УДК 517.9: 517.87

А.Г. Наконечный, П.Н. Зинько, Ю.М. Шевчук

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Введение

Исследование математических моделей в условиях неопределенности проводилось в работах [1–3]. Обзор литературы, в которой рассматривается проблема построения оценок в условиях неопределенности, освещен, например, в [4, 5]. Анализ алгоритмов, которые дают решение задачи построения оценок параметров дифференциальных уравнений, проводился в работах [6–8]; постановка подобной задачи для разностных уравнений описана в [9].

Постановка задачи

Пусть наблюдаются векторы $x(k)\in R^n$, $k=\overline{1,N+1}$, $n\ge 1$, при неизвестных параметрах $a_k\in R^m$, $k=\overline{1,N}$, $m\ge 1$, — решениях разностных уравнений:

$$x(k+1)=f(k,x(k))a_k+g(k,x(k))+\eta_k,\ k=\overline{1,N},$$

где $f(k,x(k))$, $k=\overline{1,N}$, — заданные матрицы размерности $n\times m$, $g(k,x(k))\in R^n$, $k=\overline{1,N}$, — известные векторы, $\eta_k\in R^n$, $k=\overline{1,N}$, — неизвестные векторы помех. Известно, что $\Delta_+a_k\in U_k\subseteq R^m$, $k=\overline{1,N-1}$, где $\Delta_+a_k=a_{k+1}-a_k$, $k=\overline{1,N-1}$. Предполагается, что $\eta_k\in V_k\subseteq R^n$, $k=\overline{1,N}$.

Апостериорное множество имеет вид

$$G_a=\{a:(x(k+1)-f(k,x(k))a_k-g(k,x(k)))\in V_k,\ k=\overline{1,N},\ \Delta_+a_j\in U_j,\ j=\overline{1,N-1}\},$$

где $a=(a_1,...,a_N)$.

Определение 1. Матрицу $\overline{a}=(\overline{a}_1,...,\overline{a}_N)\in G_a$ назовем апостериорной оценкой матрицы a. Пусть G_a^- и G_a^+ — множества, для которых выполняются условия $G_a^-\subseteq G_a\subseteq G_a^+$.

Определение 2. Матрицы $a^-=(a_1^-,...,a_N^-)\in G_a^-$ и $a^+=(a_1^+,...,a_N^+)\in G_a^+$ называются нижними и верхними апостериорными оценками матрицы a соответственно.

Предполагается, что множества U_j, $j=\overline{1, N-1}$, и V_k, $k=\overline{1, N}$, ограничены. Тогда существуют последовательности положительных скалярных величин $q_{1j}^- > 0$, $q_{1j}^+ > 0$, $j=\overline{1, N-1}$, $q_{2k}^- > 0$, $q_{2k}^+ > 0$, $k=\overline{1, N}$, и положительные числа $\gamma_1(N) > 0$, $\gamma_2(N) > 0$ такие, что

$$G_a^- = \left\{ a : \sum_{k=1}^N q_{2k}^- \left| y(k) - f_k a_k \right|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^- \left| \Delta_+ a_k \right|^2 \le \gamma_1(N) \right\},$$

$$G_a^+ = \left\{ a : \sum_{k=1}^N q_{2k}^+ \left| y(k) - f_k a_k \right|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^+ \left| \Delta_+ a_k \right|^2 \le \gamma_2(N) \right\},$$

где $y(k) = x(k+1) - g(k, x(k))$, $f_k = f(k, x(k))$, $k=\overline{1, N}$.

Для множеств G_a^- и G_a^+ также справедливы представления

$$G_a^- = G_{a_1}^- \times \ldots \times G_{a_N}^-, \ a_k^- \in G_{a_k}^- \subseteq R^m, \ k=\overline{1, N},$$

$$G_a^+ = G_{a_1}^+ \times \ldots \times G_{a_N}^+, \ a_k^+ \in G_{a_k}^+ \subseteq R^m, \ k=\overline{1, N}.$$

Введем функции

$$\Phi^-(a) = \sum_{k=1}^N q_{2k}^- \left| y(k) - f_k a_k \right|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^- \left| \Delta_+ a_k \right|^2,$$

$$\Phi^+(a) = \sum_{k=1}^N q_{2k}^+ \left| y(k) - f_k a_k \right|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^+ \left| \Delta_+ a_k \right|^2.$$

Лемма 1. Имеют место представления

$$G_a^- = \{ a : (A^-(a - \bar{a}^-), \ a - \bar{a}^-) \le \gamma_1(N) - \Phi^-(\bar{a}^-) \},$$

$$G_a^+ = \{ a : (A^+(a - \bar{a}^+), \ a - \bar{a}^+) \le \gamma_2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+) \},$$

где матрицы $A^- = (A_{ij}^-)_{i, \ j=\overline{1, N}}$ и $A^+ = (A_{ij}^+)_{i, \ j=\overline{1, N}}$ трехдиагональные, причем

$$A_{11}^- = q_{11}^- + q_{21}^- f_1^T f_1, \ A_{12}^- = -q_{11}^-, \ A_{11}^+ = q_{11}^+ + q_{21}^+ f_1^T f_1, \ A_{12}^+ = -q_{11}^+,$$

$$A_{k, k-1}^- = -q_{1, k-1}^-, \ A_{kk}^- = q_{1,k-1}^- + q_{1k}^- + q_{2k}^- f_k^T f_k, \ A_{k,k+1}^- = -q_{1k}^-, \ k=\overline{2, N-1},$$

$$A_{k, k-1}^+ = -q_{1, k-1}^+, \ A_{kk}^+ = q_{1,k-1}^+ + q_{1k}^+ + q_{2k}^+ f_k^T f_k, \ A_{k, k+1}^+ = -q_{1k}^+, \ k=\overline{2, N-1},$$

$$A_{N, N-1}^- = -q_{1, N-1}^-, \ A_{NN}^- = q_{1, N-1}^- + q_{2N}^- f_N^T f_N,$$

$$A_{N, N-1}^+ = -q_{1, N-1}^+, \ A_{NN}^+ = q_{1, N-1}^+ + q_{2N}^+ f_N^T f_N.$$

Доказательство. Сначала покажем справедливость представления для множества G_a^+. Поскольку $\bar{a}^+$ — верхняя гарантированная оценка, то $(\Phi^+)'(\bar{a}^+) = 0$. Разложив функцию $\Phi^+(a)$ в ряд Тейлора, получим

$$\Phi^+(a) = \Phi(\bar{a}^+) + \frac{1}{2}((\Phi^+)''(\bar{a}^+)(a - \bar{a}^+), \ a - \bar{a}^+),$$

здесь $(\Phi^+)''(\bar{a}^+)$ — матрица вторых производных, которая равняется $2A^+$. Поэтому для множества G_a^+ справедливо представление

$$G_a^+ = \{ a : (A^+(a - \bar{a}^+), \ a - \bar{a}^+) \le \gamma_2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+) \},$$

что и нужно было показать. Для множества G_a^- доказательство проводится аналогично.

Определение 3. Верхние и нижние гарантированные оценки $\bar{a}_k^-$ и $\bar{a}_k^+$ векторов a_k, $k=\overline{1,\ N}$, определяются из условий:

$$\max_{a_k^- \in G_{a_k}^-} \left\| \bar{a}_k^- - a_k^- \right\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^-} \max_{a_k^- \in G_{a_k}^-} \left\| a_k - a_k^- \right\| = \sigma_k^-,\ k=\overline{1,N},$$

$$\max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \left\| \bar{a}_k^+ - a_k^+ \right\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^+} \max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \left\| a_k - a_k^+ \right\| = \sigma_k^+,\ k=\overline{1,N},$$

а величины σ_k^- и σ_k^+, $k=\overline{1,N}$, называются верхними и нижними погрешностями оценивания (здесь $\|A\| = \{SpAA^{\mathrm{T}}\}^{1/2}$).

Теорема 1. Справедливы следующие равенства:

$$\sigma_k^- = \lambda_{\max}^{1/2}(H_k(A^-)^{-1}H_k^{\mathrm{T}})(\gamma_1(N) - \Phi^-(\bar{a}^-))^{1/2},\ k=\overline{1,N},$$

$$\sigma_k^+ = \lambda_{\max}^{1/2}(H_k(A^+)^{-1}H_k^{\mathrm{T}})(\gamma_2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2},\ k=\overline{1,N},$$

где $\lambda_{\max}(H_k(A^+)^{-1}H_k^{\mathrm{T}})$, $k=\overline{1,N}$, — максимальные собственные числа матриц $H_k(A^+)^{-1}H_k^{\mathrm{T}}$, $k=\overline{1,N}$ (T — символ транспонирования), а H_k, $k=\overline{1,N}$, — операторы проектирования, для которых выполняются условия

$$H_k a = a_k,\ k=\overline{1,N}.$$

Доказательство. Поскольку алгоритмы нахождения верхних и нижних погрешностей оценок для таких множеств подобны, приведем доказательство лишь для выражений σ_k^+, $k=\overline{1,N}$.

Имеет место представление

$$\sigma_k^+ = \max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \left\| \bar{a}_k^+ - a_k^+ \right\| = \max_{a^+ \in G_a^+} \left\| H_k(\bar{a}_k^+ - a^+) \right\|,\ k=\overline{1,N}.$$

Тогда справедливы преобразования

$$\sigma_k^+ = \max_{a^+ \in G_a^+} \left\| H_k(\bar{a}^+ - a^+) \right\| = \max_{(A^+(a^+ - \bar{a}^+),\ a^+ - \bar{a}^+) \le 1} \left\| H_k(\bar{a}^+ - a^+) \right\| =$$

$$= \max_{\|p\| \le 1} \max_{(A^+(a^+ - \bar{a}^+),\ a^+ - \bar{a}^+) \le 1} (p, H_k(\bar{a}^+ - a^+))(\gamma_2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2} =$$

$$= \max_{\|p\| \le 1} (H_k(A^+)^{-1}H_k^T p, p)^{1/2}(\gamma_2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2} =$$

$$= \lambda_{\max}^{1/2}(H_k(A^+)^{-1}H_k^T)(\gamma_2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2},\ k=\overline{1,N},$$

где p — матрица размерности $m \times N$, $\|p\| \le 1$.

При ограниченных множествах U_j, $j=\overline{1,N-1}$ и V_k, $k=\overline{1,N}$, множество G_a можно представить в виде

$$G_a = \left\{ a : \sum_{k=1}^{N} q_{2k} \left| x(k+1) - f(k, x(k))a_k - g(k, x(k)) \right|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k} \left| a_{k+1} - a_k \right|^2 \le \beta \right\}, \quad (1)$$

где q_{1k}, $j=\overline{1,N-1}$ и q_{2k}, $k=\overline{1,N}$; β — известные скалярные величины.

Для множества G_a также справедливо представление

$$G_a = G_{a_1} \times \ldots \times G_{a_N}, a_k \in G_{a_k} \subseteq R^m,\ k=\overline{1,N}.$$

Введем функцию вида

$$\Phi(a)=\sum_{k=1}^{N}q_{2k}\left|y(k)-f_k a_k\right|^2+\sum_{k=1}^{N-1}q_{1k}\left|a_{k-1}-a_k\right|^2. \quad (2)$$

Определение 4. Матрицу $\hat{a}=(\hat{a}_1,...,\hat{a}_N)$, которая находится из условия $\hat{a}\in \operatorname{Arg}\min_{a\in G_a}\Phi(a)$, назовем оптимальной оценкой по функции $\Phi(a)$.

Определение 5. Назовем гарантированной оценкой параметров a_k, $k=\overline{1,N}$, матрицу $\tilde{a}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_N)$, которая находится из условия

$$\max_{a''\in G_a}\|\tilde{a}-a''\|=\min_{a'\in G_a}\max_{a''\in G_a}\|a'-a''\|=\sigma,$$

а σ назовем погрешностью гарантированной оценки $\tilde{a}$.

Пусть векторы $u_j=a_{j+1}-a_j$, $j=\overline{1,N-1}$, $a_1\in G_{a_1}$, а G_1 — множество:

$$G_1=\left\{(u,a_1):\sum_{k=1}^{N}q_{2k}\left|y(k)-f_k a_k\right|^2+\sum_{k=1}^{N-1}q_{1k}\left|u_k\right|^2\le\beta\right\},$$

где $u=(u_1,...,u_{N-1})$.

Множество G_1 также можно представить в виде

$$G_1=U_{(1)}\times...\times U_{(N-1)}\times G_{a_1},\ u_i\in U_{(i)}\subset R^m,\ i=\overline{1,N-1}.$$

Задача нахождения оптимальной по функции $\Phi(a)$ оценки $\hat{a}$ эквивалентна задаче нахождения $(\hat{u},\hat{a}_1)\in \operatorname{Arg}\min_{(u,a_1)\in G_1}I(u,a_1)$, где

$$I(u,a_1)=\sum_{k=1}^{N}q_{2k}\left|y(k)-f_k a_k\right|^2+\sum_{k=1}^{N-1}q_{1k}\left|u_k\right|^2. \quad (3)$$

Гарантированные оценки

Сначала найдем оптимальную по функции $\Phi(a)$ оценку $\hat{a}$.

Теорема 2. Оптимальная по функции $\Phi(a)$ оценка $\hat{a}$ находится по формуле

$$\hat{a}=A^{-1}b, \quad (4)$$

где A трехдиагональные, причем

$$A_{11}=q_{11}+q_{21}f_1^{\mathrm{T}}f_1,\ A_{12}=-q_{11},$$

$$A_{k,k-1}=-q_{1,k-1},\ A_{kk}=q_{1,k-1}+q_{1k}+q_{2k}f_k^{\mathrm{T}}f_k,\ A_{k,k+1}=-q_{1k},\ k=\overline{2,N-1},$$

$$A_{N,N-1}=-q_{1,N-1},\ A_{NN}=q_{1,N-1}+q_{2N}f_N^{\mathrm{T}}f_N,$$

$$b=(q_{21}f_1^{\mathrm{T}}y_1\ \ \dots\ \ q_{2k}f_k^{\mathrm{T}}y_k\ \ \dots\ \ q_{2N}f_N^{\mathrm{T}}y_N)^{\mathrm{T}},$$

A^{-1} — матрица, обратная матрице $A=(A_{ij})i,j=\overline{1,N}$.

Доказательство. Найдем $\hat{a}\in \operatorname{Arg}\min_{a\in G_a}\Phi(a)$ из условия $\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\Phi(a+\tau v)\Big|_{\tau=0}=0$, $v\in R^{m\times N}$, которое эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} (q_{11}+q_{21}f_1^{\mathrm{T}}f_1)\hat{a}_1-q_{11}\hat{a}_2=q_{21}f_1^{\mathrm{T}}y_1, \\ -q_{1,k-1}\hat{a}_{k-1}+(q_{1,k-1}+q_{1k}+q_{2k}f_k^{T}f_k)\hat{a}_k-q_{1k}\hat{a}_{k+1}=q_{2k}f_k^{\mathrm{T}}y_k,\ k=\overline{2,\ N-1}, \\ -q_{1,N-1}\hat{a}_{N-1}+(q_{1,N-1}+q_{2N}f_N^{\mathrm{T}}f_N)\hat{a}_k=q_{2N}f_N^{\mathrm{T}}y_N. \end{cases} \quad (5)$$

 ISSN 0572-2691

СЛАУ (5) можно представить в матричном виде:

$$A\hat{a} = b. \tag{6}$$

Решение системы уравнений (6) запишем $\hat{a} = A^{-1}b,$ что и нужно было доказать.

Лемма 2. Множество G_a также можно записать в виде

$$G_a = \{a : (A(a-\hat{a}),\ a-\hat{a}) \le \beta - \Phi(\hat{a})\}.$$

Доказательство. Поскольку $\hat{a}$ — точка минимума функции $\Phi(a)$, то $\Phi'(\hat{a}) = 0$. Разложив (2) в ряд Тейлора:

$$\Phi(a) = \Phi(\hat{a}) + \frac{1}{2}(\Phi''(\hat{a})(a-\hat{a}),\ a-\hat{a})$$

(здесь $\Phi''(\hat{a})$ — матрица вторых производных, равная $2A$), получим, что для множества G_a справедливо представление

$$G_a = \{a : (A(a-\hat{a}),\ a-\hat{a}) \le \beta - \Phi(\hat{a})\},$$

что и нужно было доказать.

Теорема 3. Оптимальная по функции $\Phi(a)$ оценка $\hat{a}$ — гарантированная оценка матрицы a, при этом для погрешности гарантированной оценки σ справедливо равенство $\sigma = \lambda_{\max}^{1/2}(A^{-1})(\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2}$, где $\lambda_{\max}(A^{-1})$ — наибольшее собственное число матрицы A^{-1}.

Доказательство. Имеет место неравенство

$$\min_{a'\in G_a}\max_{a''\in G_a}\| a' - a'' \| \ge \max_{\| l \|\le 1}\min_{a'\in G_a}\max_{a''\in G_a}\left((l, a') - (l, a'')\right)^2,$$

где l — матрица размерности $m \times N$, норма которой $\| l \| \le 1$.

Вычислим $\max\limits_{a''\in G_a}((l, a') - (l, a''))^2$. Введя обозначение $a'' - \hat{a} = \bar{a}$, получим соотношения

$$\max_{a''\in G_a}((l, a') - (l, a''))^2 = \max_{\bar{a}\in\bar{G}_a}((l, a') - (l, \bar{a}+\hat{a}))^2 = \left[\max_{\bar{a}\in\bar{G}_a}(l, \bar{a}) + \left|(l, a') - (l, \hat{a})\right|\right]^2 \ge$$

$$\ge \max_{\bar{a}\in\bar{G}_a}(l, \bar{a})^2 = \max_{(A\bar{a}, \bar{a})\le 1}(l, \bar{a})^2\left(\beta - \Phi(\hat{a})\right)^{1/2}, \tag{7}$$

где $\bar{G}_a = \{\bar{a} : \left(A\bar{a}, \bar{a}\right) \le \beta - \Phi(\hat{a})\}$.

При $a' = \hat{a}$ (7) превращается в равенство, и тогда справедливы выражения

$$\max_{\| l \|\le 1}\min_{a'\in G_a}\max_{a''\in G_a}((l,a') - (l,a''))^2 = \max_{\| l \|\le 1}\min_{a'\in G_a}\max_{(A\bar{a}, \bar{a})\le 1}(l, \bar{a})^2(\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2} =$$

$$= \max_{(A\bar{a}, \bar{a})\le 1}\| \bar{a} \|(\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2}.$$

Для $\max\limits_{(A\bar{a}, \bar{a})\le 1}\| \bar{a} \|$ справедливы равенства

$$\max_{(A\bar{a}, \bar{a})\le 1}\| \bar{a} \| = \max_{(A\bar{a}, \bar{a})\le 1}\max_{\| p \|\le 1}(p, \bar{a}) = \max_{\| p \|\le 1}\max_{(A\bar{a}, \bar{a})\le 1}(p, \bar{a}),$$

где p — матрица размерности $m \times N$, $\| p \| \le 1$.

Из обобщенного неравенства Коши–Буняковского следует

$$(p, \bar{a}) \le \left(A\bar{a}, \bar{a}\right)^{1/2} (A^{-1}p,\ p)^{1/2} \le (A^{-1}p,\ p)^{1/2}.$$

Тогда

$$\max_{(A\bar{a},\,\bar{a})\le 1} \|\bar{a}\| = \max_{\|p\|\le 1} (A^{-1}p,\ p)^{1/2} = \lambda_{\max}^{1/2}(A^{-1}). \qquad (8)$$

Из (8) получаем представление для погрешности гарантированной оценки матрицы a:

$$\sigma = \min_{a'\in G_a} \max_{a''\in G_a} \| a' - a'' \| = \max_{a''\in G_a} \| \tilde{a} - a'' \| = \lambda_{\max}^{1/2}(A^{-1})(\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2},$$

что и нужно было доказать.

Интерполяция параметров разностных уравнений

Задачу нахождения гарантированной оценки $\hat{a}$ на основании наблюдений $x(k),\ k = \overline{1,\ N+1}$, решим с помощью функций Беллмана.

Теорема 4. Оптимальная по функции $\Phi(a)$ оценка $\hat{a}$ находится по формулам:

$$\hat{a}_{j+1} = \hat{a}_j + \hat{u}_j,\quad j = \overline{1,\ N-1}; \qquad (9)$$

$$\hat{a}_1 = [q_{22}(E + A_2^{\mathrm T} D_2^{\mathrm T}) f_2^{\mathrm T} f_2 (E + D_2 A_2) + q_{21} f_1^{\mathrm T} f_1 + \sum\nolimits_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm T} f_k^{\mathrm T} f_k W_{k2} +$$

$$+ \sum\nolimits_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm T} A_{k+1}^{\mathrm T} D_{k+1}^{\mathrm T} D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} + q_{11} A_2^{\mathrm T} D_2^{\mathrm T} D_2 A_2 +$$

$$+ q_{12}(E + A_2^{\mathrm T} D_2^{\mathrm T}) A_3^{\mathrm T} D_3^{\mathrm T} D_3 A_3 (E + D_2 A_2)]^{-1} [q_{21} f_1^{\mathrm T} y(1) + q_{22}(E + A_2^{\mathrm T} D_2^{\mathrm T}) \times$$

$$\times f_2^{\mathrm T}(y(2) - f_2 D_2 \varphi_2) + \sum\nolimits_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm T} f_k^{\mathrm T} (y(k) - f_k D_k \varphi_k -$$

$$- f_k \sum\nolimits_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}) - \sum\nolimits_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm T} A_{k+1}^{\mathrm T} D_{k+1}^{\mathrm T} Z_{k+1} -$$

$$- q_{11} A_2^{\mathrm T} D_2^{\mathrm T} D_2 \varphi_2 - q_{12}(E + A_2^{\mathrm T} D_2^{\mathrm T}) A_3^{\mathrm T} D_3^{\mathrm T} (D_3 \varphi_3 + D_3 A_3 D_2 \varphi_2)];$$

$$\hat{u}_k = D_{k+1}(\varphi_{k+1} + A_{k+1} \hat{a}_k),\quad k = \overline{1,\ N-1};$$

$$\varphi_k = -2 q_{2k} f_k^{\mathrm T} y(k) + 2 q_{1k} A_{k+1}^{\mathrm T} D_{k+1}^{\mathrm T} Q_{k+1} + S_{k+1}^{\mathrm T} A_{k+1} Q_{k+1} + S_{k+1}^{\mathrm T} \varphi_{k+1},\quad k = \overline{N-1,\ 1};$$

$$P_k = q_{2k} f_k^{\mathrm T} f_k + q_{1k} A_{k+1}^{\mathrm T} D_{k+1}^{\mathrm T} D_{k+1} A_{k+1} + S_{k+1}^{\mathrm T} P_{k+1} S_{k+1},\quad k = \overline{N-1,\ 1};$$

$$P_N = q_{2N} f_N^{\mathrm T} f_N,\quad \varphi_N = -2 q_{2N} f_N^{\mathrm T} y(N);$$

$$A_{k+1} = P_{k+1}^{\mathrm T} + P_{k+1},\quad k = \overline{N-1,\ 1};\quad D_{k+1} = -(2 q_{1k} E + A_{k+1})^{-1},\quad k = \overline{N-1,\ 1};$$

$$S_{k+1} = E + D_{k+1} A_{k+1},\quad k = \overline{N-1,\ 1};\quad Q_{k+1} = D_{k+1} \varphi_{k+1},\quad k = \overline{N-1,\ 1};$$

$$W_{ki} = \prod\nolimits_{j=i}^{k} (E + D_j A_j),\quad k = \overline{3,\ N-1},\quad i = \overline{2,\ N-1};$$

$$Z_{k+1} = D_{k+1}(\varphi_{k+1} + A_{k+1} D_k \varphi_k + A_{k+1} \sum\nolimits_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}),\quad k = \overline{3,\ N-1},$$

где E — единична матрица размерности $m \times m$.

Доказательство. Функции Беллмана для задачи (3) имеют вид

$$B_k(z) = \inf_{(u_k,\ \ldots,\ u_{N-1}) \in U_{(k)} \times \ldots \times U_{(N-1)}} \{ q_{2k} \left| y(k) - f_k z \right|^2 + q_{1k} \left| u_k \right|^2 +$$

$$+\sum_{l=k+1}^{N-1}\left[q_{2l}\left|y(l)-f_l a_l\right|^2+q_{1l}|u_l|^2\right]+q_{2N}\left|y(N)-f_N a_N\right|^2\Bigg\},\quad z=a_k,\quad k\in\overline{N-1,1};$$

$$B_N(z_1)=q_{2N}\left|y(N)-f_N z_1\right|^2,\ z_1=a_N;$$

и удовлетворяет уравнениям Беллмана:

$$B_k(z)=\min_{\tilde{v}\in U_{(k)}}\{q_{2k}|y(k)-f_k a_k|^2+q_{1k}|\tilde{v}|^2+B_{k+1}(z+\tilde{v})\},\ k=\overline{N-1,1}.$$

Ищем функции Беллмана в виде квадратичной формы

$$B_k(z)=(P_k z,z)+(\varphi_k,z)+d_k,\ k=\overline{N-1,1},\tag{10}$$

и получаем

$$P_N=q_{2N}f_N^{\mathrm{T}}f_N,\ \ \varphi_N=-2q_{2N}f_N^{\mathrm{T}}y(N),\ \ d_N=q_{2N}|y(N)|^2.$$

Уравнения Беллмана примут вид

$$(P_k z,z)+(\varphi_k,z)+d_k=H_k(v_k^*),$$

где

$$H_k(v_k)=q_{2k}|y(k)-f_k z|^2+q_{1k}|v_k|^2+$$

$$+(P_{k+1}(z+v_k),\ (z+v_k))+(\varphi_{k+1},(z+v_k))+d_{k+1},\ k=\overline{N-1,1},$$

$$v_k^*\in\operatorname{Arg}\min_{v_k\in U_{(k)}}H_k(v_k),\ k=\overline{N-1,1}.$$

Найдем точки экстремума $H_k(v_k),\ k=\overline{N-1,1}$:

$$\frac{d}{d\tau}H_k(v+\tau p)\Big|_{\tau=0}=$$

$$=2q_{1k}(v,p)+(\varphi_{k+1},p)+((P_{k+1}^{\mathrm{T}}+P_{k+1})(z+v),\ p)=0,\ \ p\in R^m,\ k=\overline{N-1,1}.\tag{11}$$

Из (11) получаем равенства

$$2q_{1k}v_k^*+\varphi_{k+1}+(P_{k+1}^{\mathrm{T}}+P_{k+1})(z+v_k^*)=0,\ k=\overline{N-1,1},$$
$$(2q_{1k}E+A_{k+1})v_k^*=-\varphi_{k+1}-A_{k+1}z,\ k=\overline{N-1,1}.$$

Справедливы следующие преобразования:

$$v_k^*=-(2q_{1k}E+A_{k+1})^{-1}(\varphi_{k+1}+A_{k+1}z)=$$

$$=D_{k+1}(\varphi_{k+1}+A_{k+1}z)=D_{k+1}\varphi_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}z,\ k=\overline{N-1,1}.$$

Подставим полученные точки экстремума в (10):

$$(P_k z,z)+(\varphi_k,z)+d_k=q_{2k}\left|y(k)-f_k z\right|^2+q_{1k}\left|D_{k+1}\varphi_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}z\right|^2+$$

$$+(P_{k+1}(z+D_{k+1}\varphi_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}z),\ z+D_{k+1}\varphi_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}z)+$$

$$+(\varphi_{k+1},\ (z+D_{k+1}\varphi_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}z))+d_{k+1},\ k=\overline{N-1,1}.$$

После группировки в скалярных произведениях векторов при z получим

$$(P_k z,z)+(\varphi_k,z)+d_k=q_{2k}|y(k)-f_k z|^2+q_{1k}\left|D_{k+1}\varphi_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}z\right|^2+$$

$$+(P_{k+1}(D_{k+1}\varphi_{k+1}+(E+D_{k+1}A_{k+1})z),\ D_{k+1}\varphi_{k+1}+(E+D_{k+1}A_{k+1})z)+$$

$$+(\varphi_{k+1},\ D_{k+1}\varphi_{k+1}+(E+D_{k+1}A_{k+1})z)+d_{k+1}=q_{2k}\left|y(k)-f_k z\right|^2+$$
$$+q_{1k}\left|Q_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}z\right|^2+(P_{k+1}(Q_{k+1}+S_{k+1}z),Q_{k+1}+S_{k+1}z)+$$
$$+(\varphi_{k+1},Q_{k+1}+S_{k+1}z)+d_{k+1},\ k=\overline{N-1,1}.$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$(P_k z,z)+(\varphi_k,z)+d_k=q_{2k}\left|y(k)\right|^2-2q_{2k}(f_k^{\mathrm{T}}y(k),z)+q_{2k}(f_k^{\mathrm{T}}f_k z,z)+$$
$$+q_{1k}\left|Q_{k+1}\right|^2+2q_{1k}(A_{k+1}^{\mathrm{T}}D_{k+1}^{\mathrm{T}}Q_{k+1},z)+q_{1k}(A_{k+1}^{\mathrm{T}}D_{k+1}^{\mathrm{T}}D_{k+1}A_{k+1}z,z)+$$
$$+(P_{k+1}Q_{k+1},Q_{k+1})+(S_{k+1}^{\mathrm{T}}A_{k+1}Q_{k+1},z)+(S_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}S_{k+1}z,z)+$$
$$+(\varphi_{k+1},Q_{k+1})+(S_{k+1}^{\mathrm{T}}\varphi_{k+1},z)+d_{k+1},\ k=\overline{N-1,1}.$$

Отсюда получаем формулы для матриц P_k, векторов φ_k и скалярных величин d_k:

$$P_k=q_{2k}f_k^{\mathrm{T}}f_k+q_{1k}A_{k+1}^{\mathrm{T}}D_{k+1}^{\mathrm{T}}D_{k+1}A_{k+1}+S_{k+1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}^{\mathrm{T}}S_{k+1},\ k=\overline{N-1,1},$$
$$\varphi_k=-2q_{2k}f_k^{\mathrm{T}}y(k)+2q_{1k}A_{k+1}^{\mathrm{T}}D_{k+1}^{\mathrm{T}}Q_{k+1}+S_{k+1}^{\mathrm{T}}A_{k+1}Q_{k+1}+S_{k+1}^{\mathrm{T}}\varphi_{k+1},\ k=\overline{N-1,1},$$
$$d_k=q_{2k}\left|y(k)\right|^2+q_{1k}\left|Q_{k+1}\right|^2+(P_{k+1}Q_{k+1},Q_{k+1})+(\varphi_{k+1},Q_{k+1})+d_{k+1},\ k=\overline{N-1,1}.$$

Тогда векторы $\hat{u}_k$ находятся по формулам

$$\hat{u}_k=D_{k+1}(\varphi_{k+1}+A_{k+1}\hat{a}_k),\ k=\overline{1,N-1}. \tag{12}$$

Найдем $\hat{a}_1\in\operatorname{Arg}\min\limits_{a_1\in G_{a_1}} I(\hat{u},a_1)$. Из (12) получаем представление для $\hat{a}_k$, $k=\overline{2,N}$, и $\hat{u}_k$, $k=\overline{1,N-1}$:

$$\hat{a}_k=D_k\varphi_k+\sum\nolimits_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1}+W_{k2}a_1,\ k=\overline{3,N},$$
$$\hat{a}_2=D_2\varphi_2+(E+D_2A_2)a_1,$$
$$\hat{u}_k=Z_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}a_1,\ k=\overline{3,N-1},$$
$$\hat{u}_1=D_2\varphi_2+D_2A_2a_1,\ \hat{u}_2=D_3\varphi_3+D_3A_3D_2\varphi_2+D_3A_3(E+D_2A_2)a_1.$$

Функцию (3) также можно представить в виде

$$I(\hat{u},a_1)=q_{21}\left|y(1)-f_1a_1\right|^2+q_{22}\left|y(2)-f_2(D_2\varphi_2+(E+D_2A_2)a_1)\right|^2+$$
$$+\sum\nolimits_{k=3}^{N}q_{2k}\left|y(k)-f_k(D_k\varphi_k+\sum\nolimits_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1}+W_{k2}a_1)\right|^2+$$
$$+\sum\nolimits_{k=3}^{N-1}q_{1k}\left|Z_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}a_1\right|^2+$$
$$+q_{11}\left|D_2\varphi_2+D_2A_2a_1\right|^2+q_{12}\left|D_3\varphi_3+D_3A_3D_2\varphi_2+D_3A_3(E+D_2A_2)a_1\right|^2.$$

Вектор $\hat{a}_1$ найдем из условия

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I(\hat{u},a_1+\tau v)\bigg|_{\tau=0}=-q_{22}((E+A_2^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}})f_2^{\mathrm{T}}(y(2)-f_2(D_2\varphi_2+(E+D_2A_2)a_1)),\ v)-$$
$$-\sum\nolimits_{k=3}^{N}q_{2k}(W_{k2}^{\mathrm{T}}f_k^{\mathrm{T}}(y(k)-f_k(D_k\varphi_k+\sum\nolimits_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1}+W_{k2}a_1)),v)+$$
$$+\sum\nolimits_{k=3}^{N-1}q_{1k}(W_{k2}^{\mathrm{T}}A_{k+1}^{\mathrm{T}}D_{k+1}^{\mathrm{T}}(Z_{k+1}+D_{k+1}A_{k+1}W_{k2}a_1),v)+q_{11}(A_2^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}}(D_2\varphi_2+$$
$$+D_2A_2a_1),v)-q_{21}(f_1^{\mathrm{T}}(y(1)-f_1a_1),v)+q_{12}((E+A_2^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}})\times$$
$$\times A_3^{\mathrm{T}}D_3^{\mathrm{T}}(D_3\varphi_3+D_3A_3D_2\varphi_2+D_3A_3(E+D_2A_2)a_1),v)=0,\ \text{здесь}\ v\in R^m.$$

Отсюда получаем равенства:

$$-q_{22}(E+A_2^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}})f_2^{\mathrm{T}}(y(2)-f_2(D_2\varphi_2+(E+D_2A_2)\hat{a}_1))-$$
$$-\sum\nolimits_{k=3}^{N}q_{2k}W_{k2}^{\mathrm{T}}f_k^{\mathrm{T}}(y(k)-f_kD_k\varphi_k-f_k\sum\nolimits_{j=k}^{3}W_{kj}D_{j-1}\varphi_{j-1}-f_kW_{k2}\hat{a}_1)+$$

$$+\sum_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm{T}} A_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1}^{\mathrm{T}} (Z_{k+1} + D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} \hat{a}_1) + q_{11} A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}} (D_2 \varphi_2 + D_2 A_2 \hat{a}_1) -$$
$$- q_{21} f_1^{\mathrm{T}} (y(1) - f_1 \hat{a}_1) + q_{12} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) A_3^{\mathrm{T}} D_3^{\mathrm{T}} (D_3 \varphi_3 + D_3 A_3 D_2 \varphi_2 +$$
$$+ D_3 A_3 (E + D_2 A_2) \hat{a}_1) = -q_{22} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) f_2^{\mathrm{T}} (y(2) - f_2 D_2 \varphi_2) +$$
$$+ q_{22} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) f_2^{\mathrm{T}} f_2 (E + D_2 A_2) \hat{a}_1 - \sum_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm{T}} f_k^{\mathrm{T}} (y(k) - f_k D_k \varphi_k -$$
$$- f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}) + \sum_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm{T}} f_k^{\mathrm{T}} f_k W_{k2} \hat{a}_1 - q_{21} f_1^{\mathrm{T}} y(1) + q_{21} f_1^{\mathrm{T}} f_1 \hat{a}_1 +$$
$$+ \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm{T}} A_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1}^{\mathrm{T}} Z_{k+1} + \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm{T}} A_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} \hat{a}_1 +$$
$$+ q_{11} A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}} D_2 \varphi_2 + q_{11} A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}} D_2 A_2 \hat{a}_1 + q_{12} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) A_3^{\mathrm{T}} D_3^{\mathrm{T}} (D_3 \varphi_3 + D_3 A_3 D_2 \varphi_2) +$$
$$+ q_{12} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) A_3^{\mathrm{T}} D_3^{\mathrm{T}} D_3 A_3 (E + D_2 A_2) \hat{a}_1 = 0.$$

Их можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$[q_{22} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) f_2^{\mathrm{T}} f_2 (E + D_2 A_2) + q_{21} f_1^{\mathrm{T}} f_1 +$$
$$+ \sum_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm{T}} f_k^{\mathrm{T}} f_k W_{k2} + \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm{T}} A_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} +$$
$$+ q_{11} A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}} D_2 A_2 + q_{12} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) A_3^{\mathrm{T}} D_3^{\mathrm{T}} D_3 A_3 (E + D_2 A_2)] \hat{a}_1 =$$
$$= q_{21} f_1^{\mathrm{T}} y(1) + q_{22} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) f_2^{\mathrm{T}} (y(2) - f_2 D_2 \varphi_2) + \sum_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm{T}} f_k^{\mathrm{T}} (y(k) -$$
$$- f_k D_k \varphi_k - f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}) - \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm{T}} A_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1}^{\mathrm{T}} Z_{k+1} -$$
$$- q_{11} A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}} D_2 \varphi_2 - q_{12} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) A_3^{\mathrm{T}} D_3^{\mathrm{T}} (D_3 \varphi_3 + D_3 A_3 D_2 \varphi_2). \qquad (13)$$

Тогда из (13) вектор $\hat{a}_1$ находится по формуле

$$\hat{a}_1 = [q_{22} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) f_2^{\mathrm{T}} f_2 (E + D_2 A_2) + q_{21} f_1^{\mathrm{T}} f_1 +$$
$$+ \sum_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm{T}} f_k^{\mathrm{T}} f_k W_{k2} + \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm{T}} A_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} +$$
$$+ q_{11} A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}} D_2 A_2 + q_{12} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) A_3^{\mathrm{T}} D_3^{\mathrm{T}} D_3 A_3 (E + D_2 A_2)]^{-1} \times$$
$$\times [q_{21} f_1^{\mathrm{T}} y(1) + q_{22} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) f_2^{\mathrm{T}} (y(2) - f_2 D_2 \varphi_2) +$$
$$+ \sum_{k=3}^{N} q_{2k} W_{k2}^{\mathrm{T}} f_k^{\mathrm{T}} (y(k) - f_k D_k \varphi_k - f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}) -$$
$$- \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k} W_{k2}^{\mathrm{T}} A_{k+1}^{\mathrm{T}} D_{k+1}^{\mathrm{T}} Z_{k+1} - q_{11} A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}} D_2 \varphi_2 -$$
$$- q_{12} (E + A_2^{\mathrm{T}} D_2^{\mathrm{T}}) A_3^{\mathrm{T}} D_3^{\mathrm{T}} (D_3 \varphi_3 + D_3 A_3 D_2 \varphi_2)],$$

что и нужно было доказать.

Минимаксные оценки параметров разностных уравнений

Задачу нахождения гарантированной оценки $\hat{a}$ на основании наблюдений $x(k)$, $k = \overline{1, N+1}$, решим с помощью реализации следующей многошаговой процедуры. На j-м шаге ($j = \overline{1, N-1}$) ищется оценка $\hat{a}_{j+1}$ на основании оценки $\hat{a}_j$ и наблюдений $x(j)$ и $x(j+1)$ с использованием фильтра Калмана–Бюси.

Для упрощения предположим $a_1 = 0$. Положим $\hat{a}_1 = 0$ и обозначим $I(u, \tilde{a}_1) = I(u)$.

Найдем $\hat{u} \in \operatorname{Arg} \min\limits_{u \in U_{(1)} \times \ldots \times U_{(N-1)}} I(u)$ из соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I(u + v\tau) \bigg|_{\tau=0} = -\sum_{k=1}^{N} q_{2k} (y(k) - f_k a_k, f_k \bar{\bar{a}}_k) + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k} (u_k, v_k) = 0, \qquad (14)$$

где $\bar{\bar{a}}_{k+1}=\bar{\bar{a}}_k+v_k,\ k=\overline{1,N-1},\ \bar{\bar{a}}_1=0;\ v\in R^{m\times(N-1)}$.

Определим операторы Δ_+ и Δ_-:

$$\Delta_+u_j=u_{j+1}-u_j,\ \ j=\overline{1,N-2};\ \Delta_-u_j=u_j-u_{j-1},\ \ j=\overline{2,N-1},$$

и обозначим:

$$\Delta_-\hat{p}_k=q_{2k}f_k^{\mathrm{T}}(y(k)-f_k\hat{a}_k),\ \ k=\overline{1,N-1},\ \ \hat{p}_N=0.$$

Тогда выражение (14) примет вид:

$$-\sum_{k=1}^{N}q_{2k}(y(k)-f_k\hat{a}_k,\ \ f_k\bar{\bar{a}}_k)+\sum_{k=1}^{N-1}q_{1k}(\hat{u}_k,v_k)=-\sum_{k=1}^{N}(\Delta_-\hat{p}_k,\bar{\bar{a}}_k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}q_{1k}(\hat{u}_k,v_k)=-\Big[-\hat{p}_0\bar{\bar{a}}_1+\hat{p}_N\bar{\bar{a}}_N-\sum_{k=1}^{N-1}(\hat{p}_k,\Delta_+\bar{\bar{a}}_k)\Big]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}q_{1k}(\hat{u}_k,v_k)=\sum_{k=1}^{N-1}(\hat{p}_k,v_k)+\sum_{k=1}^{N-1}q_{1k}(\hat{u}_k,v_k)=0. \qquad (15)$$

Из (15) получаем равенства $\hat{u}_k=-(q_{1k})^{-1}\hat{p}_k,\ k=\overline{1,N-1}$. Поэтому оптимальная по функции $\Phi(a)$ оценка $\hat{a}=(\hat{a}_1,...,\hat{a}_N)$ находится по формулам $\hat{a}_{k+1}=\hat{a}_k-$ $-(q_{1k})^{-1}\hat{p}_k,\ k=\overline{1,N-1},\ \hat{a}_1=0$. Сопряженная система для (15) имеет вид

$$\begin{cases}\hat{p}_{k-1}=\hat{p}_k-q_{2k}f_k^{\mathrm{T}}(y(k)-f_k\hat{a}_k),\ k=\overline{1,N},\ \hat{p}_N=0,\\ \hat{a}_{k+1}=\hat{a}_k-(q_{1k})^{-1}\hat{p}_k,\ k=\overline{1,N-1},\ \hat{a}_1=0.\end{cases} \qquad (16)$$

Введем функцию

$$I_1(w)=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}|w_k|^2+\sum_{k=1}^{N}(q_{1k})^{-1}|z_k|^2. \qquad (17)$$

Здесь $z_{k-1}=z_k+f_k^{\mathrm{T}}w_k,\ \ k=\overline{1,N},\ \ z_N=\alpha,\ \alpha\in R^m;\ \ w=(w_1,...,w_N),\ \ w_k\in R^n$).

Для того чтобы найти $\hat{w}\in\operatorname{Arg}\min\limits_{w\in R^n\times...\times R^n}I_1(w)$, де $\hat{w}=(\hat{w}_1,...,\hat{w}_N)$, вычислим производную и приравняем ее нулю:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}I_1(w+v\tau)\Big|_{\tau=0}=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(w_k,v_k)+\sum_{k=1}^{N}(q_{1k})^{-1}(z_k,\tilde{z}_k)=0, \qquad (18)$$

где $\tilde{z}_{k-1}=\tilde{z}_k+f_k^{\mathrm{T}}v_k,\ \ k=\overline{2,N},\ \ \tilde{z}_N=0;\ \ v=(v_1,...,v_N),\ \ v_k\in R^n$.

Обозначим $\Delta_+\tilde{p}_k=(q_{1k})^{-1}\hat{z}_k,\ k=\overline{1,N},\ \tilde{p}_1=0$. Для (18) справедливы преобразования:

$$\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k,v_k)+\sum_{k=1}^{N}(q_{1k})^{-1}(\hat{z}_k,\tilde{z}_k)=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k,v_k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}(\Delta_+\tilde{p}_k,\tilde{z}_k)=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k,v_k)+\Big[-\tilde{p}_1\tilde{z}_1+\tilde{p}_{N+1}\tilde{z}_N-$$

$$-\sum_{k=2}^{N}(\tilde{p}_k,\Delta_-\tilde{z}_k)\Big]=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k,v_k)-\sum_{k=2}^{N}(\tilde{p}_k,\Delta_-\tilde{z}_k)-\tilde{p}_1(z_1-z_0)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k,v_k)-\sum_{k=1}^{N}(\tilde{p}_k,\Delta_-\tilde{z}_k)=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k,v_k)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}(\tilde{p}_k,\ f_k^{\mathrm{T}}v_k)=\sum_{k=1}^{N}(q_{2k})^{-1}(\hat{w}_k,v_k)+\sum_{k=1}^{N}(f_k\tilde{p}_k,v_k)=0.$$

 ISSN 0572-2691

Из последнего равенства получаем

$$\hat{w}_k = -q_{2k} f_k \tilde{p}_k, \ k = \overline{1, N}. \tag{19}$$

Минимизируя функцию (17), получаем систему:

$$\begin{cases} \hat{z}_{k-1} = \hat{z}_k + f_k^{\mathrm{T}} w_k, \ \hat{z}_N = \alpha, \ k = \overline{1, N}, \\ \tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + (q_{1k})^{-1} \hat{z}_k, \ \tilde{p}_1 = 0, \ k = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{20}$$

Теорема 5. Оптимальная по функции $\Phi(a)$ оценка $\hat{a}$ находится по формулам

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + F_k(y(k) - f_k \hat{a}_k), \ \hat{a}_1 = 0, \ k = \overline{1, N-1}, \tag{21}$$

где

$$F_k = P_k f_k^{\mathrm{T}} [f_k P_k f_k^{\mathrm{T}} + (q_{2k})^{-1} E]^{-1}, \ k = \overline{1, N-1},$$

$$P_{k+1} = [E - F_k f_k] P_k [E - F_k f_k]^{\mathrm{T}} + (q_{1k})^{-1} E + (q_{2k})^{-1} F_k F_k^{\mathrm{T}}, \ k = \overline{1, N-2}, \ P_1 = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме двойственности [10] задача нахождения оценки $\hat{a}$ для системы (16) эквивалентна задаче нахождения w_k, $k = \overline{1, N}$, для системы (20) при условии, что справедливо равенство

$$(\alpha, \hat{a}_N) = -\sum_{k=1}^{N} (\hat{w}_k, y(k)). \tag{22}$$

Поскольку $\hat{z}_N = \alpha$, то выполняется условие

$$(\alpha, \hat{a}_N) = (\hat{z}_N, \hat{a}_N). \tag{23}$$

Из равенства

$$\sum_{k=1}^{N} (\Delta_- \hat{z}_k, \hat{a}_k) = -(\hat{z}_0, \hat{a}_1) - \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{z}_k, \Delta_+ \hat{a}_k) + (\hat{z}_N, \hat{a}_N)$$

справедливо представление

$$(\hat{z}_N, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N} (\Delta_- \hat{z}_k, \hat{a}_k) + \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{z}_k, \Delta_+ \hat{a}_k). \tag{24}$$

Подставив (24) в (23), получим

$$(\alpha, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N} (\Delta_- \hat{z}_k, \hat{a}_k) + \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{z}_k, \Delta_+ \hat{a}_k).$$

Из равенств (16) и (20) следует

$$(\alpha, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{z}_k, (q_{1k})^{-1} \hat{p}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N-1} ((q_{1k})^{-1} \hat{z}_k, \hat{p}_k) = \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N-1} (\Delta_+ \tilde{p}_k, \hat{p}_k) = \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N-1} (\Delta_+ \tilde{p}_k, \hat{p}_k) -$$

$$- (\tilde{p}_{N+1} - \tilde{p}_N) \hat{p}_N = \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \Big[-(\tilde{p}_1, \hat{p}_1) - \sum_{k=2}^{N} (\tilde{p}_k, \Delta_- \hat{p}_k) +$$

$$+ (\tilde{p}_{N+1}, \hat{p}_N) \Big] = \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} f_k^{T} f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) + \sum_{k=2}^{N} (\tilde{p}_k, \Delta_- \hat{p}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} \tilde{p}_k, f_k^{\mathrm{T}} f_k \hat{a}_k) + \sum_{k=2}^{N} (\tilde{p}_k, \Delta_- \hat{p}_k) = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{p}_k, \Delta_- \hat{p}_k + q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} f_k \hat{a}_k). \tag{25}$$

Из (16) получаем формулы

$$q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} y(k) = \Delta_- \hat{p}_k + q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} f_k \hat{a}_k, \; k = \overline{1, N}. \tag{26}$$

Тогда с учетом (26) для (25) справедливы следующие преобразования:

$$(\alpha, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{p}_k, \Delta_- \hat{p}_k + q_{2k} f_k^T f_k \hat{a}_k) = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{p}_k, q_{2k} f_k^{\mathrm{T}} y(k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (q_{2k} f_k \tilde{p}_k, y(k)). \tag{27}$$

Пользуясь (19), из (27) получаем равенство

$$(\alpha, \hat{a}_N) = -\sum_{k=1}^{N} (\hat{w}_k, y(k)).$$

Согласно [10] оптимальная по функции $\Phi(a)$ оценка $\hat{a}$ находится по формулам

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + F_k (y(k) - f_k \hat{a}_k), \;\; \hat{a}_1 = 0, \;\; k = \overline{1, N-1},$$

что и нужно было доказать.

Погрешность алгоритма вычисляется как

$$\sigma_f = \max_{a_N \in G_{aN}} \| \hat{a}_N - a_N \| = \lambda_{\max}^{1/2} (H_N A^{-1} H_N^{\mathrm{T}}) (\beta - \Phi(\hat{a}))^{1/2}.$$

Результаты численных экспериментов

В качестве примера приведем результаты оценивания неопределенных параметров для системы дифференциальных уравнений, которая используется в задачах распространения информации в социуме при $n = 1$ [11–14].

В социуме численностью L человек распространяется информационное сообщение из одного источника. Наблюдение за количеством людей, которые уже приняли распространяемую информацию к моменту $t_k \in (0, \bar{T}), \; k = \overline{1, N+1}$, обозначим $x(k) \in R^1$. Эти величины удовлетворяют разностным уравнениям:

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t_k (a_k + b_k x(k))(L - x(k)) + \eta_k, \;\; k = \overline{1, N}, \tag{28}$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \; k = \overline{1, N}$; $\eta_k \in R^1, \; k = \overline{1, N}$, — неизвестные помехи, $b_k \in R^1$, $k = \overline{1, N}$, — известные параметры интенсивности межличностного общения, а $a_k \in R^1, \; k = \overline{1, N}$, — неизвестные параметры внешнего влияния (например, действие средств массовой информации), которые нужно оценить.

Положим $L = 100$, $\bar{T} = 10$, $N = 100$, $\Delta t_k = 0{,}1$, $b_k = 0{,}003$, $q_{1k} = 0{,}1$, $q_{2k} = 1$, $k = \overline{1{,}100}$, $\beta = 0{,}059$. При таких значениях параметров модель (28) имеет вид

$$x(k+1) = x(k) + 0{,}1(a_k + 0{,}003 x(k))(100 - x(k)) + \eta_k, \;\; k = \overline{1{,}100}. \tag{29}$$

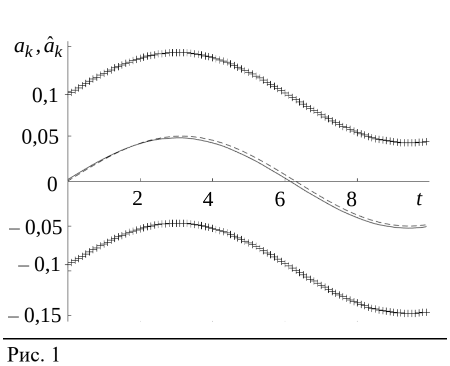

Рис. 1

На рис.1 показана гарантированная оценка параметров внешнего влияния математической модели (29), полученная на основании (3), где пунктирной линией показано $a_k, k = \overline{1{,}100}$, сплошной — $\hat{a}_k, k = \overline{1{,}100}$, отметками '+'.– коридор погрешности гарантированной оценки $\hat{a}_k, k = \overline{1{,}100}$, и погрешности для них.

 ISSN 0572-2691

Результаты построения оценок $\hat{a}_k,\ k = \overline{1,100}$, для математической модели (29), полученные на основании алгоритмов, сформулированных в теореме 4 и теореме 5, показаны на рис. 2 (на основании (8)) и рис. 3 (на основании (21)) соответственно.

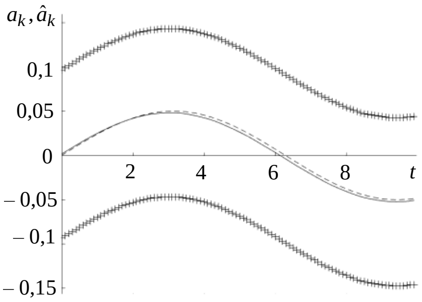

Рис. 2

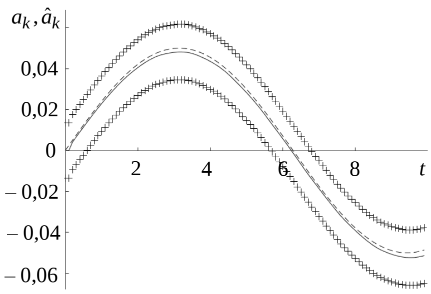

Рис. 3

Заключение

Предложены алгоритмы нахождения оптимальных и гарантированных оценок нестационарных параметров нелинейных разностных уравнений, включающих помехи. Также представлены примеры нахождения оптимальных и гарантированных оценок. Преведены результаты численных экспериментов, в которых решалась задача оценки параметров математической модели распространения одного вида информации в социуме, что позволяет сделать выводы о практической ценности данного подхода. На основании этого можно утверждать целесообразность использования предложенных алгоритмов для задач прогнозирования поведения динамических процессов, которые описываются системами нелинейных разностных уравнений с неизвестными параметрами.

О.Г. Наконечний, П.М. Зінько, Ю.М. Шевчук

ГАРАНТОВАНІ ОЦІНКИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПАРАМЕТРІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Наведено алгоритми знаходження оптимальних та гарантованих оцінок нестаціонарних параметрів нелінійних різницевих рівнянь з адитивними завадами. Запропоновано підходи для побудови оптимальних оцінок на основі функцій Беллмана та фільтра Калмана–Бюсі. Як приклад представлено результати знаходження оптимальних та гарантованих оцінок параметрів для математичної моделі поширення одного виду інформації в соціумі.

A.G. Nakonechnyi, P.N. Zinko, Yu.M. Shevchuk

GUARANTEED ESTIMATION OF NON-STATIONARY PARAMETERS OF DIFFERENCE EQUATIONS UNDER UNCERTAINTY

The algorithms of building optimal and guaranteed estimations of nonstationary parameters of difference nonlinear equations with additive noise are offered. The approaches to construct optimal estimations based on Bellman functions and Kalman–Bussi filter are presented. The results of numerical experiments for the problem of building guaranteed and optimal estimates for mathematical model of spreading one type of information are considered. The offered approach except theoretical interest has an important practical meaning.

1. *Губарев В.Ф., Дарьин А.Н., Лысюченко И.А.* Нелинейный оцениватель состояния по данным на скользящем интервале и возможность его применения в задаче ориентации космического аппарата // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 1. — С. 118–132.
2. *Gubarev V.F., Shevchenko V.N., Gummel A.V.* State estimation for systems subjected to bounded uncertainty using moving horizon approach // Prep. Of the 15-th IFAC Symposium on system identification, July 6–8, 2009. — Saint-Malo, France, 2009. — P. 910–915.
3. *Бакан Г.М.* Эллипсоидальные алгоритмы гарантированного оценивания и рекуррентный метод наименьших квадратов в задачах фильтрации состояний динамических систем // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 3 — С. 34–48.
4. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук. думка, 2006. — 264 с.
5. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності // Наукові записки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. — 2004. — **7**. — С. 102–111.
6. *Наконечний О.Г.* Задачі гарантованого оцінювання параметрів в динаміці // Тези XVII Міжнародної конференції «Problem of decision making under uncertainties», травень 23–27, 2011. — Східниця, Україна, 2011. — P. 141.
7. *Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М.* Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації за невизначеності // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 4 — С. 54–65. DOI:10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.05.
8. *Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М.* Аналіз нестаціонарних математичних моделей поширення інформації в умовах невизначеності // Тези міжнародної конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій», березень 2–4, 2018. — Рівне, Україна, 2018. — С. 182–184.
9. *Nakonechny O.G., Zinko P.M., Shevchuk Yu.M.* Estimate of parameters of difference equations under uncertainty // Proceedings of «Ukrainian conference on applied mathematics», September 28–30, 2017. — Lviv, Ukraine, 2017. — P. 182–184.
10. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973. — 324 с.
11. *Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G., Marevtseva N.A.* Mathematical modeling of information warfare in a society // Mediterranean Journal of Social Sciences. — 2015. — **6**, N 5. — P. 27–35. DOI:10.5901/mjss.2015.v6n5s2p27.
12. *Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В.* Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование. — 2014. — № 3 (26). — С. 65–74.
13. *Наконечний О.Г., Зінько П.М.* Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2015. — № 3 (120). — С. 50–60.
14. *Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М.* Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. — 2016. — № 3. — С. 98–105.

Получено 12.06.2018