УДК 517.929

Б. Пужа, Д.Я. Хусаинов, В. Новотна [1], *А.В. Шатырко*[2]

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ, РАВНОМЕРНОЙ ПО ЗАПАЗДЫВАНИЮ, НЕНУЛЕВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ

Введение

Рассматривается математическая модель динамики популяции В. Вольтерра [1–3], представляющая собой систему двух дифференциальных уравнений с запаздыванием с квадратичной правой частью. Предварительно исследована система без запаздывания. Построен фазовый портрет системы без запаздывания. Далее рассмотрено влияние запаздывания [4, 5]. Проведено исследование устойчивости ненулевого стационарного положения равновесия.

1. Модель Вольтерра. Система без запаздывания

Рассмотрим систему уравнений, описывающих взаимодействие между видом жертвы с плотностью x и истребляющим ее хищником с плотностью y [2]. В основе составления уравнений лежат следующие предположения:

— при отсутствии хищника рост численности жертвы происходит в соответствии с логистическим уравнением, со скоростью роста a и емкостью среды a/b;

— скорость «выедания» жертвы пропорциональна произведению плотностей хищника и жертвы.

В этом случае уравнения динамики популяций имеют вид

$$\dot{x}(t) = [a - bx(t) - cy(t)]\,x(t) = P(x, y), \quad \dot{y}(t) = -[d - gx(t)]\,y(t) = Q(x, y). \tag{1}$$

Проведем исследование поведения решений системы (1), основанное на методе линеаризации. Суть метода состоит в нахождении особых точек, их исследовании и построении фазового портрета системы линейного приближения каждой из этих точек. Далее производится «сшивание» отдельных траекторий и построение фазового портрета системы в целом.

Для нахождения особых точек приравняем правые части системы нулю и рассмотрим систему уравнений $[a - bx - cy]\,x = 0$, $[-d + gx]\,y = 0$.

[1] Work is conducted under the Agreement on scientific cooperation between the Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv and the Faculty of Business and Management, Brno University of Technology 04.08.2016.The paper was supported by the Czech Science Foundation: The project «Development of new methods of solving dynamic models of corporate processes management», No.: GA16-03796S.

[2] The author was supported by the project MeMoVEV90800005/2140 c.p. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_27/0008371 01.06.2018

Первое уравнение распадается на два $a - bx - cy = 0,\ \ x = 0,$ второе — также на два $-d + gx = 0,\ \ y = 0.$

Особые точки определяются системами уравнений

1) $a - bx - cy = 0,\ \ -d + gx = 0,$

2) $a - bx - cy = 0,\ \ y = 0,$

3) $x = 0,\ \ y = 0.$

Ими будут

$$O_1(0,0),\ \ O_2(a/b,0),\ \ O_3(d/g,(ag-bd)/cg). \tag{2}$$

Будем считать, что параметры системы таковы, что

$$ag - bd > 0. \tag{3}$$

Тогда система имеет три особые точки, расположенные в первом квадранте. Построим фазовый портрет в окрестности каждой из особых точек. Первые производные функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в окрестности особой точки $M_0(x_0, y_0)$ имеют вид

$$\left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = a - 2bx - cy\,|_{(x_0,y_0)},\ \ \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -cx\,|_{(x_0,y_0)},$$
$$\left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = gy\,|_{(x_0,y_0)},\ \ \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -d + gx\,|_{(x_0,y_0)}. \tag{4}$$

1.1. Рассмотрим первую особую точку $O_1(0,0)$. Система, линеаризованная в этой точке, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_1 z(t),\ \ A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix},\ z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Собственными числами системы будут

$$\lambda_1 = a > 0,\ \ \lambda_2 = -d < 0.$$

Особая точка — седло. Сепаратрисами седла являются оси Ox — неустойчивая сепаратриса, Oy — устойчивая сепаратриса.

1.2. Рассмотрим вторую особую точку $O_2(a/b,0)$. Как следует из (4), для этой точки имеет место

$$a_2 = a - 2bx - cy\,|_{(a/b,0)} = -a,\ \ b_2 = -cx\,|_{(a/b,0)} = -ac/b,$$

$$c_2 = gy\,|_{(a/b,0)} = 0,,\ d_2 = -d + gx\,|_{(a/b,0)} = (ag-bd)/b.$$

Система, линеаризованная в этой точке, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_2(z(t) - z_2),\ \ A_2 = \begin{bmatrix} -a & -\dfrac{ac}{b} \\ 0 & (ag-bd)/b \end{bmatrix},\ z_2 = \begin{pmatrix} a/b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Собственными числами системы линейного приближения будут

$$\lambda_1 = -a < 0,\ \ \lambda_2 = (ag-bd)/b > 0.$$

Положением равновесия также является седло. Для определения сепаратрис поступаем следующим образом. Перепишем систему (5) в виде одного уравнения с переменными, «смещенными» в особую точку $O_2(a/b, 0)$,

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{(ag-bd)\,\bar{y}/b}{-a\bar{x}-ac\bar{y}/b}, \quad x=\bar{x}+x_2, \quad y=\bar{y}+y_2.$$

Подставим уравнение прямой $\bar{y}=k\bar{x}$ и, учитывая условие (3), получим

$$k_1=0, \quad k_2=-\frac{ab}{ag-bd+ac}<0.$$

Таким образом, седло имеет устойчивую сепаратрису $\bar{y}=0$ и неустойчивую

$$\bar{y}=-\frac{ab}{ag-bd+ac}\bar{x}.$$

1.3. Рассмотрим третью особую точку. Как следует из (4), для точки $O_3(d/g,\,(ag-bd)/cg)$ получаем

$$a_3 = a-2bx-cy\Big|_{\left(\frac{d}{g},\frac{ag-bd}{cg}\right)} = -\frac{bd}{g}, \quad b_3=-cx\Big|_{\left(\frac{d}{g},\frac{ag-bd}{cg}\right)} = -\frac{cd}{g},$$

$$c_3\,\Big| = gy\Big|_{\left(\frac{e}{g},\frac{ag-be}{cg}\right)} = \frac{ag-be}{c}, \quad d_3=-d+gx\Big|_{\left(\frac{d}{g},\frac{ag-bd}{cg}\right)} = 0.$$

И система, линеаризованная в окрестности этой особой точки, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_3(z(t)-z_3), \quad A_2 = \begin{bmatrix} -bd/g & -cd/g \\ (ag-bd)/c & 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} d/g \\ (ag-bd)/c \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение выглядит так:

$$\det\{A-\lambda E\} = \begin{vmatrix} -bd/g-\lambda & -\dfrac{cd}{g} \\ (ag-bd)/c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\frac{bd}{g}\lambda+\frac{(ag-bd)\,d}{g}=0.$$

Коэффициенты уравнения положительны, поэтому положение равновесия асимптотически устойчиво. Корнями уравнения будут

$$\lambda_{1,2} = -\frac{bd}{2g} \pm \sqrt{\frac{(bd)^2}{4g^2}-\frac{(ag-bd)\,d}{g}} = \frac{1}{2g}\left\{-bd\pm\sqrt{(bd)^2-4(ag-bd)gd}\right\}.$$

Как следует из условия (3), возможны два варианта.

1. Если $(bd)^2-4(ag-bd)>0$, то положение равновесия — устойчивый узел.

2. Если $(bd)^2-4(ag-bd)=0$, то положение равновесия — вырожденный устойчивый узел.

3. Если $(bd)^2-4(ag-bd)<0$, то положение равновесия — устойчивый фокус.

Пример. Пусть параметры модели имеют вид $a=20$, $b=2$, $c=5$, $d=0{,}5$, $g=1$. Тогда система уравнений (1) выглядит так:

$$\dot{x}(t) = [20-2x(t)-5y(t)]\,x(t), \quad \dot{y}(t) = -[0{,}5-x(t)]\,y(t).$$

Особыми будут следующие три точки, расположенные в первом квадранте,

$$O_1(0;0), \quad O_2(10;0), \quad O_3(0{,}5;3{,}8).$$

Построим фазовый портрет в окрестности каждой из особых точек.

1. Система, линеаризованная в точке $O_1(0,0)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_1 z(t), \quad A_1 = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Ее собственные числа — $\lambda_1 = 20 > 0$, $\lambda_2 = -0{,}5 < 0$. Особая точка — седло. Сепаратрисами седла являются оси Ox — неустойчивая сепаратриса, Oy — устойчивая сепаратриса.

2. Вторая особая точка $O_2(10,0)$. Система, линеаризованная в этой точке, имеет вид

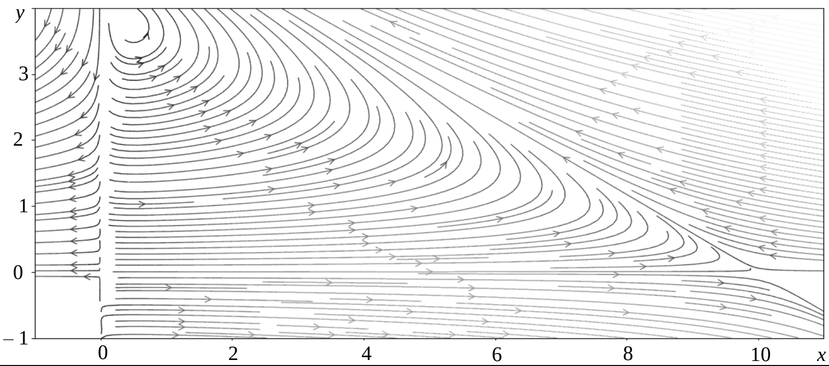
$$\frac{d}{dt}z(t) = A_2(z(t) - z_2), \quad A_2 = \begin{bmatrix} -20 & -50 \\ 0 & 9{,}5 \end{bmatrix}, \; z_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа — $\lambda_1 = -20 < 0$, $\lambda_2 = 9{,}5 > 0$. В окрестности особой точки $O_2(10,0)$ имеем неустойчивую сепаратрису $y = 0$ и устойчивую — $\bar{y} = -0{,}59(x-10)$.

3. Рассмотрим третью особую точку $O_3(0{,}5;\,3{,}8)$. Система, линеаризованная в окрестности этой особой точки, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_3(z(t) - z_3), \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2{,}5 \\ 3{,}8 & 0 \end{bmatrix}, \; z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа — $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{37/2}$. Положение равновесия — устойчивый фокус. Фазовый портрет системы примера 1 в целом изображен на рис. 1.



2. Система с запаздыванием

Если учитывать время τ между моментом, когда убита одна особь жертвы, и моментом, когда происходит увеличение численности хищников, то система принимает вид

$$\dot{x}(t) = [a - bx(t) - cy(t)]x(t), \quad \dot{y}(t) = -dy(t) + gx(t-\tau)\,y(t-\tau). \qquad (6)$$

Особые точки — те же точки (2).

Линеаризация системы с запаздыванием проводится следующим образом. Система общего вида

$$\dot{x}(t) = P(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) = P(x, y, x_\tau, y_\tau),$$

$$\dot{y}(t) = Q(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) = Q(x, y, x_\tau, y_\tau),$$

линеаризованная в точке $O_0(x_0, y_0)$, имеет вид

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial P(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial P(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (y - y_0) +$$

$$+ \frac{\partial P(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial x_\tau}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (x_\tau - x_0) + \frac{\partial P(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial y_\tau}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (y_\tau - y_0), \quad (7)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial Q(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial Q(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (y - y_0) +$$

$$+ \frac{\partial Q(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial x_\tau}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (x_\tau - x_0) + \frac{\partial Q(x, y, x_\tau, y_\tau)}{\partial y_\tau}\Big|_{(x_0, y_0, x_0, y_0)} (y_\tau - y_0), \quad (8)$$

$$x_\tau = x(t - \tau), \; y_\tau = y(t - \tau).$$

К сожалению, для линейных стационарных систем с запаздыванием такой простой классификации особых точек, как для систем без запаздывания, не существует. Это связано с бесконечномерностью пространства решений системы, а именно со счетным числом собственных чисел. Тем не менее, используя предложенную линеаризацию (7), (8) применительно к системе (6) в точке $O_0(x_0, y_0)$, получаем

$$\dot{x}(t) = (a - 2bx_0 - cy_0)(x(t) - x_0) - cx_0(y(t) - y_0),$$

$$\dot{y}(t) = -d(y(t) - y_0) + gy_0(x(t - \tau) - x_0) + gx_0(y(t - \tau) - y_0).$$

В векторно-матричном виде она записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2bx_0 - cy_0 & -cx_0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ gy_0 & gx_0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t - \tau) - x_0 \\ y(t - \tau) - y_0 \end{pmatrix}$$

или $\frac{d}{dt} z(t) = A_0 z(t) + B_0 z(t - \tau)$, где $A_0 = \begin{bmatrix} a - 2bx_0 - cy_0 & -cx_0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$, $B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ gy_0 & gx_0 \end{bmatrix}$,

$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) - x_0 \\ y(t) - y_0 \end{pmatrix}$, $z(t - \tau) = \begin{pmatrix} x(t - \tau) - x_0 \\ y(t - \tau) - y_0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим каждую из точек покоя в отдельности.

2.1. Первая особая точка $O_1(0, 0)$, т.е. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Система, линеаризованная в этой точке, имеет вид

$$\frac{d}{dt} z(t) = A_1 z(t), \; A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

и является системой без запаздывания. Как и в предыдущем случае, положением равновесия линеаризованной системы является седло с сепаратрисами, являющимися осями координат.

2.2. Рассмотрим вторую особую точку $O_2(a/b, 0)$. Для этой особой точки система линейного приближения будет иметь вид

$$\dot{x}(t) = -a\left(x(t) - \frac{a}{b}\right) - c\frac{a}{b} y(t), \; \dot{y}(t) = -dy(t) + g\frac{a}{b} y(t - \tau)$$

и уже является системой с запаздыванием. В векторно-матричном виде она записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}z(t)=A_2z(t)+B_2z(t-\tau),\ \ A_2=\begin{bmatrix}-a & -ac/b\\ 0 & -d\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & ag/b\end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\det\{A_2+e^{-\lambda\tau}B_2-\lambda E\}=\begin{vmatrix}-a-\lambda & -c\dfrac{a}{b}\\ 0 & -d+e^{-\lambda\tau}\,ag/b-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Раскрыв определитель, получаем характеристический квазиполином

$$(a+\lambda)\left(d-e^{-\lambda\tau}\,\frac{ag}{b}+\lambda\right)=0,$$

который распадается на два сомножителя

$$\lambda+a=0,\ \ \lambda+d+e^{-\lambda\tau}\omega=0,\ \ \omega=-ag/b. \tag{9}$$

Первым корнем будет $\lambda_1=-a<0.$ Второе уравнение достаточно хорошо исследовано. Область устойчивости в пространстве параметров, т.е. область, в которой его корни имеют отрицательные действительные части, визуально представлена в [4, 5].

Если параметры характеристического уравнения (9) таковы, что $d+\omega>0$ и $d>|\omega|$, то асимптотическая устойчивость сохраняется при произвольном $\tau>0.$ В случае, когда первое неравенство выполняется, а второе — нет, асимптотическую устойчивость имеем при $\tau<\tau_0,$ $\tau_0=\arccos\left(-\dfrac{d}{\omega}\right)/\sqrt{\omega^2-d^2}.$ Критическое значение параметров уравнения, при которых сохраняется запаздывание, определяется участком кривой

$$\omega=\frac{t}{\sin\tau_0 t},\ \ d=-\frac{t\cos\tau_0 t}{\sin\tau_0 t}.$$

Однако согласно условию (3) справедливо неравенство $d+\omega=(bd-ag)/d<0.$ Поэтому положение равновесия неустойчиво при произвольном запаздывании $\tau>0.$

Замечание 1. Свойство неустойчивости в случае запаздывания следует из неустойчивости при отсутствии запаздывания, так как фактор запаздывания «лишь ухудшает ситуацию».

2.3. Рассмотрим третью особую точку $O_3(d/g,(ag-bd)/cg),$ $y_0=(ag-bd)/cg.$ Если запаздывание отсутствует, то, как было показано выше, положение равновесия устойчиво (устойчивый узел или устойчивый фокус). Поэтому в силу непрерывности при определенных «условиях малости» это свойство сохраняется и для системы с запаздыванием; используя предложенный метод линеаризации (7), (8) для этой особой точки, получаем

$$\frac{d}{dt}z(t)=A_3(z(t)-z_3)+B_3(z(t-\tau)-z_3),$$

где

$$A_3=\begin{bmatrix}-bd/g & -cd/g\\ 0 & -d\end{bmatrix},B_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ (ag-bd)/c & d\end{bmatrix},\ z_3=\begin{pmatrix}\dfrac{d}{g}\\ (ag-bd)/cg\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение полученной системы имеет вид

$$\det\{A_3+e^{-\lambda\tau}B_3-\lambda E\}=\begin{vmatrix}-b\dfrac{d}{g}-\lambda & -c\dfrac{d}{g}\\ e^{-\lambda\tau}\,\dfrac{ag-bd}{c} & -d+e^{-\lambda\tau}d-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

После раскрытия определителя получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + d\left[\left(1-\frac{b}{g}\right) - e^{-\lambda\tau}\right]\lambda + \left[\frac{bd^2}{g} + \left(ad - 2\frac{bd^2}{g}\right)e^{-\lambda\tau}\right] = 0$$

или

$$\lambda^2 + [p_{10} + p_{11}e^{-\lambda\tau}]\lambda + [p_{20} + p_{21}e^{-\lambda\tau}] = 0,$$

$$p_{10} = d(1-b/g),\ \ p_{11} = -d,\ \ p_{20} = bd^2/g,\ \ p_{21} = ad - 2bd^2/g.$$

Условием асимптотической устойчивости является $\mathrm{Re}\lambda_i < 0,\ \ i = 1, 2, \dots$. Однако исследование расположения корней этого уравнения в общем случае представляет достаточно сложную задачу.

Поэтому рассмотрим альтернативный подход исследования устойчивости точки $O_3(x_3, y_3)$, заключающийся в использовании второго метода Ляпунова с функцией квадратичного вида $V(z) = z^{\mathrm{T}}Hz$,

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, z(t) = \begin{pmatrix} x(t) - x_3 \\ y(t) - y_3 \end{pmatrix}$$

или $V(x, y) = h_{11}z_1^2 + 2h_{12}z_1z_2 + h_{22}z_2^2,\ \ z_1 = x - x_3,\ \ z_2 = y - y_3.$

Поскольку при отсутствии запаздывания характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид

$$\det\{A_3 + B_3 - \lambda I\} = \lambda^2 + \frac{bd}{g}\lambda + \frac{d(ag - bd)}{g} = 0$$

и коэффициенты его положительны, то матрица $A_3 + B_3$ асимптотически устойчива, т.е. все собственные числа матрицы имеют отрицательные действительные части: $\mathrm{Re}\lambda_i(A_3 + B_3) < 0,\ \ i = \overline{1, 2}$ [6]. Поэтому при произвольной положительно-определенной матрице

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

матричное уравнение Ляпунова

$$(A_3 + B_3)^{\mathrm{T}} H + H(A_3 + B_3) = -C$$

имеет единственное решение — положительно-определенную матрицу H [6]. При определенных «условиях малости» свойство устойчивости сохранится и для системы с запаздыванием. Имеет место следующий результат.

Рассмотрим систему с запаздыванием с квадратичной правой частью [7–9].

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau) + Z^{\mathrm{T}}(t)Dz(t) + Z^{\mathrm{T}}(t-\tau)Ez(t-\tau), \tag{10}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},\ \ Z^{\mathrm{T}}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x(t) & y(t) \end{bmatrix},$$

$$Z^{\mathrm{T}}(t-\tau) = \begin{bmatrix} x(t-\tau) & y(t-\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x(t-\tau) & y(t-\tau) \end{bmatrix},\ \ D = \begin{bmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 \\ d_{12}^1 & d_{22}^1 \\ d_{11}^2 & d_{12}^2 \\ d_{12}^2 & d_{22}^1 \end{bmatrix},\ \ E = \begin{bmatrix} e_{11}^1 & e_{12}^1 \\ e_{12}^1 & e_{22}^1 \\ e_{11}^2 & e_{12}^2 \\ e_{12}^2 & e_{22}^1 \end{bmatrix}.$$

Экстремальные собственные числа соответствующих симметричных, положительно-определенных матриц обозначим $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$. Проведем исследование устойчивости нулевого положения равновесия системы (10).

Теорема 1. Пусть матрица $A+B$ асимптотически устойчива и матрица H является решением матричного уравнения Ляпунова $(A+B)^{\mathrm{T}} H + H(A+B) = -C.$ Если выполняется неравенство

$$L(H) = \lambda_{\min}(C) - 2|H||B|(1+\sqrt{\varphi|H|}\,) > 0, \;\; \varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \tag{11}$$

то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво при произвольном запаздывании $\tau > 0.$ Причем «гарантированной областью устойчивости» будет шар

$$U_R = \{z : |z| < R\}, \;\; R = \frac{L(H)}{2|H|(|D| + |E|\varphi(H))}. \tag{12}$$

Доказательство. При доказательстве используем метод функций Ляпунова с дополнительным условием Б.С. Разумихина [7]. В качестве функции Ляпунова возьмем квадратичную форму $V(z) = z^{\mathrm{T}} Hz,$ положительно-определенная матрица H которой является решением уравнения Ляпунова. Поскольку матрица $A+B$ асимптотически устойчива, при любой положительно-определенной матрице C матричное уравнение имеет единственное решение — положительно-определенную матрицу H. Вычислим полную производную функции Ляпунова $V(z) = z^{\mathrm{T}} Hz$ в силу системы (10)

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) = [Az(t) + Bz(t-\tau) + Z^{\mathrm{T}}(t) Dz(t) + Z^{\mathrm{T}}(t-\tau) Ez(t-\tau)]^{\mathrm{T}} Hz(t) +$$

$$+ z^{\mathrm{T}}(t) H[Az(t) + Bz(t-\tau) + Z^{\mathrm{T}}(t) Dz(t) + Z^{\mathrm{T}}(t-\tau) Ez(t-\tau)].$$

Приведем записанное выражение к виду

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) = z^{\mathrm{T}}(t)[(A+B)^{\mathrm{T}} H + H(A+B)]z(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t) HB[z(t-\tau) - z(t)] +$$

$$+ 2z^{\mathrm{T}}(t) HZ^{\mathrm{T}}(t) Dz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t) HZ^{\mathrm{T}}(t-\tau) Ez(t-\tau).$$

Учитывая, что H — решение матричного уравнения Ляпунова, а C — положительно-определенная матрица, получаем

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) \le -\lambda_{\min}(C)|z(t)|^2 + 2|HB||z(t)||z(t) - z(t-\tau)| +$$

$$+ 2|H||D||z(t)|^3 + 2|H||E||z(t)||z(t-\tau)|^2$$

или

$$\frac{d}{dt} V(z(t)) \le -\lambda_{\min}(C)|z(t)|^2 + 2|HB||z(t)|[|z(t)| + |z(t-\tau)|] +$$

$$+ 2|H||D||z(t)|^3 + 2|H||E||z(t)||z(t-\tau)|^2.$$

Условие Б.С. Разумихина означает, что полная производная функции Ляпунова в силу системы вычисляется при условии, что предыстория находится внутри поверхности уровня функции Ляпунова. Учитывая неравенства квадратичных форм, это условие можно записать в виде

$$\lambda_{\min}(H)|z(s)|^2 \le V(z(s)) < V(z(t)) \le \lambda_{\max}(H)|z(t)|^2, \ s < t,$$

или

$$|z(s)| < \sqrt{\varphi(H)}\,|z(t)|, \ s < t. \tag{13}$$

Используя неравенство (13), выражение для производной функции Ляпунова перепишем следующим образом:

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) \le -\lambda_{\min}(C)|z(t)|^2 +$$

$$+2[|HB|(1+\sqrt{\varphi(H)})+2|H||D||z(t)|+2|H||E|\varphi(H|z(t)|]|z(t)|^2.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt}V(z(t)) \le -\{\lambda_{\min}(C)-2|H||B|(1+\sqrt{\varphi(H)})\}|z(t)|^2 + 2|H|(|D|+|E|\varphi(H))|z(t)|^3.$$

Таким образом, при выполнении условия

$$L(H) = \lambda_{\min}(C) - 2|H||B|(1+\sqrt{\varphi(H)}) > 0$$

в области (12) положение равновесия $z(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво при произвольном запаздывании.

Замечание 2. Условие (11) накладывает достаточно «жесткие» ограничения на параметры системы. Оно требует асимптотической устойчивости матрицы $A+B$ и малости запаздывающей компоненты B.

Вернемся к системе Лотки–Вольтерра с запаздыванием (6). Произведя замену

$$z_1(t) = x(t) + d/g, \ z_2(t) = y(t) + (ag-bd)/cg,$$

получим систему уравнений возмущений в точке $O_3(x_3, y_3)$

$$\dot z_1(t) = -\frac{bd}{g}z_1(t) - c\frac{d}{g}z_2(t) - bz_1^2(t),$$

$$\dot z_2(t) = -dz_1(t) + \frac{ag-bd}{c}z_1(t-\tau) + dz_2(t-\tau) + gz_1(t-\tau)z_2(t-\tau). \tag{14}$$

Введем следующие обозначения:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -bd/g & -cd/g \\ 0 & -d \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (ag-bd)/c & d \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g/2 \\ g/2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Тогда система (14) сводится к универсальному виду (10). Матрицу $A_3 + B_3$ запишем

$$A_3 + B_3 = \begin{bmatrix} -bd/g & -cd/g \\ (ag-bd)/c & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \frac{bd}{g}\lambda + \frac{d(ag-bd)}{g} = 0,$$

матричное уравнение Ляпунова имеет единственное решение.

Расписав покоординатно матричное уравнение Ляпунова, имеем

$$\begin{cases} -\dfrac{bd}{g}h_{11}+\dfrac{ag-bd}{c}h_{12}=-\dfrac{1}{2}c_{11}, \\ -c\dfrac{d}{g}h_{11}-\dfrac{bd}{g}h_{12}+\dfrac{ag-bd}{c}h_{22}=-c_{12}, \\ -c\dfrac{d}{g}h_{12}=-\dfrac{1}{2}c_{22}. \end{cases}$$

Решив его, получаем

$$H=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix},\ h_{12}=\frac{g}{2cd}c_{22},\ h_{11}=\frac{g}{2bd}\left[\frac{(ag-bd)g}{c^2d}c_{22}+c_{11}\right],$$

$$h_{22}=\frac{c}{ag-bd}\left[\frac{c}{2b}\left(\frac{(ag-bd)g}{c^2d}c_{22}+c_{11}\right)+\frac{b}{2c}c_{22}+c_{12}\right].$$

Положив для простоты $c_{11}=2,\ c_{12}=0,\ c_{22}=2,$ получим

$$h_{12}=\frac{g}{cd},\ \ h_{11}=\frac{g}{bd}\left[\frac{(ag-bd)g}{c^2d}+1\right],\ h_{22}=\frac{c}{ag-bd}\left[\frac{c}{b}\left(\frac{(ag-bd)g}{c^2d}+1\right)+\frac{b}{c}\right]. \quad (16)$$

Учитывая обозначения матриц D и E (15) и выбранные матричные нормы, получаем

$$|D|=b,\ |E|=\frac{g}{\sqrt{2}},\ |H|=\lambda_{\max}(H).$$

Таким образом, условия теоремы 1, сформулированные применительно к системе (6), таковы.

Теорема 2. Пусть матрица H с коэффициентами, определенными в (16), и матрица $B,$ определенная в (15), таковы, что выполняется неравенство

$$L(H)=1-\lambda_{\max}(H)|B|(1+\sqrt{\varphi(H)})>0.$$

Тогда стационарная точка $O_3(x_3, y_3)$ нелинейной системы (6) асимптотически устойчива при произвольном запаздывании $\tau>0.$ Причем «гарантированной областью устойчивости» будет шар

$$U_R=\{z:|z|<R\},\ \ R=\frac{1-\lambda_{\max}(H)|B|(1+\sqrt{\varphi(H)})}{2\lambda_{\max}(H)(b+g\varphi(H)/\sqrt{2})}.$$

Заключение

В статье рассмотрены системы дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью, с запаздывающим аргументом и без него. Подобными уравнениями описываются динамические модели типа хищник–жертва. С помощью прямого метода Ляпунова и LMI-техники исследовано качественное поведение решений. Построен фазовый портрет соответствующей системы без запаздывания. Проведено исследование устойчивости ненулевого стационарного положения равновесия системы с запаздыванием. Доказаны достаточные условия асимптотической устойчивости решений. Результаты проиллюстрированы на примерах.

Б. Пужа, Д.Я. Хусаінов, В. Новотна, А.В. Шатирко

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ, РІВНОМІРНОЇ ЗА ЗАПІЗНЮВАННЯМ, НЕНУЛЬОВОГО ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ ОДНІЄЇ МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЇ

Розглянуто математичну модель динаміки популяції у вигляді системи двох диференціальних рівнянь з запізненням та квадратичною правою частиною. Попередньо досліджено відповідну систему без запізнювання і побудовано її фазовий портрет. Розглянуто вплив запізнювання на якісну поведінку розв'язків. З використанням прямого методу Ляпунова проведено дослідження стійкості ненульового стаціонарного стану рівноваги. Результати сформульовано у вигляді матричних алгебраїчних нерівностей.

B. Puzha, D.Ya. Khusainov, V. Novotna, A.V. Shatyrko

INVESTIGATION OF UNIFORM BY DELAY STABILITY OF NONTRIVIAL EQULIBRIUM POINT OF ONE POPULATION MODEL

A mathematical model of population dynamics in the form of a system of two differential equations with a time-delay argument and a quadratic right-hand side. The corresponding system without delay was preliminarily investigated, and its phase portrait was constructed. The effect of delay on the qualitative behavior of solutions is considered. Using the direct Lyapunov method, the stability of a nonzero stationary equilibrium state is investigated. The results are formulated in the form of matrix algebraic inequalities.

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М. : Наука, 1976. — 288 с.
2. *Smith J. Maynard*. Models in ecology. — Cambridge University Press. — 1974. — 146 p.
3. *Gopalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. — Dortrecht; Boston; London : Kluver Academic Publ, 1992. — 514 p.
4. *El'sgol'ts L.E., Norkin S.B.* Introduction to the theory of the differential equations with deviating argument. — New York : Academic Press, 1973. — 356 p.
5. *Hale J.* Theory of functional differential equations. — NewYork : Springer-Verlag, 1977. — 365 p.
6. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости движения. — М. : Наука, 1967. — 472 с.
7. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. — Киев : Изд-во КГУ, 1997. — 236 с.
8. *Davidov V., Khusainov D.* Stability investigation of quadratic systems with delay // Journal of Applied Mathematic and Analysis. — 2000. — **13**, N 1. — P. 85–92.
9. *Мартынюк А.А., Хусаинов Д.Я., Черниенко В.А.* Конструктивная оценка функции Ляпунова для систем с квадратичной правой нелинейностью // Прикладная механика. — 2018. — **54**, № 3. — С. 114–126.

Получено 05.06.2018

Статья представлена к публикации членом редколлегии акад. НАН Украины Чикрием А.А.