УДК 517.925.51

Ф.Г. Гаращенко, В.Р. Кулян, В.Н. Петрович, Е.А. Юнькова

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ РИСКОВЫХ АКТИВОВ

Введение

Существует широкий спектр подходов к решению и анализу прикладных задач портфельного инвестирования [1–4]. Значительная их часть предполагает использование методов технического и фундаментального анализа, которые дают возможность прогнозирования рыночной стоимости акций. Правила построения прогноза, в силу хорошо развитых математических формализаций и относительно несложной практической реализации, активно развиваются и эффективно применяются не только на фондовом рынке, но и при решении более широкого диапазона задач практического инвестирования.

Применение аналитических методов фундаментального анализа позволяет ответить на вопрос: почему рыночная стоимость акции в будущем будет именно такой? Учитывая сложность математических моделей при исследовании процессов ценообразования активов фондового рынка, методы фундаментального анализа еще не нашли эффективного развития и конструктивного применения. Принципы анализа такого рода процессов, которые основываются на разработке и применении методов математического моделирования [2–4], очевидно, наиболее перспективны и их разработке уделяется значительное внимание ученых и практиков.

В данном исследовании представлены новые фундаментальные методы решения задач портфельного инвестирования, основывающиеся на применении математического и компьютерного моделирования, а также допустимого и эффективного множеств портфелей акций.

Цель публиикации — разработка аналитических методов и вычислительных процедур для решения задачи двукритериальной оптимизации портфеля рискованных ценных бумаг в постановке Г. Марковица [1] при наличии количественных и качественных инструментальных рыночных ограничений на структуру портфеля.

Постановка задачи об оптимизации портфеля акций при ограничениях

Математическая задача построения оптимальной динамики портфеля акций в наиболее общей постановке Г. Марковица имеет вид

© Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, В.Р. КУЛЯН, В.Н. ПЕТРОВИЧ, Е.А. ЮНЬКОВА, 2018

$$\left\{\begin{matrix} r^{\mathrm{T}}x \to \max\limits_{x} \\ x^{\mathrm{T}}Vx \to \min\limits_{x} \\ I^{\mathrm{T}}x = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \end{matrix}\right\}. \qquad (1)$$

Здесь r — вектор ожидаемой рыночной стоимости акций; V — ковариационная матрица; x — вектор долей соответствующих акций в портфеле; $I = (1, 1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$; Т — знак транспонирования.

Предметное содержание этой двукритериальной задачи состоит в определении оптимальной инвестиционной стратегии, которая предусматривает максимизацию ожидаемой рыночной стоимости портфеля и одновременно минимизацию его риска. Согласно Г. Марковицу, критерии в задаче противоречивы, т.е. улучшение результата по одному из них приводит к ухудшению по другому. Практически это означает, что увеличению ожидаемой рыночной стоимости портфеля соответствует увеличение его риска.

Существуют различные подходы к решению задачи (1), но они в большей степени имеют теоретический характер и их сложно применить к условиям реального инвестирования в ценные бумаги. Шаг, который может приблизить формулировку задачи (1) к практическому использованию, — разделение приведенной выше двукритериальной задачи на две однокритериальные, первая предполагает оптимизацию риска портфеля σ при заданном уровне ожидаемой рыночной стоимости r_p, а вторая — оптимизацию ожидаемой рыночной стоимости для определенного инвестором «оптимального» уровня риска портфеля. В некоторых случаях такие математические постановки задач нелинейного программирования позволяют получить аналитические решения [2]. При этом важно, что в указанных постановках не рассматриваются существенные особенности, которые состоят в том, что на каждом шаге решения задачи о диверсификации портфеля акций необходимо учитывать как бюджетные, так и инструментальные ограничения, связанные с наличием на рынке необходимого количества и качества финансовых инструментов:

$$x_i(t) \in X(t), \; i = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

Здесь $X(t)$ — ограниченное замкнутое множество, содержащее допустимые портфели в момент времени t.

Математическая постановка задачи об оптимизации риска портфеля инвестиций при определенном на момент времени T уровне его ожидаемой рыночной стоимости $r_p(T)$ может быть записана

$$\left\{\begin{matrix} r^{\mathrm{T}}(T)x(T) = r_P(T) \\ x^{\mathrm{T}}(T)Vx(T) \to \min\limits_{x} \\ I^{\mathrm{T}}x(T) = 1 \\ x_i(t) \geq 0, \; i = \overline{1, n}, \; t \in [t_0, T] \\ x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \end{matrix}\right\}. \qquad (3)$$

На примере инвестирования в акции рассмотрим задачу оптимизации риска портфеля при заданном уровне его ожидаемой рыночной стоимости $r_p(T)$, учитывая при этом ограничения (2).

Рассмотрим задачу в динамической постановке. Математические модели формирования динамики рыночной стоимости одной акции и портфеля акций [1, 2] в общем виде могут быть записаны так:

$$\frac{dr_i}{dt} = f_i(r_i, t, \alpha), \; r_i(t_0) = r_{i_0}, \; t \in [t_0, T], \; i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

$$\frac{dr_p}{dt} = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t), \; r_p(t_0) = r_{p_0} \tag{5}$$

соответственно. Здесь r_i — ожидаемая рыночная стоимость i-й акции; r_p — ожидаемая рыночная стоимость портфеля акций; x_i — доля акций i-го вида в портфеле; V — ковариационная матрица размерности n; I — единичный вектор $(n \times 1)$; t — время; α — вектор параметров модели.

Процедуру решения задачи (1) условно разделим на два этапа. Первый состоит в оптимальной диверсификации портфеля по критерию максимизации ожидаемой рыночной стоимости. На следующем этапе, используя допустимое и эффективное множества, оптимизируем найденное решение на основании второго критерия общей постановки задачи.

Задача оптимальной диверсификации портфеля акций

Сформулируем задачу оптимальной диверсификации портфеля акций, динамика рыночной стоимости которого может быть описана моделью (5). В качестве координаты фазового состояния рыночной стоимости портфеля рассмотрим $r_p(t)$, а в качестве управляющего вектора —

$$x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt}.$$

Ожидаемое значение рыночной стоимости портфеля в момент времени T, $r_p(T) = r_P^T$; интервал времени на котором исследуется система $t \in [t_0, T]$; ограничения на управление в каждый момент времени $x(t) \in U(t)$, $U(t)$ — ограниченное замкнутое множество управляющих воздействий; критерий качества

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{T} (r_p(t) - r_p(T))^2 dt + \Phi(r_p(t_0)) \to \min_{x(t) \in U(t)}.$$

Здесь $\Phi(r_p(t_0))$ — заданная функция. Необходимо определить $x(t_0)$ и соответственно $r_p(t_0)$.

Для решения задачи оптимальной диверсификации портфеля акций как задачи оптимального управления структурой портфеля можем применить принцип максимума (3). Результатом решения будут вектор $x(t_0)$ и соответственно $r_p(t_0)$.

Существенной особенностью сформулированной выше задачи является то, что модели (4), (5), заданы параметрически, поэтому отдельно построим алгоритмы идентификации параметров.

 ISSN 0572-2691

Идентификация параметров моделей (4), (5)

Задача оптимизации портфеля акций с точки зрения его ожидаемой рыночной стоимости имеет вид

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x .$$

При практическом инвестировании она рассматривается в такой постановке:

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T)\, r_i(T) \to \max_x ,$$

и состоит в построении оптимального по ожидаемой рыночной стоимости в конечный момент времени портфеля инвестиций.

Правые части системы уравнений (4) линейны и зависят от параметров. Для интегрирования системы

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{\text{ind}}(t) + \alpha_2 I(t))\, r_i(t) + \alpha_3 r_j(t)), \quad i,\ j = \overline{1,\ n}, \qquad (6)$$

построим процедуру определения вектора параметров α.

Вектор параметров модели можно рассматривать в виде $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, a_3)$ или $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in A$, где A — ограниченное замкнутое множество. Параметр a_3 часто связывают с ковариацией между акциями i и j. При решении задачи используем известную статистическую информацию о динамике рыночной стоимости соответствующих акций $\bar{r}_i\ (t)$.

На основе этой динамики разобьем интервал интегрирования на подынтервалы $t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_T$, на которых будем искать оптимальные значения параметров α. Для этого на первом подынтервале для i-й акции и для выбранного значения параметра α_0 решим задачу Коши

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i(t_0), t, \alpha_0), \quad t \in [t_0, t_1).$$

Для получения оптимального значения параметра α_1^* сформулируем оптимизационную задачу

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha \in A} \int_{t_0}^{t_1} (r_i^0(r_i(t_0), t, \alpha) - \bar{r}_i(t))^2 dt. \qquad (7)$$

Здесь $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ — решение задачи Коши на первом интервале; функция $\bar{r}(t)$ определяет условия программного функционирования системы. Таким образом, можем определить оптимальное, в понимании критерия (7), значение параметров модели (4) на первом интервале. Сформулируем и решим аналогичные задачи на других интервалах. На k-м шаге алгоритма процедура расчета оптимальных значений параметров динамической модели такова:

1) решаем задачу Коши $\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1})$, $t \in [t_{k-1}, t_k)$.

2) строим траекторию динамики системы из точки t_{k-1} к точке t_k при значении параметра α_{k-1}^*.

3) находим оптимальное значение параметра α системы на этом интервале путем решения задачи

$$\alpha_k^* = arg\min_{\alpha\in A} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (r^0(r_i(t_{k-1}), t, \alpha) - \bar{r}_i(t_{k-1}))^2 dt. \tag{8}$$

Решение задачи (6)–(8) позволяет оптимально перейти из точки $r(t_{k-1})$ в точку $r(t_k)$. Приведенная выше процедура дает возможность на основе известной статистической информации строить последовательность значений параметров α математической модели (4) для моделирования динамики поведения системы и прогнозирования ожидаемой рыночной стоимости акции r_i в заданные исследователем моменты времени.

Рассмотрим алгоритм построения гарантированной множественной оценки параметров математической модели общего вида (4) в пространстве R^n параметров α.

Алгоритм 1. Построение допустимого множества параметров математической модели (4)

Вектор параметров модели запишем в виде $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ при условии $x(t_0) = x_0$ для $t \in [t_0, t_1]$. Рассмотрим точку α_0 в пространстве параметров математической модели $\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. И пусть это значение параметров будет решением задачи параметрической идентификации модели (4). Вокруг точки α_0 опишем окружность единичного радиуса $(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$ с центром в точке $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Поделим эту линию на n равных частей, причем значение n выбирается в зависимости от точности полученного решения задачи построения гарантированной множественной оценки параметров.

Рассмотрим произвольную точку $\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$ и проведем касательную к окружности в этой точке. Уравнение касательной имеет вид

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Уравнение нормали к касательной в этой точке будет таким:

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Новые значения параметров α, которые удовлетворяют условиям программного функционирования системы, будем искать на нормали. Из уравнения нормали определим α_2:

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Изменив положение координаты α_1 согласно правилу $\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1,\ \delta > 0$, определим новое положение координаты α_2:

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Значение шагового множителя δ выбираем в зависимости от условий точности построения допустимого множества параметров. Таким образом, получено новое значение параметра $\alpha_N \in A$ $\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2})$.

Алгоритм 2. Построение допустимого множества параметров математической модели портфеля акций (5)

Для изложения последующего важно уточнить, что применение алгоритма 1 к решению задачи идентификации параметров модели (4) при различных «программных» траекториях $\bar{r}_j$ позволит получить множество векторов параметров α. При этом остается актуальной задача либо о выборе «наилучшего» вектора, либо задача о построении гарантированной множественной оценки параметров. Рассмотрим более подробно вторую задачу.

Определим центр масс множества параметров. Обозначим эту точку $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координаты которой определим с помощью выражения

$$\alpha_i^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i^j \, , \; i = 1, 2 \, .$$

Далее определим точку, наиболее удаленную от центра масс. Для этого решим задачу одномерной оптимизации $R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c)$, где $L(p, q)$ — функция расстояния между точками p и q.

На границе окружности $S(1, D)$ радиуса 1 с центром в точке $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформируем произвольную δ — сетку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ с узлами y_i. В каждом узле y_i построим вектор внешней нормали $\bar{n}_{e_i}$ к окружности согласно вышеприведенным правилам и решим вспомогательную задачу построения новых значений параметров α аналогично подходу, описанному в алгоритме 1. Выполнив приведенную процедуру для каждого из векторов $n_i, i \in K_n$, получим новый набор точек $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишем эллипсоид наименьшего объема (эллипс наименьшей площади в плоскости) вокруг таким образом построенных точек. Назовем его «гарантированной множественной оценкой» параметров модели (4), построенной на основе выбранных исследователем критериев.

На основе решений задачи параметрической идентификации математической модели (4) и известных наблюдений гарантированную множественную оценку построим в классе эллипсоидальных множеств

$$Q(B, d) : \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \le 1\} \, , \tag{9}$$

где B — симметрическая положительно–определенная матрица, которая определяет геометрию множественной оценки в пространстве параметров α, $\alpha \in R^n$; d — геометрический центр эллипсоида $d \in R^n$. Множество (9) назовем «гарантированной множественной оценкой», если каждое значение параметра α, полученное при произвольных наблюдениях, принадлежит $Q(B, d)$.

Итерационная процедура метода построения гарантированной множественной оценки реализует уточнение элементов матрицы B и вектора d на каждом шаге процедуры. Начальную матрицу B выберем единичной $B^0 = E$, а начальное положение вектора d определим как центр масс

$$d^0 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \, ,$$

где k — количество точек.

На $k+1$-м шаге процедуры формулы для определения B^{k+1} и d^{k+1} имеют вид

$$B^{k+1} = B^k + \lambda_1^{k+1} \nabla_B \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$

$$d^{k+1} = d^k + \lambda_2^{k+1} \nabla_d \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$

где λ_1^{k+1} и λ_2^{k+1} такие, что

$$B^{k+1}(\lambda_1^{k+1}) = d^k + (\alpha_i - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}), \alpha_i - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1})) < (B^k(\alpha_i - d^k), \alpha_i - d^k),$$

где $\bar{i} = \arg\max_i (B(\alpha_i - d), \alpha_i - d)$. $(B^j(\alpha - d^j), \alpha - d^j) < 1$.

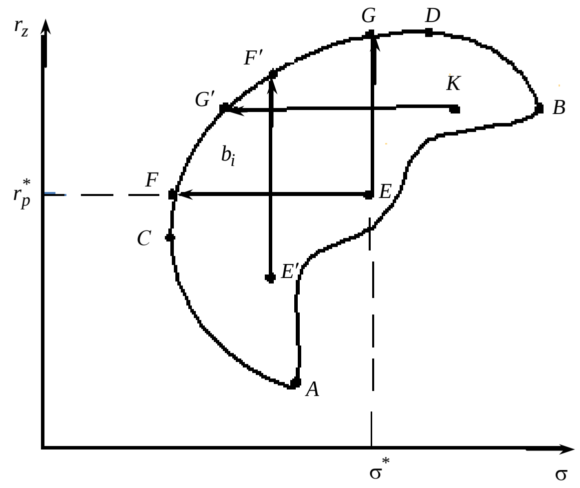
На границе сферы $S(1, d^j)$ с центром в точке d^j (j — номер шага процедуры такой, что $(B^j(p - d^j), p - d^j) < 1$, сформируем произвольную δ — сетку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ с узлами y_i. В каждом узле с помощью описанного метода построения эллипсоида наименьшего объема вокруг заданных точек определяем гарантированную множественную оценку параметров.

Оптимизация портфеля с учетом второго критерия оптимальности в задаче (1)

Перейдем к следующей задаче общей постановки Г. Марковица об оптимизации риска оптимального по критерию ожидаемой рыночной стоимости портфеля акций. Для этого воспользуемся множествами допустимых и эффективных портфелей, соответствующих выбранному набору акций [1, 2].

Процедура оптимизации риска для оптимального по ожидаемой рыночной стоимости портфеля состоит в выборе на каждом шаге допустимых портфелей, лежащих на прямой EF (рисунок). Эта линия соединяет точку E, которая соответствует оптимальному по ожидаемой рыночной стоимости портфелю с точкой F, принадлежащей эффективному множеству. Прямая EF параллельна оси риска портфелей σ. Особенностью такого выбора оптимального портфеля есть то, что на этой линии, согласно определению, каждому из портфелей соответствует одна и та же ожидаемая рыночная стоимость, но риск уменьшается в направлении оси r_p. Такое свойство допустимого множества портфелей инвестиций позволяет, с одной стороны, учитывать ограничения (2), а с другой — определить портфель «оптимальной» ожидаемой рыночной стоимости с меньшим риском.

 ISSN 0572-2691



Если же рассчитанный портфель находится в точке E', т.е. такой, для которого нет возможности уменьшить риск согласно предложенному выше правилу, то «оптимальный портфель» определяем, переместив его из точки E' в точку F', которая является элементом эффективного множества портфелей. Фактически это означает определение портфеля акций с большей ожидаемой рыночной стоимостью. Вместе с тем такая процедура позволяет конструктивно учитывать существующие инструментальные ограничения (2) при диверсификации портфеля.

Другая математическая постановка задачи об оптимизации желаемой рыночной стоимости $r_p(T)$ портфеля инвестиций при определенном на момент времени T уровне его риска τ может быть записана так:

$$\left\{\begin{array}{l} r^{\mathrm{T}}(T)x(T) \to \max\limits_{x} \\ x^{\mathrm{T}}(T)Vx(T) = \tau \\ I^{\mathrm{T}}x(T) = 1 \\ x_i(t) \ge 0,\ \ i = \overline{1,n},\ \ t \in [t_0, T] \\ x_i(t) \in X(t), i = \overline{1,n}, t \in [t_0, T] \end{array}\right\}.$$

Процедура оптимизации ожидаемой рыночной стоимости r_p портфеля для определенного уровня его риска τ состоит в выборе на каждом шаге допустимых портфелей, которые находятся на прямой EG, которая соединяет точку E, соответствующую оптимальному по ожидаемой рыночной стоимости расчетному портфелю инвестиций, и точку G, принадлежащую эффективному множеству. Эта прямая параллельна оси ожидаемой рыночной стоимости r_p. Особенность такого выбора оптимального портфеля заключается в том, что на этой прямой согласно определению каждому из портфелей соответствует один и тот же риск, хотя ожидаемая рыночная стоимость r_p увеличивается. Это свойство допустимого множества портфелей инвестиций, как и в предыдущем случае, позволяет, с одной стороны, учесть ограничения, а с другой — определить портфель с «оптимальным» риском и большей ожидаемой рыночной стоимостью.

Если построенный портфель находится в точке K, т.е. для него нет возможности увеличить ожидаемую рыночную стоимость согласно предложенному выше правилу, то «оптимальный портфель» определим, переместив его из точки K в точку $G^{'}$, которая является элементом эффективного множества портфелей. Фактически это означает уменьшение риска портфеля акций. Эффективное множество или множество эффективных портфелей на рисунке находится на дуге CD, оно является множеством Парето [1] для необходимого набора акций на рынке.

Заключение

В настоящей работе сформулированы новые постановки математических задач и построены конструктивные алгоритмы решения проблемы диверсификации портфеля рисковых активов. Задача оптимальной диверсификации портфеля сформулирована на основе моделей формирования динамики рыночной стоимости одной акции (4) и портфеля акций (5). Такая постановка дает возможность, применяя допустимое и эффективное множества, конструктивно решать задачу оптимальной диверсификации портфеля акций, учитывая количественные и качественные ограничения на структуру портфеля. Алгоритмы такого типа часто применяют при проектировании торговых роботов.

Ф.Г. Гаращенко, В.Р. Кулян, В.М. Петрович, О.О. Юнькова

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ РИЗИКОВАНИХ АКТИВІВ

Сформульовано нові постановки математичних задач та розроблено конструктивні алгоритми розв'язання проблеми диверсифікації портфеля ризикованих активів. Задачу оптимальної диверсифікації портфеля сформульовано на основі моделей динаміки формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. Така постановка дає можливість, застосовуючи допустиму та ефективну множини, конструктивно розв'язувати задачу оптимальної диверсифікації портфеля акцій, враховуючи кількісні та якісні обмеження на структуру портфеля. Алгоритми такого типу часто застосовують при проектуванні торгових роботів.

F.G. Garashchenko, V.R. Kulian, V.N. Petrovich, E.A. Yun'kova

ALGORITHM FOR SOLVING TWO-CRITERIA PROBLEM OF OPTIMAL PORTFOLIO OF RISKY ASSETS

New mathematical problems statements are formulated and constructive algorithms for solving diversification problem of risky assets portfolio are developed. The optimal portfolio diversification problem is formulated on the basis of the models of the market value of one share and portfolio of shares. Such a statement enables, by applying the allowable and effective sets, to solve the problem of optimal portfolio diversification, constructively taking into account quantitative and qualitative constraints on the portfolio structure. Algorithms of this type are often used when designing trading robots.

1. *Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джеффри В.* Инвестиции. — М.: Инфра-М, 1999. — 1027 с.
2. *Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В.* Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента // Кибернетика и вычислительная техника. — 2005. — № 148. — С. 3–10.
3. *Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Петрович В.Н., Юнькова Е.А.* Моделирование динамики и диверсификация портфеля акций // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 4. — С. 124–136.
4. *Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Юнькова О.О.* Ідентифікація параметрів динаміки ринкових активів // Системні дослідження і інформаційні технології. — 2015. — № 2. — С. 72–83.

Получено 14.02.2018