т.е $u = u(x, t) = u(x, t;\ v)$.

В силу единственности решения задачи (1)–(3) для всей последовательности $u^{(m)}(x, t)$ имеет место соотношение

$$u^{(m)} \longrightarrow u \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ при } m \to \infty.$$

Тогда из выражения функционала (6) следует, что $J(v^{(m)}) \to J(v)$.

Таким образом, доказано, что функционал (6) в $L_2(\Omega)$ слабо непрерывен на множестве V. Отсюда из известной теоремы [11, с. 49] следует, что справедливы все утверждения теоремы 1.

Дифференцируемость функционала (6)

Теперь исследуем дифференцируемость по Фреше функционала (6).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функционал (6) непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $v \in V$ при приращении $\delta v \in L_\infty(Q)$ определяется выражением

$$< J^{/}(v),\ \delta v > = \int\limits_Q u \psi \delta v dxdt\ , \tag{10}$$

где $\psi = \psi(x, t;\ v)$ — обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ сопряженной задачи:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) + v\psi = -K(x, t) \left[\int_0^T K(x, t) u(x, t; v) dt - \chi(x) \right],\ (x, t) \in Q\ , \tag{11}$$

$$\psi|_S = 0,\ \ \psi|_{t=T} = 0,\ \ \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{t=T} = 0,\ \ x \in \Omega. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\delta v \in L_\infty(Q)$ — приращение управления на элементе $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$. Обозначим $\delta u(x, t) = u(x, t; v + \delta v) - u(x, t; v)$. Ясно, что функция $\delta u(x, t)$ — обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}-\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\ t)\frac{\partial \delta u}{\partial x_j}\right)+(v+\delta v)\delta u=-\delta v u,\ \ (x,\ t)\in Q, \tag{13}$$

$$\delta u\big|_s=0,\ \ \delta u\big|_{t=0}=0,\ \ \frac{\partial \delta u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0,\ \ x\in\Omega, \tag{14}$$

т.е. выполняется интегральное тождество

$$\int_Q\left[-\frac{\partial \delta u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial \delta u}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}+(v+\delta v)\delta u\eta\right]dxdt=-\int_Q \delta v u\eta dxdt,$$

$$\forall \eta\in W_{2,0}^1(Q),\ \eta(x,\ T)=0. \tag{15}$$

Как и в (5), для решения краевой задачи (13), (14) можно получить оценку

$$\|\delta u\|_{W_{2(Q)}^1}\le c\|\delta v\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{16}$$

Рассмотрим приращение функционала (6):

$$\Delta J(v)=J(v+\delta v)-J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\left[\int_0^T K(x,t)(u(x,t;\ v)+\delta u(x,t))dt-\chi(x)\right]^2-\right.$$

$$\left.-\left(\int_0^T K(x,t)u(x,t;\ v)dt-\chi(x)\right)^2\right\}dx=\int_\Omega\int_0^T[K(x,t)u(x,t;\ v)dt-\chi(x)]\times$$

$$\times\int_0^T K(x,t)\delta u(x,t)dtdx+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^T K(x,t)\delta u(x,t)dt\right)^2 dx. \tag{17}$$

При $v\in V$ под обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи (11), (12) понимается функция $\psi(x,t)\in W_2^1(Q)$, для которой при $t=T$ выполняется условие $\psi(x,T)=0$ и удовлетворяется интегральное тождество

$$\int_Q\left[-\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i}+v\psi g\right]dxdt=$$

$$=-\int_Q K(x,\ t)\left[\int_0^T (K(x,t)u(x,t;\ v)dt-\chi(x)\right]g(x,t)dxdt \tag{18}$$

для произвольных функций $g(x,t)\in W_2^1(Q)$, $g(x,0)=0$, $g\big|_S=0$.

Если в (15) положим $\eta=\psi(x,t;\ v)$, а в (18) — $g=\delta u(x,t;\ v)$ и вычтем полученные соотношения, то будем иметь

$$\int_Q \delta v\delta u\psi dxdt+\int_Q \delta v u\psi dxdt=\int_Q K(x,t)\left[\int_0^T[K(x,t)u(x,t;\ v)dt-\chi(x)]\delta u dxdt\right]. \tag{19}$$

Из (19) с учетом формулы (17) имеем

$$\Delta J(v)=\int_Q u(x,t;\ v)\psi(x,t;\ v)\delta v dxdt+\int_Q \psi(x,t;\ v)\,\delta u\delta v dxdt+$$

ISSN 0572-2691

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\int_0^T K(x,t)\delta u dt\right)^2 dx=\int_Q u(x,t;\ v)\psi(x,t;\ v)\,\delta v dxdt+R, \tag{20}$$

где $R=R_1+R_2,\ R_1=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\int_0^T K(x,t)\delta u dt\right)^2 dx,\ R_2=\int_Q \psi(x,t;v)\,\delta u\delta v dxdt.$

Теперь проведем оценку остаточного члена R. Ясно, что

$$R_1\le c\int_{\Omega}\left(\int_o^T|\delta u|dt\right)^2 dx\le c\int_{\Omega}\int_0^T(\delta u)^2 dxdt, \tag{21}$$

из (16) следует, что $R_1\le c\|\delta v\|^2_{L_\infty(\Omega)}$.

Как и в (5), для решения сопряженной задачи (11), (12) можно получить оценку

$$\|\psi\|\le c\left[\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}+\|u_1\|_{L_2(\Omega)}+\|f\|_{L_2(Q)}+\|\chi\|_{L_2(\Omega)}\right]. \tag{22}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и оценку (22), получаем

$$|R_2|=\left|\int_Q\psi(x,t;v)\delta u\delta v dxdt\right|\le c\left(\int_Q(\psi(x,t;\ v))^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\int_Q(\delta u)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\|\delta v\|_{L_\infty(\Omega)}\le c\|\delta v\|_{L_\infty(\Omega)}\cdot\|\delta u\|_{L_2(Q)}.$$

Здесь учтем оценку (16), тогда

$$|R_2|\le c\|\delta v\|^2_{L_\infty(\Omega)}. \tag{23}$$

Из (21) и (23) следует, что $R=R_1+R_2=o(\|\delta v\|_{L_\infty(Q)})$. Отсюда и из (20) имеем $\Delta J(v)=\int_Q u\psi\,\delta v dxdt+o(\|\delta v\|_{L_\infty(\Omega)})$. В результате $<J^{/}(v),\ \delta v>=\int_Q u\psi\,\delta v dxdt.$

Используя выражения дифференциала функционала (14), покажем, что отображение $J^{/}(v):L_\infty(\Omega)\to(L_\infty(\Omega))^*$ непрерывно.

Пусть $\delta\psi=\psi(x,t;\ v+\delta v)-\psi(x,t;\ v)$. Тогда $\delta\psi$ — решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial t^2}-\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_j}\right)+(v+\delta v)\delta\psi=-\psi\delta v-$$

$$-K(x,t)\int_0^T K(x,t)\,\delta u(x,t;\ v)dt,\ (x,t)\in Q,\ \delta\psi|_S=0,\ \delta\psi|_{t=T}=0,\ \frac{\partial\delta\psi}{\partial t}=0,\ x\in\Omega.$$

Отсюда, используя оценки (16), (22), имеем

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)}\le c\|\delta v\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{24}$$

Из выражения (10) следует, что

$$< J^{/}(v+\delta v) - J^{/}(v),\ \delta v >= \int_Q \left[u\delta\psi + \delta u\psi + \delta u\delta\psi\right]\delta v\, dxdt.$$

Тогда в силу неравенства Коши–Буняковского получим $\| J^{/}(v+\delta v) - J^{/}(v) \|_{(L_\infty(\Omega))^*} \le c\int_Q | u\delta\psi + \delta u\psi + \delta u\delta\psi | dxdt \le c[\| u \|_{L_2(Q)} \| \delta\psi \| + \| \delta u \|_{L_2(Q)} \| \psi \|_{L_2(Q)} + + \| \delta u \|_{L_2(Q)} \| \delta\psi \|_{L_2(Q)}]$. Теперь, учитывая оценки (5), (16), (22), (24), получаем, что $\left\| J^{/}(v+\delta v) - J^{/}(v) \right\|_{(L_\infty(\Omega))^*} \le c\| \delta v \|_{L_\infty(\Omega)}$. Отсюда при $\| \delta v \|_{L_\infty(\Omega)} \to 0$ следует, что $J^{/}(v)$ — непрерывное отображение из $L_\infty(\Omega)$ в $(L_\infty(\Omega))^*$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполняется условие теоремы 2. Тогда для оптимальности управления $v_*(x) \in V$ в задачах (1)–(3), (6) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_Q u_*(x, t)\psi_*(x, t)(v(x) - v_*(x))\, dxdt \ge 0, \quad \forall v \in V, \tag{25}$$

где $u_*(x, t) = u(x, t;\ v_*)$, $\psi_*(x, t) = \psi(x, t;\ v_*)$ — решения задачи (1)–(3); (11), (12), соответствующие управлению $v = v_*(x)$.

Доказательство. Множество V выпукло $L_\infty(Q)$. Кроме того, согласно теореме 2 функционал $J(v)$ непрерывно дифференцируем по Фрешена V и его дифференциал в точке $v \in V$ определяется равенствам (10). Тогда в силу теоремы 5 из [11, с. 28] на элементе $v_* \in V$ необходимо выполнение неравенства $< J^{/}(v_*), v - v_* > \ge 0$ при всех $v \in V$. Отсюда и из (10) следует справедливость неравенства (25) при всех $v \in V$.

Теорема доказана.

Г.Г. Ісмаїлова

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПРИ МОЛОДШОМУ ЧЛЕНІ БАГАТОВИМІРНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Визначення коефіцієнта при молодшому члені для багатовимірного гіперболічного рівняння другого порядку з інтегральною умовою перевизначення зведено до задачі оптимального керування і отриману задачу досліджено методами теорії оптимального керування. Доведено теорему про існування оптимального керування, встановлено безперервну диференційовність за Фреше функціонала і за допомогою розв’язання спряженої задачі виведено необхідну умову оптимальності.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, коефіцієнт молодшого члена, зворотна задача, оптимальне керування.

G.G. Ismayilova

ON DEFINITION OF COEFFICIENT OF THE LOWEST TERM IN THE MULTIDIMENSIONAL SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION

The problem of determining the coefficient of lowest term of the second order multidimensional hyperbolic equation with additional inteqral condition is reduced to the optimal control problem and the obtained problem is investigated by methods of optimal control theory. Existence theorem of optimal control is proved, continuous differentiability by Freshet of functional is established and is deduced necessary condition of optimality by the solution of conjugate problem.

Keywords: hyperbolic equation, coefficient of the lowest term, inverse problem, optimal control.

1. Кулиев Г.Ф. Задача оптимального управления коэффициентами для уравнения гиперболического типа. *Изв. вузов. Матем*. 1985. № 3. С. 39–44.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: Изд. 2. Новосибирск. 2009. 457 с.
3. Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Криворотько О.И. Оптимизационный метод решения обратной задачи термоакустики. *Сибирские электронные математические известия*. 2011. С. 263–292.
4. Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений. *Труды ИММ Ур ОРАН*. 2012. **18**, № 1. С. 147–164.
5. Искаков К.Т., Романов В.Г., Карчевский А.Л., Оралбекова Ж.О. Исследование обратных задач для дифференциальных уравнений и численных методов их решения. Астана, 2014. 182 с.
6. Ляшко С.И. Оптимальное управление коэффициентами для некоторых систем с распределенными параметрами. *Дифференциальные уравнения*. 1986. **22**, № 3. С. 458–462.
7. Ляшко С.И., Номировский Д.А., Сергиенко Т.И. Траекторная и финальная управляемость в гиперболических и псевдогиперболических системах с обобщенным воздействием. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 5. С. 157–166. 191–192.
8. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М. : Мир. 1972. 416 с.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука. 1973. 408 с.
10. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука. 1988. 334 с.
11. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

Получено 10.04.2018
После доработки 25.06.2018