

УДК 629.7.076.6

*Б.Н. Кифоренко, И.Ю. Васильев, Я.В. Ткаченко*

**ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
ДРОССЕЛИРУЕМЫХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ  
МАЛОЙ ТЯГИ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ  
ОКОЛОЗЕМНЫХ ОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ**

**Введение**

Идеи использования электрических ракетных двигателей (ЭРД) в качестве движителей космических летательных аппаратов стали известны в начале прошлого столетия. Преимущество таких двигателей по сравнению с химическими тепловыми ракетными двигателями определяется существенно меньшим расходом массы отбрасываемого рабочего тела на единицу силы тяги, поскольку сила тяги ракетного двигателя в вакууме равна расходу, умноженному на эффективную скорость реактивной струи [1], которая у ЭРД в 5–20 раз выше, чем у химических двигателей. Однако современный уровень практической реализации физических принципов генерации тяги ЭРД дает возможность получить такие уровни реактивного ускорения оснащенных ими космических аппаратов, которые существенно ниже, чем гравитационное ускорение в околоземном пространстве. Это обстоятельство объясняет принятое в современной механике космического полета наименование ЭРД — двигатели малой тяги. Однако, в отличие от тепловых двигателей, они обладают практически неограниченным ресурсом рабочего времени. Сочетание этих конструктивных особенностей дает возможность выполнять необходимые маневры со значительно большими полезными нагрузками, хотя и за более длительное время.

Отличительная особенность ЭРД, существенная для механики полета, — возможность изменения величин тяги, расхода рабочего вещества и скорости реактивной струи в широком диапазоне. Это свойство позволило использовать для теоретических оценок их эффективности упрощенную математическую модель двигателей, в которой указанные управляющие функции считаются неограниченными сверху — идеально регулируемый двигатель ограниченной мощности. Для большинства практически интересных задач степень дросселирования тяги оказывается достаточно высокой [1]. Необходимость учета свойств реальных двигателей стимулировала проведение исследований с использованием модели регулируемого двигателя постоянной тяги.

В настоящей работе приведены результаты исследования проблем механики космического полета с малой тягой с более реалистичным представлением о степени регулируемости управляющих параметров ЭРД: допускается изменение величины тяги двигателя от нуля до максимального значения, характерного для конкретного двигателя.

© Б.Н. КИФОРЕНКО, И.Ю. ВАСИЛЬЕВ, Я.В. ТКАЧЕНКО, 2018

Эффективность использования режима дросселирования тяги анализируется на примере выполнения классического околоземного маневра космического аппарата (КА) малой тяги, а именно, перелета со стартовой околоземной орбиты на геостационарную. Для сравнения с двигателем дросселируемой тяги выбраны двигатель постоянной тяги и идеально регулируемый двигатель постоянной мощности [1].

### 1. Постановка задачи о выполнении заданного динамического маневра с дросселируемым двигателем

В общем случае система дифференциальных уравнений, описывающая движение КА малой тяги в поле действия центральной ньютоновской силы притяжения, имеет следующий вид [2]:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \exp(\chi) F_{jk} w e_k, & j = \overline{1, 5}, k = \overline{1, 3}, \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \exp(\chi) F_{6k} w e_k, \\ \frac{dm}{dt} = -q. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{x} = (\chi, h, k, p, q)$  — вектор равноденственных переменных, определяющих оскулирующую орбиту КА, рассматриваемого как материальная точка,  $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$  — орт реактивной тяги аппарата в проекциях на радиальное, трансверсальное и нормальное к плоскости оскулирующей орбиты направления,  $w$  — величина реактивного ускорения ракетного двигателя КА,  $F$  — величина эксцентрисической аномалии, определяющая его текущее положение на оскулирующем эллипсе,  $m$  — текущая масса аппарата,  $q$  — секундный массовый расход рабочего тела ракетного двигателя. Предполагается, что функциональные зависимости  $F_{jk}(\vec{x}, F)$ ,  $F_{60}(\vec{x}, F)$  заданы аналогично тому, как это сделано в работе [2]. Система (1) безразмерна традиционным в механике космического полета с малой тягой способом [1], кроме того, выполнено соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Возможность дросселирования ракетного двигателя, т.е. изменения величины тяги от нулевого до максимально возможного значения  $P_0$ , предполагает введение новой скалярной управляющей функции  $u(t)$ , принимающей значения из интервала  $[0, 1]$ , при этом текущая тяга записывается в виде

$$P(t) = P_0 u(t). \quad (2)$$

Использование ограничения, накладываемого предположением о постоянстве мощности ракетного двигателя, позволяет с учетом (2) представить величины реактивного ускорения и секундного массового расхода в уравнениях (1) в виде

$$\begin{cases} w(t) = p_0 u / m, & q(t) = \mu u^2, \\ P_0 = p_0 P_*, & \mu = P_0^2 / 2N_0 Q_*. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $P_*$  и  $Q_*$  — масштабирующие коэффициенты величин тяги и расхода рабочего тела, выбранные в соответствии с классической нормировкой [1],  $N_0$  — заданная постоянная мощность реактивной струи ракетного двигателя.

С учетом соотношений (2), (3) система (1), описывающая динамику движения КА малой тяги с дросселируемым ракетным двигателем постоянной мощности, преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \exp(\chi) F_{jk} e_k p_0 u / m, \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \exp(\chi) F_{6k} e_k p_0 u / m, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}, \\ \frac{dm}{dt} = -\mu u^2. \end{cases} \quad (4)$$

Текущая масса аппарата  $m(t)$  по предположению состоит из массы полезной нагрузки  $m_\pi$ , массы ракетного двигателя малой тяги  $m_\chi$  и текущего запаса рабочего тела двигателя  $m_\mu$ :

$$m(t) = m_\mu(t) + m_\chi + m_\pi. \quad (5)$$

При этом масса ракетного двигателя КА линейно зависит от фиксированной при постановке величины максимальной мощности движителя  $n_0$  [1] и ввиду того, что удельная масса двигателя  $\alpha$  также считается заданной, является фиксированной величиной

$$m_\chi = \alpha n_0. \quad (6)$$

Задача оптимального управления типа Майера о выполнении заданного динамического маневра КА, оснащенного дросселируемым ракетным двигателем, формулируется следующим образом: необходимо определить орт направления реактивной тяги аппарата  $\vec{e}(t)$  и коэффициент дросселирования величины тяги  $u(t)$ , обеспечивающие перелет между заданными орбитами в центральном ньютоновском гравитационном поле с максимальным значением конечной массы аппарата  $m_f$  при фиксированных величинах начальной массы  $m_0$ , тяги и мощности ракетного двигателя  $p_0$ ,  $n_0$ , удельной массы двигателя  $\alpha$  и заданного времени выполнения динамического маневра  $T$ .

Предполагается, что положение КА на начальной и конечной орбитах не фиксируются, что соответствует произвольному выбору значений  $F_0$  и  $F_f$ . Краевые условия маневра заданы следующим образом:

$$t_0 = 0, \quad x_j = x_{j0}, \quad m(t_0) = m_0 = \text{fix}, \quad t_f = T, \quad x_j = x_{jf}, \quad m_f \rightarrow \max. \quad (7)$$

Отметим, что выбор величины конечной массы КА в качестве критерия качества выполнения динамического маневра в выбранной постановке ( $m_\chi = \text{fix}$ ) эквивалентен более привычному при формулировке основной задачи механики космического полета с малой тягой требованию обеспечения максимального значения массы полезной нагрузки  $m_\pi$  либо минимального значения запаса рабочего вещества ракетного двигателя на выполнение маневра  $m_\mu^0$ .

## 2. Анализ оптимального управления дросселируемым ракетным двигателем малой тяги.

Анализ оптимального управления в задаче Майера (4)–(7) проведем с использованием принципа максимума Понтрягина.

Следуя процедуре принципа, составим гамильтониан задачи в виде

$$H = \exp(\chi) \frac{P_0 u}{m} \lambda_{vk} e_k - \lambda_m \mu u^2 + \lambda_F F_{60}, \quad (8)$$

где введено обозначение  $\lambda_{vk} = \lambda_j F_{jk} + \lambda_F F_{6k}$ ,  $j = \overline{1, 5}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , и  $\lambda_j, \lambda_F, \lambda_m$  суть присоединенные переменные задачи.

Оптимальные значения направляющих косинусов  $e_k$  должны обеспечивать максимальное значение гамильтониана (8). Для этого необходимо выполнение следующих соотношений:

$$e_k^{opt} = \lambda_{vk} / \lambda_v, \quad \lambda_v = \sqrt{\lambda_{v1}^2 + \lambda_{v2}^2 + \lambda_{v3}^2} \quad (k = \overline{1, 3}). \quad (9)$$

Оптимальные значения коэффициента дросселирования тяги  $u_{opt}(t)$  определяются из условия  $\partial H(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{e}, u) / \partial u = 0$ :

$$u_{opt}(t) = \begin{cases} 1, & \tilde{u} > 1, \\ \tilde{u}, & 0 < \tilde{u} < 1, \quad \tilde{u} = 1/2 \exp(\chi) \lambda_v P_0 / \lambda_m \mu m, \\ 0, & \tilde{u} \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, значение гамильтониана (8) с учетом соотношений (9), (10) записывается в виде

$$H(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{e}_{opt}, u_{opt}) = H^* = \exp(\chi) \lambda_v \frac{P_0 u_{opt}}{m} - \lambda_m \mu u_{opt}^2 + \lambda_F F_{60}. \quad (11)$$

В силу автономности системы (4) и условий трансверсальности вдоль всей оптимальной траектории гамильтониан (11) постоянен и сохраняет положительный знак

$$H^* = \text{const} > 0. \quad (12)$$

Присоединенные переменные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_\chi}{dt} = 3\lambda_6 F_{60} - \exp(\chi) \lambda_v \frac{P_0 u_{opt}}{m}, \\ \frac{d\lambda_h}{dt} = \lambda_6 F_{60} \left( \frac{3h}{1-h^2-k^2} - \frac{\sin F}{\bar{r}} \right) - \frac{P_0 u_{opt}}{2m\lambda_v} \exp(\chi) \lambda_i \lambda_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial h}, \\ \frac{d\lambda_k}{dt} = \lambda_6 F_{60} \left( \frac{3k}{1-h^2-k^2} - \frac{\cos F}{\bar{r}} \right) - \frac{P_0 u_{opt}}{2m\lambda_v} \exp(\chi) \lambda_i \lambda_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial k}, \\ \frac{d\lambda_p}{dt} = -\frac{P_0 u_{opt}}{2m\lambda_v} \exp(\chi) \lambda_i \lambda_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial p}, \\ \frac{d\lambda_q}{dt} = -\frac{P_0 u_{opt}}{2m\lambda_v} \exp(\chi) \lambda_i \lambda_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial q}, \\ \frac{d\lambda_6}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial F}, \\ \frac{d\lambda_m}{dt} = \exp(\chi) \lambda_v \frac{P_0 u_{opt}}{m^2}, \quad (i, j = \overline{1, 6}). \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $\bar{r} = 1 - h \sin F - k \cos F$ ,  $f_{ij} = F_{ik} F_{jk}$ ,  $(i, j = \overline{1, 6}, k = \overline{1, 3})$ .

С учетом (9), (10) точные уравнения оптимального движения записываются так:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\exp(\chi) p_0 u_{\text{opt}}}{\lambda_{\nu m}} \lambda_i f_{ji}, \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \frac{\exp(\chi) p_0 u_{\text{opt}}}{\lambda_{\nu m}} \lambda_i f_{6i}, \\ \frac{dm}{dt} = -\mu u_{\text{opt}}^2, \quad i = \overline{1, 6}, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}. \end{cases} \quad (14)$$

Входящие в систему (14) сопряженные функции задачи определяются уравнениями (13), которые, как отмечено в работе [2], помимо (12) имеют еще три первых интеграла:

$$\begin{aligned} \lambda_h k - \lambda_k h + \lambda_F &= \frac{2}{1+p^2+q^2} \left[ \frac{1}{2} C_2 (1-p^2-q^2) + C_3 p - C_4 q \right], \\ \lambda_p p + \lambda_q q &= \frac{2}{1+p^2+q^2} [C_3 q + C_4 p], \\ \lambda_h k - \lambda_k h + \lambda_F + \lambda_p q - \lambda_q p &= C_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $C_2, C_3, C_4$  — произвольные константы.

В число необходимых условий для оптимальности в задаче Майера (4)–(7) входят также условия трансверсальности для сопряженных функций  $\lambda_F, \lambda_m$  в форме Летова [4]:

$$\lambda_F(0) = \lambda_F(T) = 0, \quad \lambda_m(T) = 1. \quad (16)$$

### 3. Результаты численного анализа

Исследование эффективности использования дросселируемых ракетных двигателей малой тяги для выполнения межорбитальных околоземных перелетов целесообразно, на наш взгляд, начать с сопоставления таковых с идеальными двигателями ограниченной мощности, концепция которых, как известно [1], предполагает верхнюю оценку эффективности максимизации полезной нагрузки КА при заданных значениях его начальной массы  $m_0$  и удельной массы двигателя  $\alpha$ . В качестве динамического маневра рассматривался перелет КА малой тяги на геостационарную орбиту радиуса 42160 км со стартовой вытянутой эллиптической орбиты, имеющей следующие параметры: радиус апогея — 60000 км, перигея — 30000 км, эксцентриситет — 1/3, наклонение орбиты —  $15^\circ$ , при нулевых значениях аргумента перицентра и долготы восходящего узла. Параметры ракетной двигательной установки малой тяги частично заимствованы из работы [5]: максимальная тяга —  $P_0 = 0,16$  Н, скорость истечения реактивной струи —  $V_i = 14,71$  км/с, мощность двигателя —  $N_0 = P_0 V_i / 2 = 1,1768$  кВт соответственно. Начальная масса аппарата  $M_0$  принималась равной 750 кг, удельная масса двигателя — 10 кг/кВт, при этом масса двигательной установки  $m_\chi = M_\chi / M_0$  в случае постоянной и дросселируемой тяги является постоянной величиной, равной 0,0157. Отметим, что для идеального двигателя оптимальная величина массы двигателя зависит от длительности перелета и таким образом не является фиксированной [1].

Численное решение задачи для указанного динамического маневра на быстрое действие с использованием двигателя постоянной тяги проиллюстрировано на

рис. 1–3, где представлены зависимости нескольких элементов оскулирующих орбит как функций текущего времени оптимального перелета.

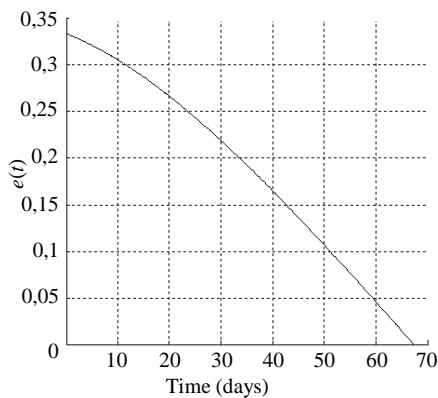


Рис. 1

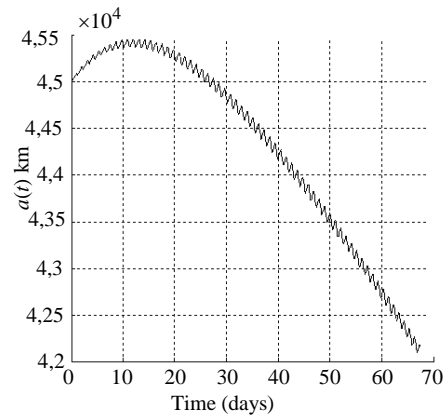


Рис. 2

Время быстрого действия  $T_f^{\min}$  при этом оказалось равным 67,4145 сут, конечная масса аппарата  $m_f$  (в долях начальной массы  $m_0$ ) — 0,9155.

Для набора фиксированных времен выполнения заданного динамического маневра, превышающих  $T_f^{\min}$ , а именно,  $T_f = \{67,42, 68, 70, 100, 150, 200, 300, 500\}$  сут, в ходе численного решения краевой задачи (7), (12)–(16) были определены величины оптимальных значений массы полезной нагрузки и

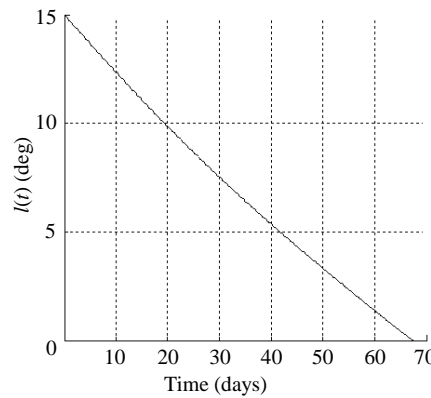


Рис. 3

конечной массы аппарата, оснащенного ракетным двигателем постоянной мощности, допускающим дросселирование величины тяги. Соответствующие данные для перелетов с идеальным двигателем ограниченной мощности получены аналитическим решением задачи, к которой может быть сведена исходная оптимизационная задача для заданного маневра КА методом усреднения [6]. Результаты сравнительного анализа эффективности двух рассматриваемых типов двигательных систем приведены на рис. 4–6.

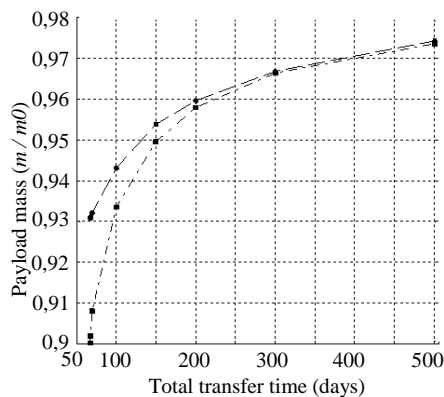


Рис. 4

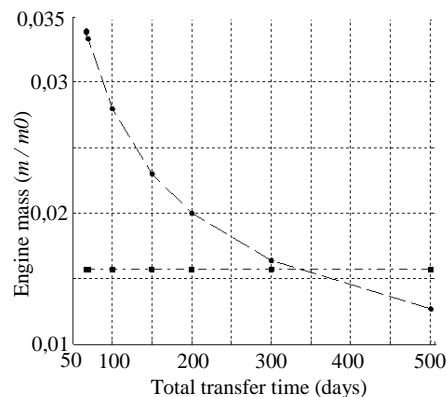


Рис. 5

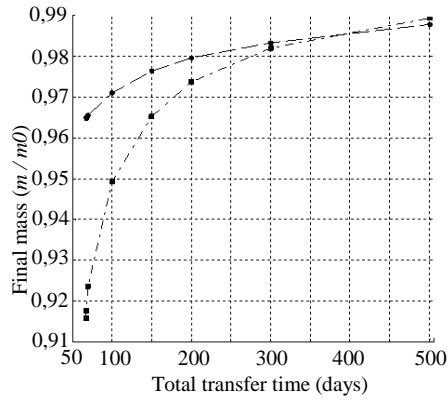


Рис. 6

«сухая» масса аппарата с дросселируемым двигателем может превышать ту же массу в случае идеального двигателя (см. рис. 6), что вызвано увеличением массы двигателя (см. рис. 5).

Определенный интерес, на наш взгляд, также вызывают результаты качественного анализа оптимальных управлений дросселируемого ракетного двигателя, полученных в ходе численного решения указанной оптимизационной задачи для различных фиксированных длительностей межорбитального перелета. Некоторые из них представлены на рис. 7–12.

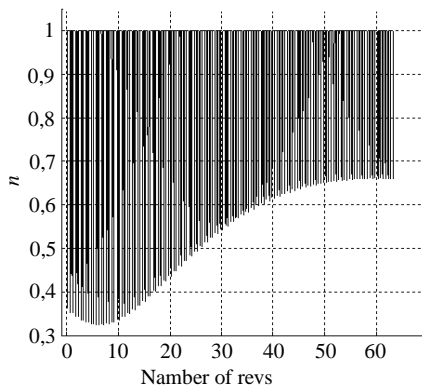


Рис. 7

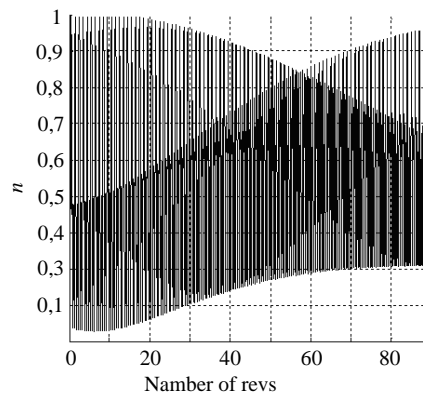


Рис. 8

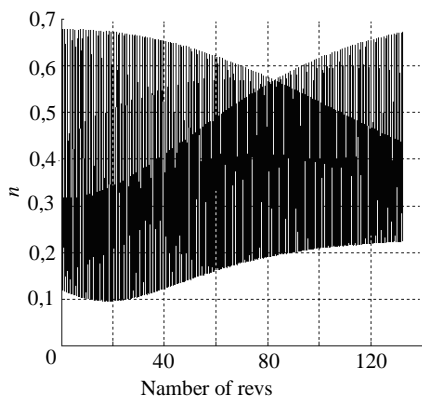


Рис. 9

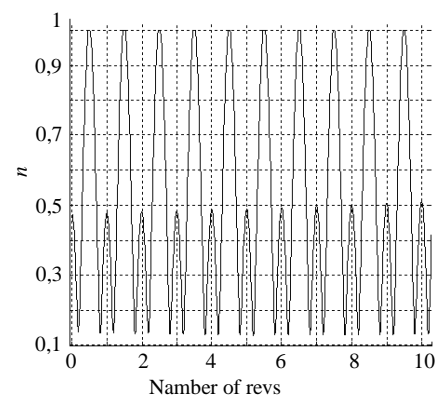


Рис. 10

Как и следовало ожидать, использование идеального двигателя всегда эффективнее в смысле максимума полезной нагрузки, однако этот выигрыш, будучи значительным для длительностей перелета вблизи времени быстрого действия  $T_f^{\min}$ , с увеличением  $T_f$  постепенно уменьшается до несущественных величин (см. рис. 4). При этом указанный выигрыш, как видно из рис. 5, достигается за счет изменения массы (а значит, и мощности) идеального двигателя. Интересно, что

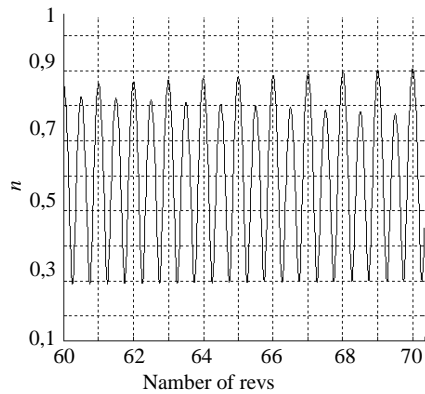


Рис. 11

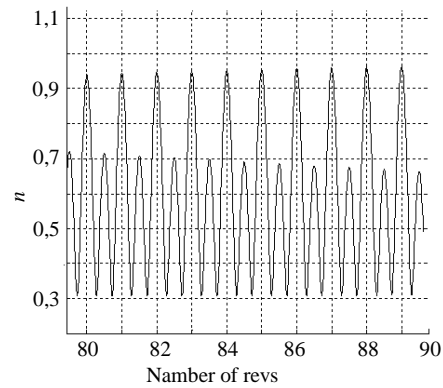


Рис. 12

Как видно из приведенных зависимостей, для малых длительностей перелета характерен выход величины коэффициента дросселирования тяги  $u(t)$  на верхнее ограничение на каждом обороте вдоль всей оптимальной траектории (см. рис. 7). С увеличением длительности выход на ограничение происходит только на начальном участке траектории, а затем и вовсе не имеет места (см. рис. 8, 9). Кроме того, структура оптимального управления для выбранного динамического маневра такова, что для всех рассмотренных в данной работе времен выполнения межорбитального перелета на каждом обороте локальные максимумы тяги достигаются вблизи апогея и перигея оскулирующего эллипса, при этом преобладание в начале траектории апогейных участков постепенно сменяется к концу траектории преобладанием перигейных (см. рис. 10–12).

### Заключение

Для получения первоначальных оценок эффективности изменения величины тяги ракетной двигательной системы КА была построена математическая модель дросселируемого двигателя малой тяги, протестированная на решении оптимизационной задачи о межорбитальном околоземном перелете аппарата с максимальной полезной нагрузкой. Используя формализм принципа максимума Понтрягина, проанализировано оптимальное управление в задаче типа Майера, позволившее путем сведения исходной оптимизационной задачи к двухточечной краевой задаче для системы оптимального движения КА получить численное решение модельной задачи о выполнении перелета с вытянутой эллиптической орбиты на геостационарную с использованием ракетного двигателя малой тяги, допускающего ее дросселирование. Режим дросселирования сравнивался по эффективности с режимом использования идеального двигателя ограниченной мощности, концепция которого предполагает обеспечение максимума полезной нагрузки при заданной начальной массе КА и удельной массе движителя. Результаты численного эксперимента подтвердили адекватность построенной математической модели дросселируемого двигателя и позволили провести качественный анализ оптимальных управлений вдоль переходных траекторий межорбитальных околопланетных переходов.

Стоит особо отметить, что успешность в сходимости численного решения как для дросселируемого, так и идеального двигателей в значительной степени обеспечена использованием методики получения аналитических решений указанной краевой задачи в осредненной постановке, которая разрабатывается авторами на протяжении ряда лет [2, 3, 6].



*Б.М. Кіфоренко, І.Ю. Васильєв, Я.В. Ткаченко*

## ЭФЕКТИВНІСТЬ ВИКОРИСТАННЯ РАКЕТНИХ ДВИГУНІВ МАЛОЇ ТЯГИ З МОЖЛИВІСТЮ ДРОСЕЛЮВАННЯ ПІД ЧАС ВИКОНАННЯ НАВКОЛОЗЕМНИХ ОРБІТАЛЬНИХ ПЕРЕЛІТІВ

Досліджено керування рухом космічного апарата (КА) з дроселюючим електричним ракетним двигуном (ЕРД) постійної потужності, що забезпечує доставку максимального корисного вантажу при виконанні заданого міжорбітального переходу в центральному ньютонівському гравітаційному полі за фіксований час. Ефективність оптимального керування порівнюється з результатами розрахунків, отриманих з використанням класичної математичної моделі ідеально регульованого ЕРД. Результати отримано в модельній задачі про переліт КА з низької навколоземної орбіти на геостационарну. Вони підтвердили адекватність побудованої математичної моделі дроселюючими ЕРД і дозволили виявити ряд суттєвих особливостей оптимальних траєкторій.

*B.N. Kiforenko, I.Yu. Vasiliev, Ya.V. Tkachenko*

## EFFICIENCY OF USING LOW THRUST THROTTLEABLE ROCKET ENGINES FOR CARRYING OUT NEAR-EARTH ORBIT TRANSFERS

A study of the motion control of a spacecraft with a throttled electric rocket engine (ERE) of constant power providing the delivery of the maximum payload while performing a given interorbital transfer in a central Newtonian gravitational field for a fixed time has been carried out. The efficiency of the optimal control is compared with the results of calculations obtained using the classical mathematical model of an ideally controlled ERE. The results obtained in the model problem on the flight of spacecraft from low Earth orbit to the geostationary site confirmed the adequacy of the constructed mathematical model of the throttled rocket engine and made it possible to identify a number of qualitative features of the optimal trajectories.

1. Гроздовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. — М.: Наука, 1975, — 700 с.
2. Кифоренко Б.Н., Пасечник З.В., Васильев И.Ю. Использование равноденственных орбитальных элементов как переменных в задаче быстрогодействия при межорбитальном переходе с постоянной по величине тягой в сильном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 4. — С. 102–114.
3. Кифоренко Б.Н., Пасечник З.В., Васильев И.Ю. Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Там же. — 2001. — № 6. — С. 62–76.
4. Летов А.М. Динамика полета и управления. — М.: Наука, 1969. — 360 с.
5. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. — 2004. — 42, № 3. — С. 260–279.
6. Кифоренко Б.Н., Пасечник З.В., Васильев И.Ю. Аналитические решения усредненных уравнений оптимального межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном гравитационном поле // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2002. — № 2. — С. 126–139.

*Получено 10.04.2018*