УДК 621.01.534

В.А. Красношапка

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ УПРОЩЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследование динамических процессов в механизмах и машинных агрегатах приводит к необходимости рассмотрения сложных многомассовых упруго-инерционных систем, подверженных воздействию разнообразных возмущений [1–4]. В практике динамических расчетов, пользуясь известными методами приведения [1–3], многомассовая упруго-инерционная система упрощается и заменяется двухмассовой упруго-инерционной системой с такими параметрами: J_1 — чаще всего, момент инерции ротора двигателя; J_2 — приведенный момент инерции остальных инерционных масс; C_1 — приведенная жесткость упругих элементов многомассовой динамической системы.

Такая упрощенная физическая модель позволяет определить максимальную динамическую нагрузку в приведенном упругом звене. Однако зачастую невозможно указать, в каком упругом звене многомассовой системы такая динамическая нагрузка возбуждается. В то же время каждое упругое звено неупрощенной динамической системы может иметь различные запасы прочности. Поэтому конструктору для обеспечения надежности и долговечности необходимо знать величины действительных динамических нагрузок в каждом упругом звене.

В работе [5] показано, что дифференциальные уравнения высокого порядка, записанные относительно упругих моментов в звеньях многомассовой системы, можно привести к дифференциальным уравнениям, в которых коэффициенты при старших производных, начиная со второй, содержат малые быстроубывающие множители.

На основании работы [6] такие дифференциальные уравнения при определенных условиях могут быть заменены вырожденными (укороченными) дифференциальными уравнениями более низкого порядка.

Такой подход использован в работе [5], в которой при исследовании многомассовой системы показано, что упругие моменты в ряде звеньев можно определить на основании укороченных дифференциальных уравнений. Однако в [5] не дается методика определения параметров, начальных условий и возмущений для укороченных (вырожденных) дифференциальных уравнений с учетом соответствующих характеристик точной математической модели.

В данной работе покажем, что упругие моменты в звеньях упруго-инерционной многомассовой системы можно исследовать на основании укороченных дифференциальных уравнений второго порядка, параметры, возмущения и начальные условия для которых определяют в соответствии с характеристиками точной математической модели.

1. Математическая модель многомассовой упруго-инерционной динамической модели

В тех случаях, когда физическая модель механизмов или машин приводится к свободной рядной многомассовой упруго-инерционной динамической системе, математическая модель, описывающая колебательный процесс в свободной роторной системе, будет такой [1, 2, 7, 8]:

$$
\begin{gathered}
J_k \ddot{\varphi}_k - C_{k-1,k}(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + C_{k,k+1}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = f_k \\
(k = 1, 2, \ldots, n, \quad f_1 = M_\partial, \quad f_n = -M_c, \quad f_2 = f_3 = \ldots = f_{n-1} \equiv 0),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где n — число дискретных масс; $C_{k,k+1}$ — жесткости упругих звеньев ($C_{01} = C_{n,n+1} \equiv 0$); J_k — моменты инерции маховых масс системы; φ_k — углы поворота соответствующих маховых масс; M_∂ — момент двигателя; M_c — момент технологической нагрузки.

Система алгебраических уравнений

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} J_i \varphi_i = J_0 \xi, \quad \left(J_0 = \sum_{i=1}^{n} J_i \right), \\
\varphi_k - \varphi_{k+1} = \theta_{k,k+1} \quad (k = 2, 3, \ldots, n)
\end{gathered} \tag{2}
$$

имеет определитель $\Delta = J_0$, отличный от нуля. Поэтому существует однозначная связь между угловыми переменными φ_k и относительными упругими деформациями $\theta_{k,k+1}$, и систему дифференциальных уравнений (1) запишем в виде [8]:

$$
\begin{gathered}
J_0 \ddot{\xi} = M_\partial - M_c, \\
\ddot{\theta}_{k,k+1} - \frac{C_{k-1,k}}{J_k} \theta_{k-1,k} + \frac{C_{k,k+1}(J_k + J_{k+1})}{J_k J_{k+1}} \theta_{k,k+1} - \frac{C_{k+1,k+2}}{J_{k+1}} \theta_{k+1,k+2} = F_k \\
\left(k = 1, 2, \ldots, n-1, C_{01} = C_{n,n-1} \equiv 0, F_2 = \ldots = F_{n-1} \equiv 0, F_1 = \frac{1}{J_1} M_\partial, F_{n\text{-}1} = \frac{1}{J_n} M_c \right).
\end{gathered} \tag{3}
$$

Первое дифференциальное уравнение системы (3) в случае постоянных или зависимых от времени M_∂, M_c интегрируется независимо от остальных дифференциальных уравнений и описывает движение свободной роторной системы как твердого тела.

Остальные $(n-1)$ дифференциальных уравнений описывают колебательные процессы, возбуждающиеся в переходных процессах. В тех случаях, когда необходимо определить динамические моменты в упругих элементах системы, которые определяются на основании зависимостей

$$
M_{k,k+1} = C_{k,k+1}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = C_{k,k+1}\theta_{k,k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4}
$$

систему $n-1$ дифференциальных уравнений запишем следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\ddot{M}_{k,k+1} - \frac{C_{k,k+1}}{J_k} M_{k,k-1} + \beta_{k,k+1}^2 M_{k,k+1} - \frac{C_{k,k+1}}{J_{k+1}} M_{k,k+1} = m_k \\
\left(k = 1, 2, \ldots, n-1, M_{10} = M_{n,n+1} \equiv 0, m_1 = \frac{C_{12}}{J_1} M_\partial, m_{n\text{-}1} = \frac{C_{n-1,n}}{J_n} M_C \right),
\end{gathered} \tag{5}
$$

где $\beta_{k,k+1}^2 = C_{k,k+1}(J_k + J_{k+1}) / J_k J_{k+1}$.

Переходные колебательные процессы возбуждаются при набросе нагрузок, когда система находится в режиме равномерного вращения, а поэтому начальные условия для исходной системы дифференциальных уравнений (1) запишем в виде [3, 4]

$$\varphi_k(0)=0,\ \dot{\varphi}_k(0)=\omega_0\ \ (k=1,2,\ldots,n). \tag{6}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (5) удовлетворяет начальным условиям

$$M_{k,k+1}(0)=\dot{M}_{k,k+1}(0)=0\ \ (k=1,2,\ldots,n-1). \tag{7}$$

Для определения характера изменения упругих моментов из системы дифференциальных уравнений (5) можно получить относительно каждого упругого момента $M_{i,i+1}$ дифференциальное уравнение высокого порядка:

$$LM_{k,k+1}=\eta_k(t)\ \ (k=1,2,\ldots,n-1), \tag{8}$$

где L — дифференциальный оператор

$$L=a_{n-1}\frac{d^{2(n-1)}}{dt^{2(n-1)}}+a_{n-2}\frac{d^{2(n-2)}}{dt^{2(n-2)}}+\ldots+a_2\frac{d^4}{dt^4}+a_1\frac{d^2}{dt^2}+a_0, \tag{9}$$

а коэффициенты определяются такими рекуррентными формулами:

$$a_{n-1}=\prod_{k=1}^{n}J_k,$$

$$a_{n-2}=\sum_{i_1=1}^{n-1}C_{i_1,i_1+1}(J_{i_1}+J_{i_1 i_1+1})\prod_{k=1}^{n}J_k\ \ (k\neq i_1,\, i_1+1),$$

$$a_{n-3}=\sum_{i_1=1}^{n-2}C_{i_1,i_1+1}C_{i_1+1,i_1+2}(J_{i_1}+J_{i_1+1}+J_{i_1+2})\prod_{k=1}^{n}J_k+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n-3}\sum_{i_2=i_1+2}^{n-1}C_{i_1,i_1+1}C_{i_2+1,i_2+1}(J_{i_1}+J_{i_1+1})(J_{i_2}+J_{i_2+1})\prod_{k=1}^{n}J_k\ \ (k\neq i_1,\, i_1+1,\, i_2,\, i_2+1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{10}$$

$$a_2=\prod_{j=1}^{n-1}C_{j,j+1}\left[\sum_{k=1}^{n-2}(J_1+\ldots+J_k)\,J_{k+1})(J_{k+2}+\ldots+J_k)\right]+$$

$$+\prod_{j=1}^{n-1}C_{j,j+1}\left[\sum_{k=1}^{n-3}\sum_{s=k+2}^{n-1}(J_1+\ldots+J_k)(J_{k+1}+\ldots+J_s)\right]\ \ (j\neq k,\, s),$$

$$a_1=\prod_{j=1}^{n-1}C_{j,j+1}\left[\sum_{k=1}^{n-1}(J_1+\ldots+J_k)(J_{k+1}+\ldots+J_n)\right],(j\neq k),$$

$$a_0=J_\Sigma\prod_{j=1}^{n-1}C_{j,j+1},\quad J_\Sigma=\sum_{k=1}^{n}J_k.$$

Если действующие возмущения M_∂, M_c будут постоянными величинами или линейными функциями времени, можно дать общую формулу $\eta_k(t)$ в дифференциальных уравнениях (8)

$$\eta_k(t)=\left[\prod_{i=1}^{n-1}C_{i,i+1}\left(\sum_{j=k+1}^{n}J_j\right)\right]M_\partial(t)+\left[\prod_{i=1}^{n-1}C_{i,i+1}\left(\sum_{j=1}^{k}J_j\right)\right]M_c(t), \tag{11}$$

где $M_\partial(t), M_c(t)$ — постоянные или линейные функции времени.

Для дифференциальных уравнений (8) необходимо определить начальные условия. Если, в отличие от (7), предположить общие начальные условия для дифференциальных уравнений (8):

$$M_{k,k+1}(o) = M_{k,k+1}^{(o)}, \quad \dot{M}_{k,k+1}(o) = \dot{M}_{k,k+1}^{(o)} \ (k = 1, 2, ..., n-1), \tag{12}$$

то начальные условия для дифференциальных уравнений (8) будут такими:

$$M_{k,k+1}^{(j)}(o) = \frac{C_{k,k+1}}{J_k} M_{k-1,k}^{(j-2)}(o) = \beta_{k,k+1}^2 M_{k,k+1}^{(j-2)}(o) + \frac{C_{k,k+1}}{J_{k+1}} M_{k+1,k+2}^{(j-2)}(o) + m_k^{(j-2)}(o) \tag{13}$$

$$(k = 1, 2, ..., n-1;\ j = 2, 3, ..., 2n-3).$$

Следовательно, начальные условия для дифференциальных уравнений (8) зависят как от начальных условий (12), так и конструктивных параметров многомассовой упруго-инерционной системы. Начальные условия (13) упрощаются, если рассматривается режим наброса нагрузки (начальные условия (7)).

2. Упрощение дифференциальных уравнений

При исследовании разделим дифференциальные уравнения (8) на a_o:

$$\frac{a_{n-1}}{a_o} M_{k,k+1}^{2(n-1)} + \frac{a_{n-1}}{a_o} 2M_{k,k+1}^{2(n-2)} + ... + \frac{a_1}{a_o} \ddot{M}_{k,k+1} + M_{k,k+1} = \frac{\eta_k(t)}{a_o} \tag{14}$$

$$(k = 1, 2, ..., n-1).$$

В дифференциальных уравнениях (14) введем безразмерное время τ по формуле

$$\tau = t\sqrt{\frac{a_0}{a_1}}, \quad \frac{d^j M_{k,k+1}(t)}{dt^j} = \frac{d^j M_{k,k+1}(\tau)}{d\tau^j}\left(\sqrt{\frac{a_0}{a_1}}\right)^j. \tag{15}$$

Замена (15) позволяет свести дифференциальные уравнения (14) к виду, где старшие производные содержат безразмерные коэффициенты

$$k_{n-1}M_{k,k+1}^{2(n-1)}(\tau) + k_{n-2}M_{k,k+1}^{2(n-2)}(\tau) + ... + k_2 M_{k,k+1}^{\mathrm{IV}}(\tau) + \ddot{M}_{k,k+1}(\tau) +$$
$$+ M_{k,k+1}(\tau) = \Psi_k(\tau), \quad (k = 1, 2, ..., n-1), \tag{16}$$

где $k_j = \dfrac{a_j a_0^{j-1}}{a_1^j}$ $(j = 2, 3, ..., n-1;\ k_1 \equiv 1)$, $\Psi_k(\tau) = \dfrac{1}{a_0}\eta_k\left(\tau\sqrt{\dfrac{a_1}{a_0}}\right)$.

Запишем характеристическое уравнение для дифференциальных уравнений (16)

$$k_{n-1}\lambda^{2(n-1)} + k_{n-2}\lambda^{2(n-2)} + ... + k_2\lambda^4 + \lambda^2 + 1 = 0. \tag{17}$$

Характеристическое уравнение (17) будет иметь чисто мнимые корни, если характеристический полином

$$k_{n-1}p^{n-1} + k_{n-2}p^{n-2} + ... + k_2 p^2 + p + 1 = 0 \tag{18}$$

имеет отрицательные корни. Это будет в том случае, если выполняются необходимые условия Эйлера [5] для коэффициентов полинома (18).

Записав систему неравенств, при выполнении которых корни полинома (18) будут отрицательными, получаем для коэффициентов k_j такие неравенства:

$$k_2 \le \frac{n-1}{2!n}, k_2 \le \frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2}, ..., k_{j+1} \le \frac{\prod_{s=1}^{j}(n-s)}{(j+1)!n^j} \ (j = 1, 2, ..., n-2). \tag{19}$$

 ISSN 0572-2691

Формулы (19) позволяют установить, что коэффициенты при старших производных быстро убывают, причем это усиливается при увеличении n (число дискретных масс).

Следовательно, задача по определению упругих моментов динамической упруго-инерционной системы сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро убывающими коэффициентами при старших производных. В работе [6] показано, что такие дифференциальные уравнения можно заменить вырожденными дифференциальными уравнениями, при условии что они сохраняют свойства характеристического уравнения точной системы дифференциальных уравнений (5).

В данном случае характеристические уравнения (17), если выполняются неравенства (19), имеют мнимые корни. Запишем вырожденные дифференциальные уравнения четвертого порядка:

$$k_2 M_{k,k+1}^{\mathrm{IV}}(\tau) + \ddot{M}_{k,k+1}(\tau) + M_{k,k+1}(\tau) = \Psi_k(\tau) \quad (k = 1, 2, ..., n-1). \tag{20}$$

Согласно (5), (7), (12) дифференциальное уравнение (20) должно удовлетворять начальным условиям:

$$M_{k,k+1}(0) = \dot{M}_{k,k+1}(0) = \ddot{M}_{k,k+1}(0) = 0,\ \dddot{M}_{k,k+1}(0) = m_k$$

$$\left(k = 1, 2, ..., n-1,\ m_1 = \frac{C_{12}}{J_1} M_{\partial},\ m_2 = ... = m_{n-2} = 0,\ m_{n-1} = \frac{C_{n-1n}}{J_n} M_C\right).$$

Вырожденные дифференциальные уравнения (20) можно использовать только в том случае, если безразмерный параметр k_2, зависящий от всех параметров многомассовой упруго-инерционной системы, удовлетворяет неравенству

$$k_2 < 0{,}25. \tag{21}$$

При выполнении неравенства (21) характеристическое уравнение для (20) будет иметь мнимые корни. Необходимо отметить, что условие (21) не всегда будет выполняться (в дальнейшем на конкретном примере рассмотрим такой случай).

В то же время дифференциальные уравнения второго порядка, которые не содержат малых параметров

$$\ddot{M}_{k,k+1}(\tau) + M_{k,k+1}(\tau) = \Psi_k(\tau) \quad (k = 1, 2, ..., n-1), \tag{22}$$

всегда имеют характеристическое уравнение с мнимыми корнями $(\pm i)$.

На основании дифференциальных уравнений (22) определяем квадрат безразмерной частоты: $\omega_\tau^2 = 1.$ Тогда, если перейти ко времени t, имеем дифференциальные уравнения

$$a_1 \ddot{M}_{k,k+1}(t) + a_0 M_{k,k+1}(t) = \eta_k(t) \quad (k = 1, 2, ..., n-1) \tag{23}$$

с начальными условиями

$$M_{k,k+1}(0) = \dot{M}_{k,k+1}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n-1). \tag{24}$$

При этом $\eta_k(t)$ определяются в соответствии с правыми частями точных дифференциальных уравнений (8). Собственная (основная) частота определяется формулой

$$\omega_t^2 = a_0 / a_1, \tag{25}$$

где a_0, a_1 определяются рекуррентными формулами (9).

Необходимо отметить, что структура рядных упруго-инерционных систем такова, что численно $a_0 >> a_1$. Решение дифференциальных уравнений (23) при постоянных M_0, M_C и начальных условиях (24) имеет вид

$$M_{k,k+1}(t) = \left[\left(\frac{1}{J_\Sigma} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} J_i \right) M_0 + \left(\frac{1}{J_\Sigma} \sum_{i=1}^{n} J_i \right) M_c \right] (1 - \cos \omega t) \quad (k = 1, 2, ..., n-1). \tag{26}$$

Таким образом, в режиме внезапного нагружения при возбуждении переходного процесса максимальные динамические моменты в каждом из упругих участков многомассовой упруго-инерционной системы будут определяться формулой

$$(M_{k,k+1})_{\max} = 2 \left[\left(\frac{1}{J_\Sigma} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} J_i \right) M_0 + \left(\frac{1}{J_\Sigma} \sum_{i=1}^{k} J_i \right) M_c \right] \quad (k = 1, 2, ..., n-1). \tag{27}$$

3. Пример

Рассмотрим пятимассовую упруго-инерционную систему с такими параметрами:

$$J_1 = 52 \text{ кГсмс}^2,\ J_2 = 18 \text{ кГсмс}^2,\ J_3 = 10 \text{ кГсмс}^2,\ J_4 = 6 \text{ кГсмс}^2,\ J_5 = 2 \text{ кГсмс}^2,$$

$$C_{12} = 4 \times 10^5 \text{ кГсм},\ C_{23} = 4 \times 10^4 \text{ кГсм},\ C_{34} = 2 \times 10^4 \text{ кГсм},\ C_{45} = 5 \times 10^3 \text{ кГсм},$$

$$M_\gamma = 6 \times 10^3 \text{кГсм},\ M_C = 8 \times 10^2 \text{кГсм}.$$

Предположим, что рассматривается режим наброса нагрузки и система дифференциальных уравнений (5) удовлетворяет начальным условиям (7). Определим на основании формул (9), (10), (12) дифференциальные уравнения для каждого упругого момента, а также начальные условия, которым должны удовлетворять дифференциальные уравнения высокого порядка

$$a_4 M_{12}^{\mathrm{VIII}} + a_3 M_{12}^{\mathrm{VI}} + a_2 M_{12}^{\mathrm{IV}} + a_1 \ddot{M}_{12} + a_0 M_{12} =$$
$$= C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} (J_2 + J_3 + J_4 + J_5) M_\partial + C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} J_1 M_C, \tag{28}$$

$$M_{12}(0) = \dot{M}_{12}(0) = 0,\ \ddot{M}_{12}(0) = \frac{C_{12}}{J_1} M_\partial,\ \dddot{M}_{12}(0) = 0,\ M_{12}^{\mathrm{IV}}(0) = -\frac{C_{12}^2 (J_1 + J_2)}{J_1^2 J_2} M_\partial,$$
$$M_{12}^{\mathrm{V}}(0) = 0,\ M_{12}^{\mathrm{VI}}(0) = \frac{C_{12}^2}{J_1 J_2^2} \left(C_{23} + \frac{(J_1 + J_2)^2}{J_1^2} C_{12} \right) M_\partial,\ M_{12}^{\mathrm{VII}}(0) = 0, \tag{29}$$

$$a_4 M_{23}^{\mathrm{VIII}} + a_3 M_{23}^{\mathrm{VI}} + a_2 M_{23}^{\mathrm{IV}} + a_1 \ddot{M}_{23} + a_0 M_{23} =$$
$$= C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} (J_3 + J_4 + J_5) M_\partial + C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} (J_1 + J_2) M_C, \tag{30}$$

$$M_{23}(0) = \dot{M}_{23}(0) = \ddot{M}_{23}(0) = \dddot{M}_{23}(0) = 0,\ \ M_{23}^{\mathrm{IV}}(0) = \frac{C_{12} C_{23}}{J_1 J_2} M_\partial,$$
$$M_{23}^{\mathrm{V}}(0) = 0,\ M_{23}^{\mathrm{VI}}(0) = -\frac{C_{12} C_{23}}{J_1 J_2} (\beta_{12}^2 + \beta_{23}^2) M_\partial + \frac{C_{23} C_{34} C_{45}}{J_3 J_4 J_5} M_C,\ M_{23}^{\mathrm{VII}}(0) = 0, \tag{31}$$

$$a_4 M_{34}^{\mathrm{VIII}} + a_3 M_{34}^{\mathrm{VI}} + a_2 M_{34}^{\mathrm{IV}} + a_1 \ddot{M}_{34} + a_0 M_{34} =$$
$$= C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} (J_4 + J_5) M_\partial + C_{12} C_{23} C_{34} C_{45} (J_1 + J_2 + J_3) M_C, \tag{32}$$

$$M_{34}(0)=\dot{M}_{34}(0)=\ddot{M}_{34}(0)=\dddot{M}_{34}(0)=0,\; M_{34}^{\mathrm{IV}}(0)=\frac{C_{34}C_{45}}{J_4J_5}M_C,$$
$$M_{34}^{\mathrm{V}}(0)=0,\; M_{34}^{\mathrm{VI}}(0)=-\frac{C_{12}C_{23}C_{34}}{J_1J_2J_3}M_\partial-\frac{C_{34}C_{45}}{J_4J_5}(\beta_{34}^2+\beta_{45}^2)M_C,\; M_{34}^{\mathrm{VII}}(0)=0, \quad (33)$$

$$a_4M_{45}^{\mathrm{VIII}}+a_3M_{45}^{\mathrm{VI}}+a_2M_{45}^{\mathrm{IV}}+a_1\ddot{M}_{45}+a_0M_{45}=$$
$$=(C_{12}C_{23}C_{34}C_{45})J_5M_\partial+C_{12}C_{23}C_{34}C_{45}(J_1+J_2+J_3+J_4)M_C, \quad (34)$$

$$M_{45}(0)=\dot{M}_{45}(0),\; \ddot{M}_{45}(0)=\frac{C_{45}}{J_5}M_C,\; \dddot{M}_{45}(0)=0,\; M_{45}^{\mathrm{IV}}(0)=-\beta_{45}^2\frac{C_{45}}{J_5}M_C,$$
$$M_{45}^{\mathrm{V}}(0)=0,\; M_{45}^{\mathrm{VI}}(0)=\frac{C_{45}}{J_5}\left(\frac{C_{34}C_{45}}{J^2}+\beta_{45}^4\right)M_C,\; M_{45}^{\mathrm{VII}}(0)=0, \quad (35)$$

где

$$a_4=J_1J_2J_3J_4J_5=112320\,[\text{кГ}^5\text{см}^5\text{с}^{10}],$$
$$a_3=C_{12}J_3J_4J_5(J_1+J_2)+C_{23}J_1J_4J_5(J_2+J_3)+C_{34}J_1J_2J_5(J_3+J_4)+$$
$$+C_{45}J_1J_2J_3(J_4+J_5)=503232\times10^4\,[\text{кГ}^5\text{см}^5\text{с}^8],$$
$$a_2=C_{12}C_{23}(J_1J_4J_5+J_2J_4J_5+J_3J_4J_5)+C_{12}C_{34}(J_1J_3J_5+J_2J_3J_5+J_1J_4J_5+$$
$$+J_2J_4J_5)+C_{12}C_{45}(J_1J_3J_4+J_2J_3J_4+J_1J_3J_5+J_2J_3J_5)+$$
$$+C_{23}C_{34}(J_1J_3J_5+J_2J_3J_5+J_1J_4J_5)+C_{23}C_{45}(J_1J_2J_4+J_1J_3J_4+J_1J_2J_5+ \quad (36)$$
$$+J_1J_3J_5)+C_{34}C_{45}(J_1J_2J_5+J_1J_3J_5+J_1J_2J_3)=513232\times10^8\,[\text{кГ}^5\text{см}^5\text{с}^6],$$
$$a_1=C_{12}C_{23}C_{34}(J_1+J_2+J_3+J_4)J_5+C_{12}C_{23}C_{34}(J_1+J_2+J_3)(J_4+J_5)+$$
$$+C_{12}C_{34}C_{45}(J_1+J_2)(J_3+J_4+J_5)+$$
$$+C_{23}C_{34}C_{45}(J_2+J_3+J_4+J_5)J_1=164128\times10^{12}\,[\text{кГ}^5\text{см}^5\text{с}^4],$$
$$a_0=C_{12}C_{23}C_{34}C_{45}(J_1+J_2+J_3+J_4+J_5)=1408\times10^7\,[\text{кГ}^5\text{см}^5\text{с}^2],$$

Определим безразмерные коэффициенты для дифференциальных уравнений (28), (30), (32), (34):

$$k_4=0{,}000432;\; k_3=0{,}022564;\; k_2=0{,}268257. \quad (37)$$

Значение безразмерного коэффициента k_2 показывает, что $k_2>0{,}25$, а следовательно, нельзя дифференциальные уравнения (28), (30), (32), (34) заменить вырожденным дифференциальным уравнением четвертого порядка (20). Поэтому максимальные динамические моменты определим на основании дифференциального уравнения второго порядка (23) с использованием формулы (27).

Проведем численное решение точных дифференциальных уравнений (28), (30), (32), (34) с учетом соответствующих начальных условий (29), (31), (33), (35) и определим максимальные значения упругих моментов и относительных деформаций звеньев в многомассовой упруго-инерционной системе. Результаты вычислений приведены в таблице.

Таблица

Моменты ($M_{k,k+1}$)	M_{12}, кГсм	M_{23}, кГсм	M_{34}, кГсм	M_{45}, кГсм
1	5585	3657	2508	1818
2	5854	3736	2538	1834

В первой строке таблицы приведены точные значения максимальных динамических моментов, определенных в результате численного решения дифференциальных уравнений высокого порядка с соответствующими им начальными условиями. Во второй строке таблицы — приближенные значения по формуле (27). Как в случае точных дифференциальных уравнений

$$(M_{12})_{\max} > (M_{23})_{\max} > (M_{34})_{\max} > (M_{45})_{\max}, \tag{38}$$

так и в случае приближенных, можно убедиться, что неравенство (38) выполняется.

Кроме того, вырожденные дифференциальные уравнения правильно определяют максимальный динамический момент в упругом звене C_{12}. При учете в упругих элементах внутреннего трения максимальные динамические моменты в первой строке уменьшаются [3, 4]. Поэтому в первой строке таблицы максимальные динамические моменты при учете внутреннего трения будут меньшими. Приближенная формула (27) будет давать граничные значения для максимальных динамических моментов. Эта формула позволяет без решения сложных дифференциальных уравнений высокого порядка дать оценку граничных динамических моментов в каждом звене n-массовой упругой системы. Это особенно важно на стадии проектирования механизмов и машин.

Таким образом, необходимым и достаточным условием для понижения дифференциальных уравнений высокого порядка будет выполнение неравенств (19), которые сохраняют свойства корней точного и вырожденного уравнений.

Если многомассовая упруго-инерционная система содержит упругие разветвления [4, 8], то предложенный метод упрощения нельзя применять, поскольку такие системы имеют ряд физических особенностей [4].

В.А. Красношапка

ПРО ОДИН МЕТОД СПРОЩЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Запропоновано методику визначення максимальних динамічних моментів у пружних елементах багатомасових пружно-інерційних динамічних систем з використанням вироджених диференційних рівнянь другого порядку.

V.A. Krasnoshapka

ON ONE METHOD OF SIMPLIFICATION OF DYNAMICAL SYSTEMS

The method of determining maximal dynamic moments in elastic links of multimass elastic inertial dynamical systems with application of degenerate differential equations of the second order.

1. *Давыдов Б.Л., Скородумов Б.А.* Статика и динамика машин. — М. : Машиностроение, 1967. — 430 с.
2. *Ривин Е.Н.* Динамика приводов станков. — М. : Машиностроение, 1967. — 204 с.
3. *Вейц В.Л.* Динамика машинных агрегатов. — Л. : Машиностроение, 1969. — 367 с.
4. *Иванченко Ф.К., Красношапка В.А.* Динамика металлургических машин. — М. : Металлургия, 1983. — 293 с.
5. *Дроговоз А.И., Красношапка В.А.* Упрощение многомассовых систем путем понижения исследуемого дифференциального уравнения // Сб. Прикладные задачи динамики непрерывно-дискретных упругих систем. — Киев : Наук. думка, 1975. — С. 25–32.
6. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. — 1964. — **22**. — С. 136–141.
7. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. — М. : ГИТТЛ, 1958. — 627 с.

8. *Красношапка В.А.* О разделении движений при исследовании динамических процессов в многомассовых системах. — Киев : Наук. думка, 1976. — С. 39–53.

Получено 26.07.2018