УДК 519.14+519.816

Н.К. Тимофеева

О МОДЕЛИРОВАНИИ СИММЕТРИИ В КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Введение

Симметрия в комбинаторной оптимизации проявляется в зависимости от структуры входных данных и способа моделирования целевой функции. Это свойство показано на примере подклассов разрешимых задач, в которых входные данные заданы прямыми и обратными функциями натурального аргумента. Для последовательности значений целевой функции, которые изменяются от максимума к минимуму в прямой задаче, существует симметричная последовательность решений для обратной, значения которых изменяются от минимума к максимуму. В основе этого свойства комбинаторной оптимизации лежит симметрия аргумента целевой функции (комбинаторных множеств и комбинаторных конфигураций).

Постановка задачи

Как правило, симметрию изучают в геометрии, но она проявляется также и в отношении негеометрических объектов в других областях математики и иных науках. В математике это свойство изучается с помощью теории групп. Достаточно основательно выделяют и исследуют группы симметрии на перестановках и графах, определяют их порядок [1–3]. В литературе рассматривают симметрии разбиения n-элементного множества на подмножества [1]. Эта комбинаторная конфигурация является аргументом целевой функции в различных задачах разбиения, в частности в задачах классификации и кластеризации. В оптимизации рассматривают такое свойство, как двойственность [4–7]. Когда двойственная задача оптимизации совпадает с начальной, то в задачах линейного программирования это называют симметричной двойственностью. Но природа данного свойства в литературе не исследуется. В комбинаторике симметрия присуща как комбинаторным конфигурациям, так и их множествам. В [8] описана симметрия комбинаторных множеств. Симметрия в комбинаторной оптимизации и способы ее выявления в литературе освещены недостаточно.

Предлагаемый подход

Для исследования целевой функции и выявления симметрии в комбинаторной оптимизации использованы подклассы разрешимых задач из разных классов с различной структурой входных данных. Анализируются задачи, входные данные в которых заданы прямыми и обратными функциями натурального аргумента, которые симметричны по отношению друг к другу. Также исследуется симметрия комбинаторной оптимизации для целевых функций, выражения которых сформулированы по-разному.

Общая математическая постановка задачи комбинаторной оптимизации

Задачи комбинаторной оптимизации, как правило, задаются на одном или нескольких множествах, например $A=\{a_1, ..., a_n\}$ и $B=\{b_1, ..., b_{\tilde{n}}\}$, элементы которых имеют различную природу [9]. Назовем эти множества базовыми. Имеется два типа задач. В первом типе каждое из этих множеств представлено в виде графа, вершинами которого являются его элементы, а каждому ребру поставлено в соответствие число $c_{lt} \in R$, которое называют весом ребра (R — множество действительных чисел); $l \in \{1, ..., n\}$, $t \in \{1, ..., \tilde{n}\}$, n — количество элементов множества A, $\tilde{n}$ — количество элементов множества B. Положим, что $n = \tilde{n}$. Между элементами этих множеств существуют связи, числовое значение которых является весами. Величины c_{lt} назовем входными данными и зададим их матрицами. Во втором типе задач между элементами заданного множества связей не существует, а весами являются числа $v_j \in R$, $j \in \{1, ..., n\}$, которым в соответствие поставлены некоторые свойства этих элементов, числовые значения которых задаются конечными последовательностями, именуемыми входными данными. Эти величины определяют значение целевой функции.

Для обоих типов задач из элементов одного или нескольких базовых множеств, например $a_l \in A$, $l \in \{1, ..., n\}$, образуется комбинаторное множество W — совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, выборки различных типов, разбиения и т.д.). На элементах w комбинаторного множества W вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент w^* множества W, для которого $F(w)$ принимает экстремальное значение при выполнении заданных ограничений.

Комбинаторные конфигурации

Под комбинаторной конфигурацией понимаем любую совокупность элементов, которая образуется из всех или некоторых элементов заданного базового множества $A=\{a_1, ..., a_n\}$ [9]. Обозначим ее упорядоченным множеством $w^k = (w_1^k, ..., w_\eta^k)$, где $\eta \in \{1, ..., n\}$ — количество элементов в w^k (в дальнейшем η будем обозначать и как η^k), $W = \{w^k\}_1^q$ — множество комбинаторных конфигураций, k — порядковый номер w^k в упорядоченном множестве W, $k \in \{1, ..., q\}$, q — количество w^k в W. Комбинаторную конфигурацию w^k будем обозначать как с верхним индексом w^k, так и без него.

Рекуррентным комбинаторным оператором назовем совокупность правил, по которым из элементов базового множества A образуется комбинаторная конфигурация w^k. Различные типы комбинаторных конфигураций образуются с помощью трех рекуррентных комбинаторных операторов: выбирание, транспозиция и арифметический [9].

Определение 1. Две нетождественные комбинаторные конфигурации $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ и $w^i = (w_1^i, ..., w_{\eta^i}^i)$ назовем изоморфными, если $\eta^k = \eta^i$.

 ISSN 0572-2691

Определение 2. Подмножество $W_{\eta^k} \subset W$ назовем подмножеством изоморфных комбинаторных конфигураций, если ее элементы — изоморфные комбинаторные конфигурации.

Множество W состоит из подмножеств изоморфных комбинаторных конфигураций.

Если комбинаторные конфигурации множества W образованы несколькими рекуррентными комбинаторными операторами, то они могут быть как изоморфными, так и неизоморфными, а W состоит из подмножеств $W_\eta \subset W$.

Поскольку операция транспозиции в перестановке меняет только порядок следования элементов в $w^k \in W$, множество перестановок W является множеством изоморфных комбинаторных конфигураций.

Множества комбинаторных конфигураций одного и того же типа имеют разнообразные упорядочения. Их количество для разных типов — различное.

Моделирование входных данных функциями натурального аргумента

Для задания целевой функции в явном виде и сведения ее к одному выражению для различных классов задач комбинаторной оптимизации смоделируем входные данные конечными последовательностями. Для первого типа задач представим элементы h наддиагоналей симметричной комбинаторной матрицы $Q(w^k)$ комбинаторной функцией $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \dots, \beta_m(f(m), w^k))$, а элементы h наддиагоналей симметричной матрицы C — функцией натурального аргумента $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), \dots, \varphi(m))$, где $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ — количество элементов h наддиагоналей матриц C и $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Если матрицы $Q(w^k)$ и C несимметричные, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$ содержат все их элементы, а $m = n^2$ (или $m = n\tilde{n}$). Функцию цели запишем как

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j). \qquad (1)$$

Введем системы комбинаторных функций H и H', где $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ — комбинаторная функция, аргументом которой является перестановка $w^k \in W$, образованная из элементов базового множества $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ — комбинаторная функция, аргументом которой является перестановка $w'^i \in W'$, образованная из элементов базового множества $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m\}$. Если $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, где w^1, w'^1 — первые перестановки в W, W', и $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$. Задачу комбинаторной оптимизации, входные данные в которой заданы функциями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, назовем базовой (или задачей системы H). Задачу, входные данные в которой заданы функциями $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ и $\varphi(j)|_1^m$, образованными из $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, — упорядоченной (или задачей системы H').

Симметрия в комбинаторной оптимизации

В зависимости от типа преобразований различают разные виды симметрии. В комбинаторике имеется как точная, так и приближенная симметрия, в частности, она свойственна комбинаторным множествам и конфигурациям. Кроме того, симметрия проявляется и в комбинаторной оптимизации. Ее математическую модель представим с использованием конечной последовательности чисел, которая строится по определенным правилам.

Комбинаторную конфигурацию представим упорядоченной последовательностью, для которой существует ей симметричная. Полагаем, что w^k симметричная, если она совпадает сама с собой при движении без деформаций. Существует единственный способ переместить симметричную последовательность так, чтобы она совпадала с исходной. Это — ее поворот на 180°. Введем такое определение.

Определение 3. Инверсией комбинаторной конфигурации $w=(w_1, ..., w_\eta)$, $w_s < w_p$, назовем $\tilde{w}=(\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_\eta)$, $\tilde{w}_s > \tilde{w}_p$, $s < p$, т.е. $w \in W$ и $\tilde{w} \in W$ симметричны относительно друг друга. Для перестановки $w=(1, 2, ..., n-1, n)$ симметричной является $\tilde{w}=(n, n-1, ..., 2, 1)$.

Лемма 1. Симметричные перестановки $w \in W$ и $\tilde{w} \in W$ принадлежат одному множеству W.

Доказательство очевидно.

Лемма 2. Если множество W упорядочено подмножествами W_η, то попарно симметричные комбинаторные конфигурации принадлежат разным множествам, которые имеют разное упорядочение. Иными словами, если для $w \in W$ симметрична $\tilde{w} \in \tilde{W}$, то W и $\tilde{W}$ имеют разное упорядочение.

Доказательство очевидно.

Пример 1. Для подмножества неупорядоченного разбиения натурального числа $W_\eta = (1, 5;\ 2, 4;\ 3, 3)$, $W_\eta \subset W$, симметричным является подмножество $\tilde{W}_\eta = (3, 3;\ 4, 2;\ 5, 1)$, которое принадлежит множеству $\tilde{W}$.

Лемма 3. Комбинаторная функция $\beta(\ f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ имеет свою симметрию в H'.

Доказательство очевидно.

Лемма 4. Если перестановка $w'^t \in W'$ симметрична $w'^l \in W'$, то комбинаторная функция $\beta(\ f(j), w'^t)|_1^m \in H'$ симметрична $\tilde{\beta}(\ f(j), w'^l)|_1^m \in H'$, $t, l \in \{1, ..., m!\}$.

Доказательство очевидно.

Теорема 1. Ни одна комбинаторная функция $\beta(\ f(j), w^k)|_1^m \in H$ не имеет во множестве H своей симметрии $\tilde{\beta}(\ f(j), w^i)|_1^m \in H$, $k, i \in \{1, ..., n!\}$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [10].

Симметрия в комбинаторной оптимизации определяется по-разному, в том числе особой структурой входной информации, которую представим функциями натурального аргумента.

Определение 4. Назовем функции, которые симметричны относительно линии, параллельной оси абсцисс или оси ординат, прямой и обратной. Если эти функции изменяются как монотонные или линейные, то параллельная линия проходит через точку их пересечения.

Прямая и обратная функции имеют одинаковые множества определения и значений. Например, для прямой функции натурального аргумента $\varphi(j)|_1^m = (1, ..., m)$ обратной является $\varphi(j)|_1^m = (m, ..., 1)$. Иными словами, эти функции симметричны относительно друг друга.

В комбинаторной оптимизации закономерность изменения значений целевой функции зависит от упорядочения комбинаторных конфигураций. Поэтому оценку симметрии для различных классов задач рассматриваем для определенного упорядочения комбинаторного множества (аргумента целевой функции). Симметрию в комбинаторной оптимизации смоделируем двумя конечными последовательностями. Эти последовательности содержат значение решений $F = (F_1, ..., F_q)$, $F_j \le F_{j+1}$, полученных для задач, входные данные в которых моделируются прямой функцией натурального аргумента (или для задач, в которых целевая функция смоделирована как прямая), и значение решений $\tilde{F} = (\tilde{F}_1, ..., \tilde{F}_q)$, $\tilde{F}_j \ge \tilde{F}_{j+1}$, $j = \overline{1, q-1}$, полученных для задач, входные данные в которых моделируются обратной функцией натурального аргумента (или для задач, в которых целевая функция смоделирована как обратная). Если для прямых функций значения этих последовательностей увеличиваются (или уменьшаются), а для обратных — уменьшаются (или увеличиваются), то они характеризуются приближенной симметрией. Если на следующем интервале комбинаторного множества значение целевой функции больше предыдущего, но оно изменяется как неубывающая или невозрастающая функция, то такую функцию назовем кусочно-монотонной. Приближенной симметрией также характеризуются кусочно-монотонные последовательности.

Симметрия в комбинаторной оптимизации, определяемая способом моделирования целевой функции

Этот вид симметрии рассмотрим на примере задач, аргументом целевой функции в которых является разбиение n-элементного множества на подмножества и перестановки. К задачам разбиения относятся компоновка, кластеризация, классификация, самообучение, покрытие геометрической поверхности, разрезание графов и т.д. Рассмотрим разбиение на непересекающиеся классы. Разбиением n-элементного множества $A = \{a_1, ..., a_n\}$ на η подмножеств (блоков) назовем множество подмножеств $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$, такое, что $w_1^k \cup ... \cup w_{\eta^k}^k = A$, $w_r^k \ne \varnothing$, $w_p^k \cap w_r^k = \varnothing$, $p \ne r$, $p, r \in \{1, ..., \eta^k\}$, $\eta^k \in \{1, ..., n\}$ — количество подмножеств в w^k. Подмножество $w_r^k = (a_1, ..., a_{\xi_r^k})$, $a_\tau \in A$, $\tau \in \{1, ..., n\}$, может иметь от 1 до n элементов ($\xi_r^k \in \{1, ..., n\}$). Два разбиения w^k и w^i назовем изоморфными, если $\eta^k = \eta^i$ и для любого подмножества $w_p^k \subset w^k$ найдется подмножество $w_r^i \subset w^i$, для которого $\xi_p^k = \xi_r^i$.

Задачу, аргументом целевой функции в которой является разбиение n-элементного множества на подмножества, назовем основной, а целевую функцию (1) — прямой, если в ней нахождение оптимального решения производится по количеству связей между элементами одного и того же подмножества. Задачу из класса разбиения назовем обратной к основной, в которой целевая функция $F^{-1}(w^k)$ обратная прямой (1), т.е. результат вычисляется по количеству связей между элементами, находящимися в разных подмножествах $w_r^i \subset w^i$. В этом случае $\beta_j(\,f(j), w^k)=1$, если элементы $a_s\; a_l \in A$ находятся в разных подмножествах заданного разбиения, и $\beta_j(\,f(j), w^k)=0$ — в другом случае. Если целевая функция (1) в основной задаче принимает наибольшее глобальное значение, то в обратной для того же аргумента — наименьшее глобальное значение, и наоборот.

Множество W разбиения n-элементного множества на подмножества состоит из подмножеств W_η. Упорядочим W подмножествами W_η так, что для W_1 $\eta=1$, для W_2 $\eta=2$, для W_n $\eta=n$ и для w^k и w^i $i<k$ $\eta^i \le \eta^k$. Поиск оптимального значения целевой функции в задачах разбиения в зависимости от заданных условий проводится или на всем множестве W, или на подмножествах изоморфных разбиений.

Теорема 2. Для подмножеств изоморфных разбиений $W_{\eta^k} \subset W$ значение целевой функции (1) находится в пределах $\min\limits_{w'^t \in W'} F(w'^t) \le F(w^k) \le \max\limits_{w'^l \in W'} F(w'^i)$, $k \in \{1, ..., q\}$, $t, i \in \{1, ..., m!\}$, $t \ne i$, $w^k \in W_{\eta^k}$, q — количество разбиений в W.

Теорема 3. Если в подмножествах W_{η^k} упорядочение w^k такое, что целевая функция для W_{η^k} — дискретная монотонная (неубывающая или невозрастающая), а во множестве W упорядочение подмножеств изоморфных разбиений такое, что $\eta^i \le \eta^k$, а $k<i$ или $k>i$, то целевая функция для такого упорядочения подмножеств — дискретная кусочно-монотонная функция (соответственно, неубывающая или невозрастающая).

Доказательство теорем 2–3 проводится с использованием комбинаторных функций [9].

Для этого упорядочения для прямой $F(w^k)$ и обратной $F^{-1}(w^k)$ задач получим две последовательности решений, которые характеризуются приближенной симметрией.

Пример 2. Задано множество $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n=5$, функция натурального аргумента равна $\varphi(j)\,|_1^m = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, значение комбинаторной функции $\beta(\,f(j), w^k)|_1^m \in H$ и $\beta(\,f(j), w^k) \in \{0, 1\}$. В табл. 1 приведены только те разбиения, для которых $F(w^k)$ для подмножеств W_{η^k} принимают наибольшее и наименьшее значения $k=\overline{1, 52}$.

Из табл. 1 видно, что целевые функции для прямой $F(w^k)$ и обратной $F^{-1}(w^k)$ задач изменяются как кусочно-монотонные. Две последовательности решений характеризуются приближенной симметрией.

Рассмотрим упорядоченную задачу (система H'), которая решается на множестве перестановок. Прямую целевую функцию для этого класса зададим выражением

$$F(w'^t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\,(f\,(j), w'^t)\,\varphi(\,j\,)\,, \tag{2}$$

 ISSN 0572-2691

Таблица 1

k	η^k	ρ^k	$F^{-1}(w^k)$	$F(w^k)$
1	1	(1, 2, 3, 4, 5)	0	55
2	2	(1, 2, 3, 4), (5)	30	25
3	2	(5, 2, 3, 4), (1)	10	45
7	2	(1, 2, 3), (4, 5)	35	18
10	2	(4, 1, 2), (3, 5)	36	19
16	2	(3, 4, 5), (1, 2)	27	28
17	3	(1, 2, 3), (4), (5)	47	8
26	3	(4, 5, 3), (1), (2)	28	27
28	3	(3, 2), (1, 4), (5)	47	8
39	3	(2, 3), (4, 5), (1)	40	15
42	4	(1, 2), (3), (4), (5)	45	1
51	4	(5, 4), (1), (2), (3)	54	10
52	5	(1), (2), (3), (4), (5)	55	0

а обратную — выражением

$$F^{-1}(w'^t) = \prod_{j=1}^{m} (\beta_j\ (f\ (j), w'^t) + \varphi(j)) \quad \text{для} \quad (\beta_j\ (f\ (j), w'^t) + \varphi(j)) > 0,\ j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Сформулируем следующие теоремы, доказательства которых приведены в [9]. Входные данные зададим прямыми и обратными функциями натурального аргумента.

Теорема 4. Если $\beta(\ f\ (j), w'^1)|^m{}_1 = (1, ..., m)$, $\varphi(\ j\ )\ |^m{}_1 = (1, ..., m)$, то наибольшее значение целевая функция (2) принимает для перестановки $w'^1 = (1, ..., m)$, а наименьшее — для перестановки $\tilde{w}'^t = (\ m, ..., 1)$.

Теорема 5. Если $\varphi(\ j\ )\ |^m{}_1 = (1, ..., m)$, $\beta(\ f\ (j), w'^1)|^m{}_1 = (1, ..., m)$, то наибольшее значение целевая функция (3) принимает для перестановки $\tilde{w}'^t = (\ m, ..., 1)$, а наименьшее — для перестановки $w'^1 = (1, ..., m)$ и

$$\prod_{j=1}^{m}(m+1) > \prod_{j=1}^{m} 2\ j,\ \text{где}\ F^{-1}_{\max}(\tilde{w}'^t) = \prod_{j=1}^{m}(m+1),\ \text{а}\ F_{\min}{}^{-1}(w'^1) = \prod_{j=1}^{m} 2\,j.$$

Пример 3. Положим, $\beta(\ f\ (j), w'^1)|^m{}_1 = (1, 2, 3)$, $\varphi(\ j\ )\ |^m{}_1 = (1, 2, 3)$, $n = 3$.

Таблица 2

k	Перестановка w'^k	$F(w'^k)$	$F^{-1}(w'^k)$
1	3, 2, 1	10	64
2	2, 3, 1	11	60
3	3, 1, 2	11	60
4	2, 1,3	13	54
5	1, 3, 2	13	50
6	1 ,2, 3	14	48

Результаты вычислений для упорядоченной задачи, приведенные в табл. 2, характеризуются приближенной симметрией. Приведены значения прямой $F(w'^k)$ и обратной $F^{-1}(w'^k)$ целевых функций для упорядоченной задачи, аргументом которой является перестановка.

Симметрия в комбинаторной оптимизации, определяемая структурой входных данных

Зададим структуру входных данных прямыми и обратными функциями натурального аргумента и исследуем, как они влияют на изменение значений целевой функции. Сначала рассмотрим упорядоченную задачу оптимизации и изменение значений целевой функции в зависимости от транспозиции $\beta_j(f(j), w'^k)$ функции $\beta(f(j), w'^k)|_1^m \in H'$.

Комбинаторные функции, аргументом которых является перестановка, образуются рекуррентным комбинаторным оператором транспозиции. Две транспозиции $\alpha(w_l'^k, w_r'^k)$ и $\alpha(w_g'^k, w_s'^k)$ перестановки $w'^k \in W'$ назовем независимыми, если все элементы в них имеют разные значения, $l, s, g, r \in \{1, ..., m)$. Соответственно, две траспозиции функции $\beta(f(j), w'^k)|_1^m$ независимые, если значения этой функции в них разные.

Определение 5. Дефицитом функции $\beta(f(j), w'^{k+1})|_1^m$ относительно транспозиции назовем величину $\varepsilon(w'^k) = \left| \beta_g(f(g), w'^k) - \beta_s(f(s), w'^k) \right|$, значения $\beta_g(f(g), w'^k)$, $\beta_s(f(s), w'^k)$ которой операцией транспозиции $\alpha(w_g'^k, w_s'^k)$ в $\beta(f(j), w'^{k+1})|_1^m$ поменялись местами.

Дефицитом функции $\varphi(j)|_1^m$ относительно транспозиции назовем величину $\varepsilon' = |\varphi(g) - \varphi(s)|$, $\varphi(g)$, $\varphi(s)$ которой перемножаются на значения $\beta_g(f(g), w'^k)$, $\beta_s(f(s), w'^k)$ функции $\beta(f(j), w'^k)|_1^m$.

Для упорядоченной задачи рассмотрим, как меняется в зависимости от транспозиции значений $\beta_j(f(j), w'^k)$ целевая функция (1), если $\beta(f(j), w'^1)|_1^m = (1, ..., m)$ и $\varphi(j)|_1^m = (1, ..., m)$.

Теорема 6. Если в функции $\beta(f(j), w'^1)|_1^m = (1, ..., m)$ провести транспозицию двух значений $\beta_g(f(g), w'^1)$, $\beta_s(f(s), w'^1)$, то $F(w'^k)$ для полученной перестановки $w'^k \in W'$ равна

$$F(w'^k) = F(w'^1) - (\varepsilon(w'^1))^2. \tag{4}$$

Следствие 1. Если $\beta(f(j), w'^1)|_1^m = (1, ..., m)$ и $\varphi(j)|_1^m = (1, ..., m)$, то целевая функция $F_{\max}(w'^1) = F_{\min}(\tilde{w}'^k) + \sum_{l=1}^{\varsigma} \varepsilon_l(\tilde{w}'^k)\, \varepsilon_l'$, где $\varsigma = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, а

$$\varepsilon_l(\tilde{w}'^k) = \begin{cases} \{1, 3, 5, ..., n-1\}, & \text{если } m \in Z, \\ \{2, 4, 6, ..., n\}, & \text{если } m \in Z_1, \end{cases} \quad Z \in \{2, 4, ..., 2j\},\ Z_1 \in \{1, 3, ..., 2j-1\}.$$

Следствие 2. Если $\beta_j(f(j), w'^1) \in R$, $\varphi(j) \in R$, $\beta_j(f(j), w'^1) \le \beta_{j+1} \times$ $\times (f(j+1), w'^1)$, $\varphi(j) \le \varphi(j+1)$, а целевая функция для $w'^t \in W'$ принимает наибольшее значение, то наименьше ее значение для перестановки $w'^k \in W'$ равно

$$F_{\min}(w'^k) = F_{\max}(w'^t) - \sum_{l=1}^{\varsigma} \varepsilon_l(w'^t)\, \varepsilon_l'.$$

Если $\beta_j(f(j), w'^1) \in R$, $\varphi(j) \in R$, $\beta_j(f(j), w'^1) \le \beta_{j+1}(f(j+1), w'^1)$, $\varphi(j) \le \varphi(j+1)$, а целевая функция для $w'^k \in W'$ принимает наименьшее значе-

 ISSN 0572-2691

ние, то наибольшее ее значение для перестановки $w'^{t} \in W'$ равно $F_{\max}(w'^{t}) = F_{\min}(w'^{k}) + \sum_{l=1}^{\varsigma} \varepsilon_l (w'^{k}) \varepsilon'_l$, R — множество действительных чисел.

Последовательность решений для упорядоченной задачи комбинаторной оптимизации, входные данные в которых задаются прямыми функциями натурального аргумента, имеет вид: $F_{\max}(w'^{t}), F(w'^{*}), ..., F(w'^{**}), F_{\min}(w'^{k})$, $F(w'^{*}) \geq F(w'^{**})$. Если в упорядоченной задаче входные данные заданы обратными функциями натурального аргумента, то для этого же порядка для некоторых структур входных данных получаем симметричную последовательность $F_{\min}(w'^{k}), F(w'^{**}), ..., F(w'^{*}), F_{\max}(w'^{t})$, образованную одним и тем же количеством транспозиций одинаковых значений комбинаторной функции. Это свойство характерно и для базовой задачи.

На примере некоторых разрешимых задач комбинаторной оптимизации из разных классов рассмотрим, как изменяется целевая функция в зависимости от прямых и обратных функций натурального аргумента, которыми задаются входные данные (в подклассах разрешимых задач — известный способ аналитического нахождения глобального оптимума).

Из выражения (1) видно, что для фиксированного аргумента последовательность величин произведения значений числовой и комбинаторной функций — комбинации элементов заданной матрицы. Если одна из них — бинарная последовательность, то из матрицы выбираются не все элементы. Эту последовательность назовем вариантом решения задачи. По способу образования множество вариантов решения разделяется на подмножества. В подмножестве K_1 находятся варианты решения задачи, значения которых выбраны из матрицы начиная с элемента по адресу 1, во втором K_2 — начиная с адреса 2 и т.д. Количество таких подмножеств для различных классов задач разное. Соответственно упорядочивается подмножествами $K_1, K_2, ..., K_{n-2}$ множество комбинаторных конфигураций (перестановки). Образованные подмножества состоят из меньших подмножеств. Такое упорядочение множества комбинаторных конфигураций проводим по двум, трем и более значениям этой последовательности. Оно не зависит от входных данных. Для некоторых прикладных задач рассмотрим изменение значений целевой функции при упорядочении перестановок подмножествами, начиная с K_1 и заканчивая K_{n-2}.

Задача размещения объектов формулируется следующим образом. Множество одногабаритных или произвольной формы объектов необходимо разместить в области размещения так, чтобы смоделированная по заданным критериям целевая функция принимала оптимальное значение, а расстояние между объектами было равно определенной величине.

Задача коммивояжера: задано n городов, расстояния между которыми известны. Координаты входа и выхода каждого города совпадают. Необходимо найти кратчайший путь, который проходит через все города один раз и возвращается в исходный пункт.

Сформулируем следующие теоремы, доказательства которых приведены в [9].

Теорема 7. Если в задаче размещения входные данные задаются $\beta(\ f\,(\,j\,),\,w^1)|^m{}_1 = (1,\ldots,m)$, $\varphi(\,j\,)\,|^m{}_1 = (1,\ldots,m)$, то наибольшее значение функция цели (1) принимает для $w^1 = (\,1,\ldots,n\,) \in K_1$, а наименьшее — для $\tilde{w}^k = (n,\ldots,1) \in K_m$. Наибольшее значение целевой функции равно $F\,(w^1) = \dfrac{m\,(m+1)\,(2\,m+1)}{6}$, а наименьшее — соответственно $F\,(\tilde{w}^{\,k}\,) > \dfrac{m\,(m+1)\,(\,m+2)}{6}$ или $F\,(\tilde{w}^{\,k}\,) = \dfrac{m\,(m+1)\,(2\,m+1)}{6} - \sum\limits_{j=1}^{p} \varepsilon_j(\tilde{w}^1)\,\varepsilon'_j$, $p = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$.

Следствие 3. Если в задаче размещения входные данные $\beta(\ f\,(\,j\,),\,w^1)|^m{}_1 = (m,\ldots,1)$, $\varphi(\,j\,)\,|^m{}_1 = (1,\ldots,m)$, то наименьшее значение целевая функция (1) принимает для перестановки $w^1 = (\,1,\ldots,n\,) \in K_1$, а наибольшее — для $\tilde{w}^{\,k} = (\,n,\ldots,1) \in K_m$. Наибольшее значение целевой функции равно $F\,(\tilde{w}^k\,) = \dfrac{m\,(m+1)\,(m+2)}{6} + \sum\limits_{j=1}^{p} \varepsilon_j(\,w^1)\,\varepsilon'_j$, а наименьшее — соответственно $F\,(w^1\,) = \dfrac{m\,(m+1)\,(\,m+2)}{6}$.

Теорема 8. Если в задаче коммивояжера значение комбинаторной функции $\beta(\ f\,(\,j\,),\,w^1) = k^0 j + b$, $\varphi(\,j\,) \in \{0,1\}$, где $j = \overline{1,m}$, $k^0, b > 0$ — целые произвольные числа и $k^0 \le 1$, то наибольшее значение функция цели (1) принимает для перестановки $w^i \in K_1$, а наименьшее значение — для перестановки $w^k \in K_{n-2}$.

Следствие 4. Если в задаче коммивояжера значение комбинаторной функции $\beta(\ f\,(\,j\,),\,w^1) = (k^0 m + b) - (k^0 j + b) + (k^0 + b)$, $\varphi(\,j\,) \in \{0,1\}$, где $j = \overline{1,m}$, $k^0, b > 0$ — целые произвольные числа и $k^0 \le 1$, то наименьшее значение функция цели (1) принимает для перестановки $w^i \in K_1$, а наибольшее — для перестановки $w^k \in K_{n-2}$.

Теорема 9 (справедлива для $n > 6$). Если входные данные в задаче коммивояжера заданы прямой функцией $\beta(\ f\,(\,j\,),\,w^1)\,|_1^m = (c, b, c, b, \ldots, c'_{m-1}, b'_m)$, $\varphi(\,j\,) \in \{0,1\}$ и $c < b$, то для наименьшего значения $F(w^{k*})$ перестановка $w^k \in K_s$, где $s \in Z_1$. Для наибольшего значения $F(w^{i*})$ перестановка $w^i \in K_t$, где $t \in Z$.

Если входные данные в задаче коммивояжера заданы обратной функцией $\beta(\ f\,(\,j\,),\,w^1)\,|_1^m = (c, b, c, b, \ldots, c'_{m-1}, b'_m)$, $\varphi(\,j\,) \in \{0,1\}$ и $c > b$, то в задаче коммивояжера для наибольшего значения $F(w^{k*})$ перестановка $w^i \in K_t$, где $t \in Z_1$. Для наименьшего значения $F(w^k)$ перестановка $w^k \in K_s$, где $s \in Z$,

$$c' = \begin{cases} c, & \text{если} \quad m \in Z, \\ b, & \text{если} \quad m \in Z_1, \end{cases} \quad b' = \begin{cases} c, & \text{если} \quad m \in Z_1, \\ b, & \text{если} \quad m \in Z. \end{cases}$$

Пример 4. Задача размещения. Положим, $n = 4$,

 ISSN 0572-2691

задача а) $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $\varphi(j)|_1^m = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$;

задача б) $\varphi(j)|_1^m = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Результаты решения для задач а) и б) приведены в табл. 3, значения $F(w^k)$ (задача а) и $\tilde{F}(w^k)$ (задача б) для задачи размещения одногабаритных объектов.

Таблица 3

k	w^k	Значения $F(w^k)$	Значения $F(\tilde{w}^k)$
1	2	3	4
1	1,2,3,4	56	91
2	1,3,2,4	58	89
3	1,2,4,3	58	89
4	1,3,4,2	62	85
5	1,4,2,3	62	85
6	2,1,3,4	64	83
7	1,4,3,2	64	83
8	2,1,4,3	66	81
9	2,3,1,4	70	77
10	3,1,2,4	70	77
11	3,2,1,4	74	73
12	3,1,4,2	74	73
13	2,4,1,3	74	73
14	4,1,2,3	78	69
15	2,3,4,1	78	69
16	4,1,3,2	80	67
17	2,4,3,1	80	67
18	3,4,1,2	82	65
19	4,2,1,3	82	65
20	3,2,4,1	82	65
21	4,3,1,2	86	61
22	3,4,2,1	86	61
23	4,2,3,1	88	59
24	4,3,2,1	91	57

Пример 5. Задача коммивояжера.

Задано $n = 5$;

а) $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$,

$\varphi(j)|_1^m = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$;

б) $\varphi(j)|_1^m = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$,

$\beta(f(j), w^1)|_1^m = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Результаты решения для задач а) и б) приведены в табл. 4. Поскольку в задаче коммивояжера количество нетождественных маршрутов равно $\frac{(n-1)!}{2}$, приведены только те перестановки, которые требуют исследования.

Для задачи коммивояжера и задачи о назначениях одна из функций натурального аргумента принимает значения $\{0, 1\}$. Поэтому для некоторых структур входных данных, которые заданы прямыми и обратными функциями, последовательность решений для этих классов задач может быть одинаковая.

Пример 6. Задача коммивояжера.

Положим $n = 4$;

задача а) $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (2, 4, 8, 16, 32, 64)$, $\varphi(j)|_1^m = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$;

задача б) $\beta(f(j), \omega^1)|_1^m = (64, 32, 16, 8, 4, 2)$, $\varphi(j)|_1^m = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$.

Результаты решения обеих задач занесены в табл. 5.

Таблица 4

Подмножество K_t, $t \in \{1, ..., n-2\}$	Перестановка w^k, $k \in \{1, ..., n!\}$	Функция $\tilde{F}(w^k)$ для задачи а)	Функция $F(w^k)$ для задачи б)
	2, 1, 3, 4, 5	27	28
	3, 1, 2, 4, 5	27	28
K_1	3, 2, 1, 4, 5	27	28
	3, 4, 1, 2, 5	27	28
	1, 2, 3, 4, 5	27	28
	1, 2, 4, 3, 5	27	28
	2, 3, 1, 4, 5	28	27

K_2	3, 1, 4, 2, 5	28	27
	1, 3, 2, 4, 5	28	27
	1, 3, 4, 2, 5	28	27
K_3	1, 4, 3, 2, 5	28	27
—	1, 4, 2, 3, 5	28	27

Таблица 5

Подмножество K_t, $t \in \{1, ..., n-2\}$	Перестановка w^k, $k \in \{1, ..., n!\}$	$F(w^k)$ для задачи а)	$\widetilde{F}(w^k)$ для задачи б)
K_1	2, 1, 3, 4	102	102
	1, 2, 3, 4	90	90
K_2	2, 3, 1, 4	60	60

Для особых структур входных данных и определенного упорядочения комбинаторных множеств (аргумента целевой функции) последовательность решений $F = (F_1, ..., F_q)$, $F_j \le F_{j+1}$, полученных для прямой функции натурального аргумента, является симметричной к последовательности решений $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_1, ..., \widetilde{F}_q)$, $\widetilde{F}_j \ge \widetilde{F}_{j+1}$, полученных для обратной функции натурального аргумента. При этом значения F_j и $\widetilde{F}_j$ вычислены для одного и того же аргумента $w^k \in W$.

Заключение

Свойство симметрии в комбинаторной оптимизации зависит от симметрии комбинаторных множеств и комбинаторных конфигураций. Оно проявляется благодаря специальному моделированию целевой функции и особой структуре входной информации. Если входные данные для некоторых классов задач заданы прямыми или обратными функциями натурального аргумента, то последовательность решений $F = (F_1, ..., F_q)$, полученная для прямой функции натурального аргумента, симметрична последовательности $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_1, ..., \widetilde{F}_q)$, полученной для обратной функции натурального аргумента. Знание свойств комбинаторных функций позволяет устанавливать изменение значений целевой функции в зависимости от транспозиции элементов в перестановке и от упорядочения комбинаторных конфигураций.

Полученные результаты можно использовать при решении задач комбинаторной оптимизации различных классов для анализа изменения значений целевой функции в зависимости от структуры входных данных с учетом симметрии комбинаторных конфигураций.

 ISSN 0572-2691

Н.К. Тимофієва

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ СИМЕТРІЇ В КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

Показано, що симетрія в комбінаторній оптимізації проявляється в залежності від структури вхідних даних і способу моделювання цільової функції. В її основі лежить симетрія комбінаторних множин та комбінаторних конфігурацій (аргументу цільової функції). Її математичну модель подано скінченними послідовностями, які характеризуються наближеною або точною симетрією.

N.K. Tymofijeva

MODELING OF SYMMETRY IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION

It is shown that symmetry in combinatorial optimization manifests itself depending on the structure of the input data and the method of modeling of the objective function. It is based on the symmetry of combinatorial sets and combinatorial configurations (the objective function argument). Its mathematical model is represented by finite sequences, which are characterized by approximate or exact symmetry.

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1981. — 543 с.
2. *Фрид Э.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. Пер. с венгерского. — М. : Мир, 1979. — 230 с.
3. *Loeschner K.* Symmetry in combinatorial optimization // A thesis in the Departament of Mathematics and Statistics. — Canada : Concordia University. — 2002. — 67 p.
4. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. — М. : Наука, 1986. — 288 с.
5. *Еремин И.И.* Теория двойственности в линейной оптимизации. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. — 195 с.
6. *Еремин И.И.* Симметричная двойственность для задач последовательного линейного программирования // Докл. АН СССР. — 1991. — **317**, № 5. — С. 1045–1048.
7. *Медвежонков Д.С.* Симметричная двойственность в выпуклой оптимизации и модели потокораспределения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск. — 2013. — 19 с.
8. *Тимофієва Н.К.* Про симетрію комбінаторних множин // УСиМ. — 2017. — № 1. — С. 3–16.
9. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації: Дис. … докт. техн. наук. — Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. — 2007. — 374 с.
10. *Тимофеева Н.К.* Матрицы в задачах комбинаторной оптимизации // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 3. — С. 104–113.

Получено 12.01.2018

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком НАН Украины А.А. Чикрием.