УДК 517.5

Т.В. Жигалло

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ, ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА–ЧЕБЫШЕВА

Введение

В последнее время в теории приближений повышенный интерес вызывают два типа задач. Первый тип — это задачи, возникающие на стыке теории приближений с другими областями математики (теория чисел и комбинаторика, математическое моделирование и прогнозирование сложных систем). К другому типу относятся задачи, которые продиктованы приложениями теории приближений в теории хранения, передачи и поиска информации (глобальные поисковые системы в Интернете), в теории прогнозирования и принятия решений, конфликтно-управляемых процессов и др. Потребность решения этих задач стимулирует дальнейшее развитие как классических методов теории приближений (алгебраическими и тригонометрическими полиномами), так и тех, которые используют разложения по другим системам функций. Перспективность применения метода приближения с помощью гармонических и бигармонических интегралов Пуассона–Чебышева в решении вышеуказанных задач обусловлена тем, что этот способ аппроксимации имеет существенное преимущество перед другими по точности приближения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим класс $Lip\alpha$ (см., например, [1, с. 623]) функций f, заданных на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяющих на этом отрезке условию Липшица порядка $\alpha, 0<\alpha\le 1,$ т.е.

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le |x_1-x_2|^{\alpha}\ \forall x_1, x_2\in[-1,1]. \tag{1}$$

Пусть $\hat{T}_0(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}, \hat{T}_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos k\arccos x,\ k\in N,$ — ортонормированная с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1,1]$ система полиномов Чебышева первого рода. Для каждой непрерывной функции f обозначим $c_k=c_k(f)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ последовательность коэффициентов Фурье функции f по системе $\hat{T}_k(x)$ (см., например, [2]). Бесконечный ряд $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_k\hat{T}_k$ называют рядом Фурье–Чебышева функции f. Как известно, $f\in Lip\alpha$ является функцией с конечным изменением и непрерывной на отрезке $[-1,1]$, а ряд Фурье–Чебышева такой функции сходится к f равномерно на этом отрезке.

Линейные методы суммирования рядов Фурье периодических функций, определяющиеся численными треугольными матрицами (методы Фурье, Фейера,

 ISSN 0572-2691

Валле–Пуссена, Зигмунда, Рогозинского и др.), имеют аналоги в случае суммирования рядов Фурье–Чебышева непериодических функций. Например, аналогом сумм Фурье $S_n(f;x)$ в алгебраическом случае являются суммы Фурье–Чебышева $S_n(f;x;T)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k\hat{T}_k$, аналогом сумм Фейера $\sigma_n(f;x)$ — суммы Фейера–Чебышева $\sigma_n(f;x;T)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x;T)$.

С помощью множества $\Lambda=\{\lambda_\rho(k)\}$ функций натурального аргумента, зависимых от действительного параметра ρ, $0\le\rho<1$, $\lambda_\rho(0)=1$, каждой непрерывной на $[-1,1]$ функции f сопоставим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_\rho(k)c_k\hat{T}_k(2),\ \ 0\le\rho<1. \tag{2}$$

Пусть ряд (2) при всех $0\le\rho<1$ является рядом Фурье–Чебышева некоторой непрерывной функции. Если $\lambda_\rho(k)=\rho^k$, $\rho=0,1,2,...$, то эту функцию будем обозначать $P_{1,\rho}(f;x;T)$ (см., например, [3]), в случае $\lambda_\rho(k)=\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k$, $-P_{2,\rho}(f;x;T)$ (см. [4]). Таким образом, функции $P_{i,\rho}(f;x;T)$, $i=1,2$, можно представить в виде

$$P_{i,\rho}=P_{i,\rho}(f;x;T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)(K_{i,\rho}(t+\arccos x)+K_{i,\rho}(t-\arccos x)dt. \tag{3}$$

При этом $K_{1,\rho}(\cdot)$ — гармоническое ядро Пуассона [5], т.е.

$$K_{1,\rho}(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos ku=\frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos u+\rho^2)^2},$$

а $K_{2,\rho}(\cdot)$ — бигармоническое ядро Пуассона [6] вида

$$K_{2,\rho}(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k\cos ku. \tag{4}$$

Поэтому по аналогии с периодическим случаем функции $P_{i,\rho}(f;x;T)$, $i=1,2$, будем называть соответственно гармоническим и бигармоническим интегралами Пуассона–Чебышева.

Работа посвящена изучению поведения величины

$$E(Lip\alpha;P_{i,\rho};x)=\sup_{f\in Lip\alpha}\left|f(x)-P_{i,\rho}(f;x;T)\right| \tag{5}$$

в каждой точке $x\in[-1,1]$ при $\rho\to1-$, $0<\alpha\le1$.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho)=\varphi(\rho;x)$ такова, что при $\rho\to1-$

$$E(Lip\alpha;P_{i,\rho};x)=\varphi(\rho;x)+o(\varphi(\rho;x)),\ \ x\in[-1,1],$$

то, следуя А.И. Степанцу [7, с. 198], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона–Чебышева $P_{i,\rho}(f;x;T)$ вида (3) на классе $Lip\alpha$, $0<\alpha\le1$.

Вопрос поведения верхних граней приближений на классах Липшица периодических функций гармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике исследовался в работах В.П. Натансона [8], А.Ф. Тимана [9], Э.Л. Штарка [10], В. А. Баскакова [11], Л. П. Фалалеева [12, 13] и др. [14–18]. Что же касается аппроксимативных свойств бигармонических интегралов Пуассона, то следует отметить работы С. Каниева [19], P. Pych [20], М. Ф. Тимана [21], Л. П. Фалалеева [22] и др. [23–29].

Возникновение и исследование задачи об асимптотическом поведении верхней грани приближения непериодических функций класса $Lip\alpha$, $0<\alpha\le 1$, заданных на конечном промежутке вещественной оси алгебраическими многочленами, обусловлено работой С. М. Никольского [30], в которой исследован вопрос о приближении функций класса $Lip1$ суммами Фурье–Чебышева $S_n(f;T;x)$. Позже А.Ф. Тиман получил [31] решение задачи Колмогорова–Никольского для сумм Фурье–Чебышева на классах $Lip\alpha$ при всех $0<\alpha\le 1$, а также установил асимптотическое при $n\to\infty$ равенство для величины $E(Lip\alpha;\sigma_n;x)$, $0<\alpha\le 1$, равномерно относительно x на отрезке $[-1,1]$. В работе И.М. Ганзбурга [32] для сумм Вале–Пуссена–Чебышева на класссах $Lip\alpha$ получены асимптотические оценки, из которых, как частные случаи, вытекают результаты С.М. Никольского и А.Ф. Тимана. В работе изучается непериодический случай, особенностью которого является то обстоятельство, что величина верхней грани (5) зависит от положения точки x на рассматриваемом отрезке.

В настоящее время значительное внимание исследователей уделяется игровым задачам управления в теории принятия решений [33, 34]. Интерес к такого вида содержательным задачам вызван, помимо прочего, использованием аппарата интерполяционных многочленов. Так, с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа–Сильвестра получены ответы на различные вопросы изучения процессов, функционирующих в условиях конфликта и неопределенности [35]. К решению такого рода задач также можно применить как вспомогательную математическую модель интерполяционные многочлены Пуассона–Чебышева. Это объясняется тем, что линейные процессы, построенные с помощью матриц $\Lambda=\{\lambda_\rho(k)\}$ соответственно на базе ряда Фурье–Чебышева функции f и интерполяционных многочленов Пуассона–Чебышева, совпадающих с f в нулях полиномов Чебышева $\hat{T}_k(x)$, исследуются в задачах теории аппроксимации параллельно.

2. Приближение функций класса Липшица интегралами Пуассона–Чебышева

Запишем интегральное представление для величины $E(Lip\alpha;P_{i,\rho};x)$, используя свойство положительности ядра $K_{i,\rho}(\cdot)$ и неравенство (1):

$$\left|f(x)-P_{i,\rho}(f;x;T)\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(\cos t)-f(\cos y))(K_{i,\rho}(\rho,t+y)+K_{i,\rho}(\rho,t-y))dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t-\cos y\right|^{\alpha}(K_{i,\rho}(\rho,t+y)+K_{i,\rho}(\rho,t-y))dt. \qquad (6)$$

 ISSN 0572-2691

Поскольку функция

$$f_0(u) = \begin{cases} (x-u)^{\alpha}, & -1 \le u \le x, \\ (u-x)^{\alpha}, & x \le u \le 1, \end{cases}$$

принадлежит классу $Lip\alpha,\ 0 < \alpha \le 1,$ и, как следует из (5),

$$E(Lip\alpha; P_{i,\rho}; x) \ge \left| f_0(x) - P_{i,\rho}(f_0; x; T) \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos t - \cos y\right|^{\alpha} (K_{i,\rho}(\rho, t+y) + K_{i,\rho}(\rho, t-y))dt, \qquad (7)$$

то из (6) и (7) получаем

$$E(Lip\alpha; P_{i,\rho}; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos t - \cos y\right|^{\alpha} (K_{i,\rho}(\rho, t+y) + K_{i,\rho}(\rho, t-y))dt,\ 0 < \alpha \le 1. \qquad (8)$$

Следующие утверждения устанавливают асимптотическое поведение величины (5), предоставляя решения задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона–Чебышева $P_{i,\rho}(f; x; T),\ \ i = 1, 2$ на классе $Lip\alpha,\ 0 < \alpha \le 1.$

Теорема 1. Для любого $\alpha \in (0,1)$ в каждой точке $x \in [-1, 1]$ при $\rho \to 1-$ справедливо равенство

$$E(Lip\alpha; P_{i,\rho}; x) = (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\varphi_i(\alpha) \sec\frac{\alpha\pi}{2}(1-\rho)^{\alpha} + O(\sigma(\rho,\alpha)) \right) + O(\omega_{\rho,\alpha}(x)), \qquad (9)$$

где $\varphi_i(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = 1, \\ 1-\alpha, & \text{если} \quad i = 2, \end{cases}$

$$\sigma(\rho,\alpha) = \begin{cases} (1-\rho)^{3\alpha}, & \alpha < \frac{1}{3}, \\ (1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}, & \alpha = \frac{1}{3}, \\ 1-\rho, & \alpha > \frac{1}{3} \end{cases} \quad \omega_{\rho,\alpha}(x) = \begin{cases} (1-\rho)^{2\alpha}\,|x|^{\alpha}, & \alpha < \frac{1}{2}, \\ (1-\rho)\sqrt{|x|}\ln\frac{1}{1-\rho}, & \alpha = \frac{1}{2}, \\ (1-\rho)\,|x|^{\alpha}, & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим

$$I_i(y,\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos t - \cos y\right|^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, t+y)dt. \qquad (10)$$

Поскольку подынтегральная функция в (10) периодическая, следовательно,

$$I_i(y,\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\frac{t-y}{2} \sin\frac{t+y}{2} \right|^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, t+y)dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin\frac{t}{2} \sin\frac{t-2y}{2} \right|^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, t)dt = \frac{2^{\alpha}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin t \sin(t-y)\right|^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin^2 t \cos y - \sin t \cos t \sin y \right|^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt. \tag{11}$$

Примем во внимание следующее соотношение:

$$\left| |u \pm v|^{\alpha} - |u|^{\alpha} \right| \le |v|^{\alpha}, \ \alpha \in (0,1]. \tag{12}$$

Тогда в силу (12) $I_i(y, \alpha)$ представим в виде

$$I_i(y, \alpha) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt +$$

$$+ O(1) \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} |\cos y|^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt, \tag{13}$$

а также первое слагаемое из правой части соотношения (13) запишем так:

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} \left| 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2} \right|^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt + (\sin y)^{\alpha} O(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{\alpha} K_{i,\rho}(\rho, 2t)dt. \tag{14}$$

Первый интеграл из правой части (14) достаточно оценить для случая $i = 2$, поскольку последний будет выражаться с помощью ядра $K_{1,\rho}(\rho, 2t)$. Действительно, принимая во внимание (4), получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} K_{2,\rho}(\rho, 2t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2) \right) \rho^k \cos 2kt \right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos 2kt \right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2}(1-\rho^2) \right) \rho^k \cos 2kt dt.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} K_{2,\rho}(\rho, 2t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} K_{1,\rho}(\rho, 2t)dt + \frac{1-\rho^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos 2kt dt. \tag{15}$$

Интегрируя частями во втором слагаемом из правой части (15), находим

$$\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \cos 2kt dt = -\frac{\alpha}{4}\rho(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} t \cos t \frac{\sin 2t}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} dt =$$

$$= -\alpha\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \cos^2 t K_{1,\rho}(\rho, 2t) dt. \tag{16}$$

Объединив (15) и (16), заключаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha K_{2,\rho}(\rho, 2t) dt =$$

$$= (1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^\alpha K_{1,\rho}(\rho, 2t) dt + \alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t \sin^2 t K_{1,\rho}(\rho, 2t) dt. \tag{17}$$

Оценим первый интеграл из правой части (17). Прежде всего отметим, что для произвольной непрерывной при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функции $f(t)$ справедливо равенство

$$\frac{f(\sin t)}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2 t} - \frac{f(t)}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} = O(1), \tag{18}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $0 \le \rho < 1$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. С учетом (18) находим

$$(1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t K_{1,\rho}(\rho, 2t) dt = (1-\alpha\rho)\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2 t} dt =$$

$$= \frac{1-\alpha\rho}{2}\frac{1+\rho}{(1-\rho)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\alpha}{1+\left(\frac{2\sqrt{\rho}t}{1-\rho}\right)^2} dt + O(1-\rho^2) =$$

$$= (1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt + O(1-\rho). \tag{19}$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\alpha\pi}{2},\ \alpha \in (0,1), \tag{20}$$

из (19) при $\rho \to 1-$ и $0 < \alpha < 1$ следует

$$(1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t K_{1,\rho}(\rho, 2t) dt = (1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\pi\sec\frac{\alpha\pi}{2} + O(1-\rho). \tag{21}$$

Введем обозначение

$$\tau(\rho) = (1-\rho)^{\alpha}((1-\alpha\rho)(1+\rho) - 2(1-\alpha)(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}).$$

Поскольку $\tau(\rho) = (1-\rho)^{\alpha}(-\alpha\rho - \alpha\rho^2 + 2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}) + (1-\rho)^{\alpha}(1+\rho-2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1})$ и при $\rho \to 1-$

$$(1-\rho)^{\alpha}(-\alpha\rho - \alpha\rho^2 + 2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}) = o(1-\rho), \quad (1-\rho)^{\alpha}(1+\rho-2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}) = o(1-\rho),$$

то $\tau(\rho) = o(1-\rho)$, $\rho \to 1-$. Исходя из (21) и того, что

$$(1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^{\alpha}}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\pi\sec\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{1-\alpha}{2^{\alpha+2}}\pi\sec\frac{\alpha\pi}{2}(1-\rho)^{\alpha} + \frac{\pi\sec\frac{\alpha\pi}{2}}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\tau(\rho),$$

при $\rho \to 1-$ получаем оценку первого слагаемого из правой части равенства (17):

$$(1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} tK_{1,\rho}(\rho, 2t)dt = \frac{1-\alpha}{2^{\alpha+2}}\pi\sec\frac{\alpha\pi}{2}(1-\rho)^{\alpha} + O(1-\rho). \tag{22}$$

Пользуясь соотношением (18), оценим второй интеграл из правой части (17):

$$\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\sin^2 tK_{1,\rho}(\rho, 2t)dt = \alpha\rho(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\alpha}t^2dt}{(1-\rho)^2+4\rho t^2} + O(1-\rho^2). \tag{23}$$

Итак,

$$\alpha\rho(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^{\alpha}t^2dt}{(1-\rho)^2+4\rho t^2} = \frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}\frac{t^{-\alpha}dt}{t^2(1+t^2)} <$$

$$< \frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}t^{-\alpha-2}dt = \frac{\alpha}{4(1+\alpha)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2). \tag{24}$$

Из (23) и (24) имеем

$$\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\sin^2 tK_{1,\rho}(\rho, 2t)dt = O(1-\rho), \ \rho \to 1-. \tag{25}$$

Обратим внимание, что рассуждения, приведенные для получения оценки (22), можно применить также для оценки первого интеграла из правой части (14) в случае $i=1$. Тогда получим оценку (22), но без множителя $1-\alpha$. Исходя из этого, а также учитывая (17), (22) и (25), получаем оценку первого слагаемого из правой части (14):

ISSN 0572-2691

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\alpha}K_{i,\rho}(\rho,2t)dt=\left(\sqrt{1-x^{2}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\varphi_{i}(\alpha)}{2}\sec\frac{\alpha\pi}{2}(1-\rho)^{\alpha}+O(1-\rho)\right), \quad (26)$$

где функция $\varphi_i(\alpha)$ определена в условии теоремы 1.

Второй интеграл из правой части (14) также оценим при $i=2.$ Поскольку

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^{2}\frac{t}{2}\right)^{\alpha}K_{2,\rho}(\rho,2t)dt<\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^{2}\frac{t}{2}\right)^{\alpha}K_{1,\rho}(\rho,2t)dt, \quad (27)$$

то, учитывая (18), имеем,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^{2}\frac{t}{2}\right)^{\alpha}K_{1,\rho}(\rho,2t)dt=\frac{1-\rho^{2}}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{t^{3}}{4}\right)^{\alpha}}{(1-\rho)^{2}+4\rho t^{2}}dt+O(1-\rho^{2})=$$

$$=\frac{(1-\rho^{2})(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}(2\sqrt{\rho})^{3\alpha+1}}\int_{0}^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}}\frac{t^{3\alpha}}{1+t^{2}}dt+O(1-\rho^{2}):=B(\alpha,\rho)+O(1-\rho^{2}). \quad (28)$$

При $\alpha<\frac{1}{3}$ для оценки $B(\alpha,\rho)$ воспользуемся формулой (20):

$$B(\alpha,\rho)<\frac{(1+\rho)(1-\rho)^{3\alpha}}{2^{2\alpha+2}(2\sqrt{\rho})^{3\alpha+1}}\frac{\pi}{\cos\frac{3\alpha}{2}\pi}. \quad (29)$$

Далее,

$$B\left(\frac{1}{3},\rho\right)=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{16\rho}(1-\rho^{2})\ln\frac{\sqrt{(1-\rho)^{2}+\pi^{2}\rho}}{1-\rho}. \quad (30)$$

При $\alpha>\frac{1}{3}$ заключаем, что

$$B(\alpha,\rho)<\frac{\pi^{3\alpha-1}}{2^{5\alpha+2}(3\alpha-1)}\frac{1-\rho^{2}}{\rho}. \quad (31)$$

Следовательно, согласно (27)–(31).

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^{2}\frac{t}{2}\right)^{\alpha}K_{2,\rho}(\rho,2t)dt=O(\sigma(\rho,\alpha)), \quad (32)$$

где величина $\sigma(\rho,\alpha)$ определена в условии теоремы 1.

Из (14), оценок (26) и (32) вытекает, что при $\rho\to 1-,\ \ 0<\alpha<1$:

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{\alpha}K_{i,\rho}(\rho,2t)dt=$$

$$= (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\varphi_i(\alpha)}{2} \sec \frac{\alpha\pi}{2} (1-\rho)^\alpha + O(\sigma(\rho, \alpha)) \right). \tag{33}$$

Оценим второй интеграл из правой части соотношения (13) для случая $i = 2$. Рассуждения, аналогичные, как при получении (27), приводят к оценке

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t K_{2,\,\rho}(\rho, 2t)dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t K_{1,\,\rho}(\rho, 2t)dt. \tag{34}$$

Кроме того, известна (см. [36, с. 141]) следующая оценка:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t K_{1,\,\rho}(\rho, 2t)dt = O(\omega_{\rho,\,\alpha}(x)), \tag{35}$$

где величина $\omega_{\rho,\,\alpha}(x)$ определена в условии теоремы 1. Из (13), (33)–(35) получаем оценку интеграла $I_i(y, \alpha)$ в случае $0 < \alpha < 1$:

$$I_i(y, \alpha) = (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\varphi_i(\alpha)}{2} \sec \frac{\alpha\pi}{2} (1-\rho)^\alpha + O(\sigma(\rho, \alpha)) \right) + O(\omega_{\rho,\,\alpha}(x)). \tag{36}$$

Рассуждая аналогично, как при получении (11), нетрудно убедиться, что

$$I_i(-y, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos t - \cos y\right|^\alpha K_{i,\,\rho}(\rho, t-y)dt =$$

$$= \frac{2^\alpha}{\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^2 t \cos y + \sin t \cos t \sin y\right|^\alpha K_{i,\,\rho}(\rho, 2t)dt.$$

Кроме того, в силу (12) для интеграла $I_i(-y, \alpha)$ имеет место равенство (13). Следовательно, для $I_i(-y, \alpha)$ верна оценка

$$I_i(-y, \alpha) = (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\varphi_i(\alpha)}{2} \sec \frac{\alpha\pi}{2} (1-\rho)^\alpha + O(\sigma(\rho, \alpha)) \right) + O(\omega_{\rho,\,\alpha}(x)). \tag{37}$$

Таким образом, из соотношений (8), (10), (36), (37) при $\rho \to 1-$ следует равенство (9).

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого $0 < \alpha < 1$ в каждой точке $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ при $\rho \to 1$ имеет место асимптотическое равенство

$$E(Lip\alpha; P_{i,\,\rho}; x) = (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_i(\alpha) \sec \frac{\alpha\pi}{2} (1-\rho)^\alpha + O(\omega_{\rho,\,\alpha}(x)).$$

Обратим внимание, что равенство (9) в случае гармонического интеграла Пуассона–Чебышева уточняет ранее известный результат Ю.И. Русецкого [36], указывая явный порядок остаточного члена, что обеспечивает желаемую точность приближения в прикладных задачах.

Теорема 2. В каждой точке $x \in [-1, 1]$ при $\rho \to 1-$ имеет место равенство

$$E(Lip1; P_{2,\,\rho}; x) = \frac{2}{\pi}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left(1-\rho + (1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} \right) + O\left((1-\rho)^2 \left(\sqrt{1-x^2} + |x| \right) \right). \tag{38}$$

 ISSN 0572-2691

Доказательство. Воспользуемся обозначением

$$I_2(y,1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t-\cos y\right|K_{2,\rho}(\rho,t+y)dt.$$

Тогда в силу (12) имеем

$$I_2(y,1)=\frac{4}{\pi}\sin y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tK_{2,\rho}(\rho,2t)dt+O(1)\frac{4}{\pi}\cos y\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tK_{2,\rho}(\rho,2t)dt. \qquad (39)$$

Представим первый интеграл из правой части (39) в следующем виде:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tK_{2,\rho}(\rho,2t)dt=$$
$$=\frac{(1-\rho^2)^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\left(\frac{1}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}+\frac{1-\rho^2}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}\right)dt. \qquad (40)$$

Поскольку

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos tdt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}=\frac{1}{8\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}=\frac{1}{4\rho}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho},$$

$$(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos tdt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}=\frac{1}{2(1-\rho)(1+\rho)},$$

то соотношение (40) примет вид

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tK_{2,\rho}(\rho,2t)dt=\frac{(1-\rho^2)^2}{16\rho}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}+\frac{1-\rho^2}{8}=$$
$$=\frac{1-\rho}{4\pi}+\frac{(1-\rho)^2}{4\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}+O((1-\rho)^2). \qquad (41)$$

Второй интеграл из правой части (39) представим так:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tK_{2,\rho}(\rho,2t)dt=\frac{(1-\rho^2)^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t(1-\rho\cos 2t)}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}dt=$$

$$=\frac{(1-\rho^2)^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 tdt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}+\frac{(1-\rho^2)^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 tdt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}. \qquad (42)$$

Применяя (18), оценим первый интеграл из правой части (42), тогда при $\rho \to 1-$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2 dt}{1+\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}t\right)^2} + O(1) =$$

$$= \frac{1}{(1-\rho)^2} \left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^3 \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^2 dt}{1+t^2} + O(1) = O(1).$$

Воспользуясь соотношением

$$\frac{\sin^2 t}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = -\frac{1}{4\rho}\left(\frac{(1-\rho)^2}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} - \frac{1}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}\right),$$

а также формулами 2.562.1 и 2.563.1 из [37], получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t dt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = \frac{\pi}{4(1+\rho)^3(1-\rho)}.$$

Таким образом, находим оценку второго интеграла из правой части (39):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t K_{2,\rho}(\rho, 2t)dt = O((1-\rho)^2). \tag{43}$$

Из соотношений (39), (41) и (43) следует оценка

$$I_2(y,1) = \frac{1}{\pi}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-\rho+(1-\rho)^2 \ln\frac{1}{1-\rho}\right) + O(1-\rho)^2\left(\sqrt{1-x^2}+|x|\right). \tag{44}$$

Так как для интеграла $I_2(-y,1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y| K_{2,\rho}(\rho, t-y)dt$ имеет место та же оценка, что и для интеграла $I_2(y,1)$, то из (8), (39) и (44) получаем равенство (38).

Теорема доказана.

Отметим, что в каждой точке $x \in (-1,1)$ при $\rho \to 1-$ равенство (38) асимптотическое.

Заключение

Основной результат данной работы состоит в нахождении асимптотических оценок — точных верхних граней приближений интегралами Пуассона–Чебышева на классах Липшица-функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси. Таким образом, решена одна из экстремальных задач теории аппроксимации функций действительного переменного. Разработанный метод аппроксимации непрерывных на отрезке функций с помощью интегралов Пуассона–Чебышева может применяться при решении задач аналитической обработки массивов числовых данных в математическом моделировании и перспективен при решении задач оптимального управления, построения численных алгоритмов, сжатия информации.

Т.В. Жигалло

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВІ ЛІПШИЦЯ НА СКІНЧЕННОМУ ВІДРІЗКУ ДІЙСНОЇ ОСІ, ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА–ЧЕБИШОВА

Досліджено апроксимативні властивості інтегралів Пуассона–Чебишова на класах функцій Ліпшиця, що задані на сегменті дійсної осі. Розв'язок даної проблеми застосовується в задачах теорії зберігання, передачі та пошуку інформації (глобальні пошукові системи в Інтернеті), в теорії прогнозування та прийняття рішень, конфліктно-керованих процесів та ін. Отримано асимптотичні оцінки точних верхніх меж відхилень функцій, що задовольняють умові Ліпшиця на скінченному відрізку дійсної осі, інтегралами Пуассона–Чебишова.

T.V. Zhyhallo

APPROXIMATION OF FUNCTIONS SATISFYING THE LIPSCHITZ CONDITION ON A FINITE SEGMENT OF THE REAL AXIS BY POISSON–CHEBYSHEV'S INTEGRALS

The investigation of approximate properties of Poisson–Chebyshev integrals on Lipschitz classes of functions defined on a segment of the real axis. The solution of this problem finds its application in the problems of the theory of storage, transmission and retrieval of information (global search engines on the Internet), in the theory of forecasting and decision making, conflict-controlled processes, etc. Here we find the asymptotic estimates for the upper bounds of deviations of functions satisfying the Lipschitz condition on a finite segment of the real axis from their Poisson–Chebyshev's integrals.

1. *Дзядык В.К.* О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию $\mathrm{Lip}\,\alpha\,(0<\alpha<1)$ на конечном отрезке вещественной оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1956. — **20**. — С. 623–642.
2. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева, — М. : Наука, 1983. — 384 с.
3. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals // Ukrainian Math. J. — 2002. — **54**, N 1. — P. 51–63.
4. *Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2007. — **59**, N 8. — P. 1224–1237.
5. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric // Ukrainian Math. J. — 2009. — **61**, N 12. — P. 1893–1914.
6. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2002. — **54**, N 9. — P. 1462–1470.
7. *Степанец А.И.* Методы теории приближения: В 2-х ч. — Киев : Ин-т математики НАН Украны, 2002. — Ч.1. — 427 с.
8. *Натансон В.П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Там же. — 1950. — **74**, № 2. — С. 11–14.
9. *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Там же. — 1950 — **74**, № 2. — С. 17–20.
10. *Штарк Э.Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона // Мат. заметки. — 1973. — **13**, № 1. — С. 21–28.

11. *Baskakov V.A.* Some properties of operators of Abel-Poisson type // Math. Notes. — 1975. — **17**, N 2. — P. 101–107.
12. *Falaleev L.P.* Approximation of conjugate functions by generalized Abel-Poisson operators // Math. Notes. — 2000. — **67**, N 4. — P. 505–511.
13. *Falaleev L.P.* On approximation of functions by generalized Abel-Poisson operators // Sib. Math. J. — 2001. — **42**, N 4. — P. 926–936.
14. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals // Ukrainian Math. J. — 2004. — **56**, N 9. — P. 1509–1525.
15. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of (ψ, β) — differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators // Ibid. — 2005. — **57**, N 8. — P. 1297–1315.
16. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals // Ibid. — 2009. — **61**, N 1. — P. 86–98.
17. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid. — 2009. — **61**, N 11. — P. 1757–1779.
18. *Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A.* Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C_\beta^\psi H^\alpha$ // Math. Notes. — 2014. — **96**, N 5. — P. 1008–1019.
19. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. — 1963. — **153**, № 5. — С. 995–998.
20. *Pych P.* On biharmonic function in unit disk // Ann. pol. math. — 1968. — **20**, N 3. — P. 203–213.
21. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Киев : Наук. думка, 2009. — 376 с.
22. *Фалалеев Л.П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения. Материалы всесоюз. симп. — Алма-Ата: Наука, 1976. — С. 163–167.
23. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* On the approximation of functions of the Holder class by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2000. — **52**, N 7. — P. 1113–1117.
24. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2009. — **61**, N 3. — P. 399–413.
25. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^\psi$ functions by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2011. — **63**, N 7. — P. 1083–1107.
26. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2012. — **63**, N 12. — P. 1820–1844.
27. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of function from class $\hat{C}_{\beta,\infty}^\psi$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric // Ibid. — 2008. — **60**, N 5. — P. 769–798.
28. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$ // Ibid. — 2017. — **69**, N 5. — P. 757–765.
29. *Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I.* Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_\beta^r H^\alpha$ // Ibid. — 2017. — **68**, N 11. — P. 1727–1740.
30. *Никольский С.М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **27**, № 4. — С. 295–318.
31. *Тиман А.Ф.* Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами // Там же. — 1951. — **77**, № 6 — С. 969–972.
32. *Ганзбург И.М.* Обобщение некоторых результатов С.М. Никольського и А.Ф. Тимана // Там же. — 1957. — **116**, № 5. — С. 727–729.
33. *Chikrii A.A.* An analytic method in dynamic pursuit games // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2010. — **271**. — P. 69–85.
34. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
35. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля // Там же. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
36. *Русецкий Ю.И.* О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля–Пуассона // Сибирский матем. журнал. — 1968. — **9**, № 1. — С. 136–144.
37. *Градштейн И.С, Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.

Получено 14.12.2017

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком НАН Украины А.А. Чикрием.