

КОСМИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

УДК 681.5.015; 629.7.05

Н.Н. Сальников, В.Ф. Губарев, С.В. Мельничук

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ФИЛЬТРА В КОМПЛЕКСИРОВАННОЙ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Введение

В настоящее время интенсивно используются малогабаритные бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС), построенные с помощью микроэлектронных механических систем (МЭМС) [1–10]. Они находят применение в беспилотных воздушных, наземных и надводных аппаратах. В большинстве случаев МЭМС обладают невысокой точностью и со временем относительно быстрым нарастанием ошибок. Для компенсации ошибок (погрешностей) датчиков МЭМС, в частности гироскопов и акселерометров, БИНС, как правило, используются в комплексе с другими приборами навигации, в частности с приемниками глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), такими как GPS, ГЛОНАСС, Galileo и китайская ГНСС BeiDou. Для коррекции ошибок измерительных устройств БИНС применяется комплексное использование различных измерений, что позволяет в определенных случаях существенно повысить точность навигации [2–10].

Показания разных измерительных устройств БИНС и ГНСС связаны нелинейными дифференциальными уравнениями [2–4, 8–10]. Задача коррекции сводится к задаче оценивания вектора состояния динамической системы, описываемой этими уравнениями. Традиционно для ее решения используется фильтр Калмана [1–11], несмотря на то что в случае нелинейных систем для него нет строгого обоснования. Более того, в ряде случаев обнаружена расхожимость фильтра Калмана при нарушении априорных предположений о стохастических характеристиках помех измерения и возмущений [11]. Для придания фильтру Калмана свойства грубости предложены оптимальный адаптивный фильтр Калмана и ансцентный фильтр Калмана и их многочисленные модификации [6–11]. Ансцентный фильтр имеет определенные преимущества по сравнению с расширенным фильтром Калмана [11] и находит в последнее время все более широкое применение для решения задач навигации. Для коррекции используется фильтр частиц [12], который в случае нелинейных систем позволяет получать численные аппроксимации функций распределений оцениваемых величин. Фильтр частиц требует больших объемов вычислений и поэтому довольно редко используется в навигационных устройствах. Все упомянутые фильтры относятся к так называемым стохастическим, поскольку их алгоритмы основаны на предположении о

наличии известных стационарных стохастических свойств у неопределенных величин.

В настоящее время развивается альтернативный, так называемый нестохастический подход [13–21] к решению задач оценивания параметров и состояний динамических систем, в которых относительно неопределенных величин предполагаются известными только ограниченные множества их возможных значений. Такой подход называют также гарантированным или теоретико-множественным. В результате его применения для оцениваемых величин с помощью измеряемой информации и модели системы строятся информационные множества, гарантированно содержащие эти величины. В общем случае для удобства численной реализации эти множества аппроксимируются множествами фиксированной структуры — многомерными эллипсоидами [13–16], параллелепипедами [19], зонотопами [20], которые задаются с помощью фиксированного числа параметров. Преимущество нестохастического подхода заключается в минимуме информации, необходимой для его обоснованного применения. Так, например, для измерительных приборов всегда известна точность измерения. Вместе с тем здесь же кроется и «ахиллесова пята» этого подхода — если некоторая неопределенная величина вышла за пределы множества ее возможных значений, то это может привести к отсутствию пересечения информационных множеств и, как следствие, к останову алгоритма. В таких случаях в рамках методов эллипсоидального оценивания для устранения возникшей несовместности предлагается интуитивно очевидный прием, состоящий в специальном увеличении размеров оценивающего эллипсоида [22–25].

В данной работе рассматривается применение модифицированного эллипсоидального фильтра [24, 25] для коррекции медленно изменяющихся смещений показаний МЭМС гироскопов. Ориентация системы координат, связанной с подвижным объектом, задается с помощью кватернионов [2, 3, 26, 27]. Для демонстрации особенностей применения эллипсоидального фильтра задача корректировки показаний БИНС максимально упрощена — рассматривается в инерциальной системе координат [8], не учитываются сила Кориолиса и неоднородность гравитационного поля Земли. Уточнение вектора состояния и проведение связанных с этим вычислений в соответствии с методом эллипсоидального оценивания происходит в случае, когда оцениваемый вектор не согласуется с данными измерений. По мере уточнения вектора состояния такое событие становится редким, что приводит к снижению вычислительных затрат в процессе работы алгоритма. Работоспособность предлагаемого в статье подхода продемонстрирована на данных тестового примера.

1. Постановка задачи коррекции показаний приборов БИНС

Рассмотрим уравнения [8], связывающие показания приборов БИНС и ГНСС. Положение движущегося объекта можно охарактеризовать векторами положения X и скорости V ($X, V \in R^3$) в некоторой системе координат. Рассмотрим неподвижную прямоугольную систему координат, начало которой расположено в заданной точке на поверхности Земли в начальный момент времени, ось z направлена противоположно вектору силы тяжести (считаем, что Земля имеет сферическую форму), ось x — по касательной к меридиану в сторону северного полюса, ось y — так, чтобы полученная система координат была правой. В такой системе координат уравнения, связывающие вектор положения $X = (x, y, z)^T = (X_1, X_2, X_3)^T$ со скоростью (вектором V) и ускорением (вектором a), можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{X} = V; \\ \dot{V} = a = F(q) \cdot (a_m - \xi_a) - (0 \ 0 \ G)^T. \end{cases} \quad (1)$$

В последнем уравнении a_m — измеренное значение вектора ускорения в системе координат, связанной с прибором БИНС (СК БИНС), ξ_a — вектор ошибок измерения этого ускорения, $G = 9,815 \text{ м/с}^2$ — среднее значение ускорения свободного падения (меняется от $9,832 \text{ м/с}^2$ на полюсах до $9,78 \text{ м/с}^2$ на экваторе). Вектор ошибок измерения приведен в (1) со знаком минус, чтобы выражение $(a_m - \xi_a)$ представляло вектор ускорения, измеряемый БИНС, без ошибок. Для вектора ξ_a справедлива оценка

$$\|\xi_a\|_{\infty} \leq c_a, \quad (2)$$

где число c_a , характеризующее максимальную ошибку измерения, известно.

Матрица перехода $F(q)$ от координат векторов в СК БИНС к их координатам в СК, связанной с Землей, (далее эту СК будем называть СКЗ) имеет следующий вид [2, 3, 8]

$$F(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Она зависит от кватерниона ориентации $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$ СК БИНС по отношению к СКЗ [26, 27]. Вектор q в уравнении (3) и во всех последующих уравнениях нормирован

$$\|q\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (4)$$

В свою очередь, изменение кватерниона связано с вектором $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ угловой скорости вращения БИНС и описывается следующим уравнением:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(q) \cdot \omega = \frac{1}{2} \Omega(q) \cdot (\omega_m - b - \xi_{\omega}). \quad (5)$$

Здесь ω_m — измеренный с помощью гироскопов вектор угловой скорости в СК БИНС, ξ_{ω} — ошибка измерения, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ — неизвестный вектор смещения показаний гироскопов, матрица

$$\Omega(q) = \Omega(q_0, q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Вектор ошибок измерений ξ_{ω} угловой скорости считаем ограниченным,

$$\|\xi_{\omega}\|_{\infty} \leq c_{\omega}. \quad (7)$$

При непосредственных вычислениях несложно убедиться, что уравнение (5) сохраняет норму q

$$\frac{d}{dt} \|q\| = 2q^T \dot{q} = q^T \Omega(q) \cdot (\omega_m - b - \xi_\omega) \equiv 0,$$

поскольку $q^T \Omega(q) \equiv (0 \ 0 \ 0)$. Начальное значение кватерниона q в (5) неизвестно. Положим, что смещения показаний гироскопов не меняются со временем

$$\dot{b}_i = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (8)$$

Кроме того, для величин $b_i(t) = \text{const}$, $i = \overline{1, 3}$, известны оценки (возможно, грубые) их максимальных значений

$$|b_i(t)| \leq \bar{b}_i, \quad i = \overline{1, 3} \quad \forall t. \quad (9)$$

Здесь \bar{b}_i , $i = \overline{1, 3}$, — известные числа.

Приемник ГНСС измеряет положение объекта в прямоугольной декартовой системе координат ECEF (Earth Centered Earth Fixed Frame), связанной с Землей. Центр этой СК находится в центре масс Земли, ось z совпадает с осью ее вращения, ось x проходит через нулевой меридиан. Поскольку положение СКЗ относительно СК ECEF известно, координаты объекта, измеренные приемником ГНСС, легко пересчитываются в координаты объекта в СКЗ. Поэтому полагаем, что в результате измерений известен вектор

$$X_m = X + \xi_X, \quad (10)$$

где X — вектор положения объекта в СКЗ, $X \in R^3$, ξ_X — вектор ограниченных ошибок измерений

$$\|\xi_X\|_\infty \leq c_X.$$

Здесь константа c_X предполагается известной. Отсюда и с учетом (10) заключаем, что компоненты X_i вектора X удовлетворяют неравенствам

$$|X_i - X_{mi}| \leq c_X, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (11)$$

Для уточнения ориентации объекта используется свойство относительного постоянства магнитного поля Земли во времени. Для координат вектора магнитного поля в СК БИНС и СКЗ справедливо следующее соотношение:

$$B_0 = F(q) \cdot (B_m - \xi_m). \quad (12)$$

Здесь B_m — измеренный вектор магнитной индукции в СК БИНС, ξ_m — вектор ограниченных ошибок измерений, $\|\xi_m\|_\infty \leq c_m$, $B_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03})^T$ — вектор индукции магнитного поля Земли в СКЗ. Вектор $B_0 = B_0(X)$ в общем случае является известной функцией вектора X положения объекта. Однако при небольшом изменении X , $\|X\| \leq 20$ км, можно с большой точностью считать, что $B_0(X) = \text{const}$.

Матрица $F(q)$ — ортогональная, как матрица преобразования координат в двух декартовых прямоугольных системах координат, т.е. для нее выполняется $F^{-1}(q) = F^T(q)$. Поэтому из (12) можно получить неравенство

$$\|F^T(q)B_0 - B_m\|_\infty = \|\xi_m\|_\infty \leq c_m,$$

по которому должен удовлетворять кватернион ориентации q . Отсюда следует три покоординатных неравенства

$$|F_i^T(q)B_0 - B_{mi}| \leq c_m, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (13)$$

где $F_i(q)$ — i -й столбец матрицы $F(q)$.

Дифференциальные уравнения (1), (5) и (8) можно рассматривать как уравнения нелинейной динамической системы, вектор состояния которой имеет следующий вид:

$$x = (X^T, V^T, q^T, b^T)^T. \quad (14)$$

Размерность вектора x равна $n = 3 + 3 + 4 + 3 = 13$. Входящие в эти дифференциальные уравнения измеряемые величины — вектор ускорений $a_m(t)$ и вектор угловых скоростей $\omega_m(t)$ — будем рассматривать как входные переменные. Начальные условия, вектор $x(0)$, неизвестны.

Вектор состояния x удовлетворяет неравенствам (11) и (13), связанным с измерениями. Кроме того, для компоненты q вектора x должно выполняться условие нормировки (4). Все измерения проводятся в дискретные моменты времени, при этом для рассматриваемой в этой работе конкретной навигационной системы период измерения положения (с помощью приемника ГНСС) составляет $\Delta T = 1$ с, переменные БИНС измеряются чаще, с периодом $\Delta t = 0,04$ с.

В идеальном случае требуется указать способ вычисления для дискретных моментов времени $t_k = k\Delta T$, $k = 0, 1, \dots$, оценок \hat{x}_k вектора состояния $x_k = x(t_k)$, для которых существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}_k - x_k\| = 0. \quad (15)$$

Существование предела связано с определенными свойствами помех измерения, которые сложно проверить на практике и невозможно обеспечить. Поэтому рассмотрим решение более простой задачи. Требуется указать способ вычисления оценок \hat{x}_k , удовлетворяющих уравнениям (1), (5) и (8) в дискретном времени и неравенствам, следующим из уравнений измерений с некоторого конечного момента времени K .

Для решения этой задачи воспользуемся подходом [25] к решению задач нелинейной эллипсоидальной фильтрации.

2. Метод нелинейной эллипсоидальной фильтрации

Уравнения (1), (5) и (8) можно записать в виде следующих уравнений нелинейной динамической системы:

$$\dot{x} = f(x(t), u_m(t) - \xi_u(t)), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

где $x(t)$ — вектор состояния в момент непрерывного времени t , u_m — вектор измерений входных переменных, ξ_u — вектор ошибок измерений, в данном случае — вектор ограниченных возмущений, действующих на систему,

$$\xi_u(t) \in \Xi_u, \quad (17)$$

где Ξ_u — параллелепипед, определяемый неравенствами (2) и (7), $\Xi_u \subset R^6$.

Ограничения на вектор состояния, задаваемые условиями (4) и (9), а также (11) и (13), следующими из уравнений измерения положения и магнитного поля, можно записать в следующем виде:

$$|f_j(x_k) - y_{jk}| \leq c_j, \quad j = \overline{1, 10}. \quad (18)$$

Эти неравенства рассматриваются для дискретных моментов времени t_k .

По условию задачи вектор $x(0) = x_0$ начальных условий для уравнения (16) неизвестен, также неизвестны значения помех, поэтому получить вектор $x(t)$ для произвольного момента времени t путем интегрирования (16) не представляется возможным. Опишем процедуру уточнения информации о векторе состояния в соответствии с методом эллипсоидального оценивания [13–16].

Предположим, что в момент времени t_k известно, что вектор состояния

$$x_k = x(t_k) \in E_k, \quad (19)$$

где для определенности считаем множество $E_k = \{x : (x - \hat{x}_k)^T H_k^{-1} (x - \hat{x}_k) \leq 1\}$ эллипсоидом, характеризуемым вектором центра \hat{x}_k и положительно-определенной симметрической матрицей $H_k = H_k^T > 0$. Рассматривая уравнение (16) на временном интервале $[t_k, t_{k+1}]$ при всевозможных начальных условиях, удовлетворяющих (19), и всевозможных реализациях помех $\xi_u(\cdot)$, удовлетворяющих на этом интервале условию (17), можно получить множество

$$X_{k+1|k} = \{x = x(t_{k+1}, x_k, \xi_u(\cdot)), \forall x_k \in E_k \forall \xi_u(\tau) \in \Xi_u \forall \tau \in [t_k, t_{k+1}]\}$$

возможных значений вектора $x_{k+1} = x(t_{k+1})$ в дискретный момент времени $k+1$. Это множество в общем случае не является эллипсоидом. Построение этого множества можно осуществить, например, интегрированием уравнения динамики системы (16) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ при различных начальных условиях, удовлетворяющих (19), и для всевозможных реализаций помех $\xi_u(\tau) \in \Xi_u \forall \tau \in [t_k, t_{k+1}]$. Очевидно, что это очень трудоемкий процесс, требующий значительных вычислений.

С другой стороны, в момент времени t_{k+1} вектор состояния x_{k+1} должен удовлетворять условиям (18), что можно записать в виде

$$x_{k+1} \in \bar{X}_{k+1} = \{x : |f_j(x) - y_{j,k+1}| \leq c_j, \quad j = \overline{1, 10}\}. \quad (20)$$

Множество \bar{X}_{k+1} содержит векторы состояний, которые совместимы с измерениями при заданных априорных ограничениях на значения помех измерения. В результате можно заключить, что искомым вектор состояния

$$x_{k+1} \in X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} \cap X_{k+1|k}. \quad (21)$$

Несмотря на очевидную простоту и логическую строгость изложенного подхода по уточнению множества возможных значений вектора состояния, при его практической реализации возникают вычислительные трудности, связанные с построением множеств $X_{k+1|k}$, \bar{X}_{k+1} и X_{k+1} . Поэтому предлагается следовать подходу, предложенному в [25]. В соответствии с ним в момент времени t_{k+1} строится эллипсоид

$$E_{k+1|k} = \{x : (x - \hat{x}_{k+1|k})^T H_{k+1|k}^{-1} (x - \hat{x}_{k+1|k}) \leq 1\}, \quad (22)$$

вектор центра $\hat{x}_{k+1|k}$ которого находится путем интегрирования следующего уравнения:

$$d\tilde{x}/dt = f(\tilde{x}(t), u_m(t)), \quad \tilde{x}(t_k) = \hat{x}_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (23)$$

полагая $\hat{x}_{k+1|k} = \tilde{x}(t_{k+1})$. Матрицу эллипсоида $E_{k+1|k}$ предлагается взять в следующем виде:

$$H_{k+1|k} = A_k H_k A_k^T, \quad (24)$$

где $n \times n$ -матрица (n — размерность вектора x)

$$A_k = \exp(\partial_x f(0,5 \cdot (\hat{x}_{k+1|k} + \hat{x}_k), U_{k+1/2}) \Delta T). \quad (25)$$

Здесь $\partial_x f(\cdot, \cdot)$ — матрица Якоби функции $f(\cdot, \cdot)$

$$U_{k+1/2} = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_m(\tau) d\tau. \quad (26)$$

Как следует из вида матрицы A_k , для построения матрицы эллипсоида $E_{k+1|k}$ использовались процедуры линеаризации и усреднения. В общем случае эллипсоид $E_{k+1|k}$ представляет собой некоторую аппроксимацию множества $X_{k+1|k}$, но $E_{k+1|k} \neq X_{k+1|k}$.

Рассмотрим эллипсоид

$$\tilde{E}_{k+1|k} = \{x : (x - \hat{x}_{k+1|k})^T \tilde{H}_{k+1|k}^{-1} (x - \hat{x}_{k+1|k}) \leq 1\}, \quad (27)$$

центр которого совпадает с центром эллипсоида $E_{k+1|k}$, а матрица

$$\tilde{H}_{k+1|k} = \alpha^2 H_{k+1|k}, \quad (28)$$

где число $\alpha \geq 1$. Геометрически эллипсоид $\tilde{E}_{k+1|k}$ получается при равномерном расширении эллипсоида $E_{k+1|k}$ в α раз относительно его центра.

Утверждение. При условии, что функция $f(\cdot, \cdot)$ в уравнении (16) такова, что матрица A_k , определяемая (25), невырождена и ограничена, помеха измерения $\xi_u(t)$ ограничена, существует такое конечное число $\alpha \geq 1$, что

$$X_{k+1|k} \subseteq \tilde{E}_{k+1|k}. \quad (29)$$

Рассмотрим алгоритм эллипсоидального оценивания вектора состояния x_k системы (16), который заключается в построении последовательности эллипсоидов

дов $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$, для центров которых гарантированно выполняется $\hat{x}_k \in \bar{X}_k$. Эту последовательность предлагается строить следующим образом.

Пусть в момент дискретного времени k эллипсоид E_k уже построен. Тогда с помощью формул (23)–(26) определяются параметры эллипсоида $E_{k+1|k}$. Если

$$E_{k+1|k} \cap \bar{X}_{k+1} \neq \emptyset, \quad (30)$$

то в качестве эллипсоида E_{k+1} берется эллипсоид, содержащий множество $E_{k+1|k} \cap \bar{X}_{k+1}$ и многомерный объем которого меньше объема $E_{k+1|k}$, т.е. $V(E_{k+1}) \leq V(E_{k+1|k})$. При этом построение эллипсоида E_{k+1} осуществляется таким образом, чтобы его центр $\hat{x}_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}$. В частности, такое построение можно осуществить, используя локальную аппроксимацию множества \bar{X}_{k+1} с помощью опорных гиперплоскостей и последовательные итеративные оптимальные процедуры [28–31] покрытия эллипсоидом пересечения полученных при такой аппроксимации полупространства или полосы с эллипсоидом, полученным на предыдущей итерации. В качестве начального эллипсоида берется $E_{k+1|k}$, а полученный в результате эллипсоид принимается за E_{k+1} .

Если в процессе построения эллипсоида E_{k+1} оказалось, что условие (30) не выполнено, то вместо эллипсоида $E_{k+1|k}$ берется эллипсоид $\tilde{E}_{k+1|k}$, для которого параметр $\alpha \geq 1$ выбирается из условия выполнения (30). После этого построение эллипсоида E_{k+1} выполняется так, как описано выше. Для центра полученного в результате такого построения эллипсоида E_{k+1} всегда выполняется $\hat{x}_{k+1} \in \bar{X}_{k+1} \quad \forall k$.

Рассмотрим реализацию изложенного подхода построения последовательности оценок вектора состояния $\{\hat{x}_k\}$ (центров эллипсоидов) применительно к уравнениям (1), (5) и (8) с учетом ограничений (4), (9), (11) и (13).

3. Алгоритм построения оценок параметров движения по измерениям БИНС/ГНСС

Пусть в момент времени t_k известно, что вектор состояния $x_k \in E_k$, где эллипсоид $E_k = \{x : (x - \hat{x}_k)^T H_k^{-1} (x - \hat{x}_k) \leq 1\}$. Можно записать, что

$$x_k = \hat{x}_k + \Delta x_k, \quad (31)$$

где вектор $\Delta x_k \in E_k(0) = \{x : x^T H_k^{-1} x \leq 1\}$, $E_k(0)$ — эллипсоид с центром в начале координат. Обозначим $\tilde{x}(t) = (\tilde{X}^T, \tilde{V}^T, \tilde{q}^T, \tilde{b}^T)^T$ решение на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ следующих уравнений:

$$\begin{cases} d\tilde{X} / dt = \tilde{V}, \\ d\tilde{V} / dt = F(\tilde{q}) \cdot \tilde{a}_m - (0 \ 0 \ G)^T, \\ d\tilde{q} / dt = \frac{1}{2} \Omega(\tilde{q}) \cdot (\tilde{\omega}_m - \tilde{b}), \\ d\tilde{b} / dt = 0 \end{cases} \quad (32)$$

при начальном условии $\tilde{x}(t_k) = \hat{x}_k$. В этом уравнении $\tilde{\omega}_m(t)$ и $\tilde{a}_m(t)$ — непрерывные векторные функции, полученные с помощью линейной интерполяции дискретных измерений БИНС с периодом дискретности Δt . Подставляя выраже-

ние $x(t) = \tilde{x}(t) + \Delta x(t)$ в уравнения (1), (5) и (8), после линеаризации и отбрасывания членов порядка больше первого получаем для $\Delta x(t) = (\Delta X^T, \Delta V^T, \Delta q^T, \Delta b^T)^T$ следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \Delta \dot{X} = \Delta V, \\ \Delta \dot{V} = \partial(F(\tilde{q}) \cdot \tilde{a}_m) / \partial q \Delta q, \\ \Delta \dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(\Delta q) \cdot (\tilde{\omega}_m - \tilde{b}) - \frac{1}{2} \Omega(\tilde{q}) \cdot \Delta b, \\ \Delta \dot{b} = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Матрица $\Omega(\Delta q)$, как видно из (6), зависит от q линейно. Поэтому уравнение для $\Delta \dot{q}$ можно записать в следующем виде:

$$\Delta \dot{q} = \frac{1}{2} \Omega(\Delta q) \cdot (\tilde{\omega}_m - \tilde{b}) = \frac{1}{2} A_\Omega(\tilde{\omega}_m - \tilde{b}) \Delta q - \frac{1}{2} \Omega(\tilde{q}) \cdot \Delta b, \quad (34)$$

где матрица

$$A_\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Матрица $\partial(F(\tilde{q}) \cdot \tilde{a}_m) / \partial q$ в уравнении для $\Delta \dot{V}$ имеет следующий вид:

$$\partial(F(\tilde{q}) \cdot \tilde{a}_m) / \partial q = A_F(\tilde{q}, \tilde{a}_m) = \begin{pmatrix} (\nabla_q(F_1(q) \cdot \tilde{a}_m))_{q=\tilde{q}}^T \\ (\nabla_q(F_2(q) \cdot \tilde{a}_m))_{q=\tilde{q}}^T \\ (\nabla_q(F_3(q) \cdot \tilde{a}_m))_{q=\tilde{q}}^T \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где $\nabla_q(F_i(q) \cdot \tilde{a}_m)$ — градиент по q от скалярного произведения $F_i(q) \cdot \tilde{a}_m$ i -й строки матрицы $F(q)$ и вектора \tilde{a}_m , взятый при $q = \tilde{q}$.

С учетом (34)–(36) систему уравнений (33) запишем в виде

$$\Delta \dot{x} = A(\tilde{q}, \tilde{a}_m, \tilde{\omega}_m, \tilde{b}) \Delta x, \quad (37)$$

где $n \times n$ — матрица

$$A(\tilde{q}, \tilde{a}_m, \tilde{\omega}_m, \tilde{b}) = \begin{pmatrix} \Theta_{3 \times 3} & I_3 & \Theta_{3 \times 4} & \Theta_{3 \times 3} \\ \Theta_{3 \times 3} & \Theta_{3 \times 3} & A_F(\tilde{q}, \tilde{a}_m) & \Theta_{3 \times 3} \\ \Theta_{4 \times 3} & \Theta_{4 \times 3} & 0,5 A_\Omega(\tilde{\omega}_m - \tilde{b}) & -0,5 \Omega(\tilde{q}) \\ \Theta_{3 \times 3} & \Theta_{3 \times 3} & \Theta_{3 \times 4} & \Theta_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Здесь $\Theta_{3 \times 3}$ — нулевая 3×3 -матрица, I_3 — единичная 3×3 -матрица. Рассмотрим множество решений уравнения (37) в момент времени $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ при условии, что начальный вектор $\Delta x(t_k) = \Delta x_k \in E_k(0)$. Известно [14–16], что это множество является эллипсоидом с центром в нуле. Для получения его матрицы необходимо интегрировать систему дифференциальных уравнений для каждого из элементов его матрицы. В эту систему уравнений входит матрица $A(\tilde{q}, \tilde{a}_m, \tilde{\omega}_m, \tilde{b})$, которая становится известной в процессе интегрирования уравнений (33). Это относи-

тельно трудоемкий процесс, который требует дополнительных времени и объема памяти компьютера. Поэтому в соответствии с методом, изложенным в предыдущем разделе, заменим уравнение (37) следующим автономным уравнением:

$$\Delta \dot{x} = \bar{A} \Delta x, \quad (39)$$

где постоянная матрица

$$\bar{A} = A(\tilde{q}_{k+1/2}, \bar{a}_{m,k+1/2}, \bar{\omega}_{m,k+1/2}, \tilde{b}_k), \quad (40)$$

кватернион

$$\tilde{q}_{k+1/2} = (\tilde{q}_{k+1} + \tilde{q}_k) / \|\tilde{q}_{k+1} + \tilde{q}_k\|.$$

Матрица \bar{A} вычисляется с использованием усредненных на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ величин

$$\bar{a}_{m,k+1/2} = (\Delta T)^{-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{a}_m(t) dt, \quad \bar{\omega}_{m,k+1/2} = (\Delta T)^{-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{\omega}_m(t) dt, \quad (41)$$

которые доступны к моменту времени t_{k+1} . Для уравнения (39) справедливо

$$\Delta x_{k+1} = A_{k+1} \Delta x_k, \quad (42)$$

где $A_{k+1} = \exp(\bar{A} \Delta T)$. При условии, что Δx_k принимает всевозможные значения из эллипсоида $E_k(0)$, $\Delta x_k \in E_k(0)$, вектор Δx_{k+1} также принадлежит эллипсоиду

$$\Delta x_{k+1} \in E_{k+1|k}(0) = \{x : x^T H_{k+1|k}^{-1} x \leq 1\}, \quad (43)$$

где матрица

$$H_{k+1|k} = A_{k+1} H_k A_{k+1}^T. \quad (44)$$

Окончательно полагаем

$$E_{k+1|k} = \{\tilde{x}_{k+1}\} + E_{k+1|k}(0) = \{x : (x - \hat{x}_{k+1|k})^T H_{k+1|k}^{-1} (x - \hat{x}_{k+1|k}) \leq 1\}. \quad (45)$$

Здесь $\hat{x}_{k+1|k} = \tilde{x}_{k+1}$, а сложение понимается как векторная сумма множеств.

Рассмотрим способ построения эллипсоида E_{k+1} . Множество \bar{X}_{k+1} , связанное с измерениями, можно представить в следующем виде:

$$\bar{X}_{k+1} = \bigcap_{j=1}^7 \bar{X}_{j,k+1}, \quad (46)$$

где каждое из множеств

$$\bar{X}_{j,k+1} = \{x \in R^n : |f_j(x) - y_{j,k+1}| \leq c_j\}, \quad j = \overline{1, 7}, \quad (47)$$

связано с одним из неравенств (20), рассматриваемых для момента времени $k+1$. Первые три множества $\bar{X}_{j,k+1}$, $j = \overline{1, 3}$, связаны с неравенствами (11) измерения положения и могут быть записаны в виде

$$\bar{X}_{j,k+1} = \{x \in R^n : |e_j^T x - X_{m,j}(t_{k+1})| \leq c_X\}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (48)$$

где векторы e_j , $j = \overline{1, 3}$, представляют собой первые три вектора стандартного базиса R^n . Каждое из множеств $\bar{X}_{j,k+1}$, $j = \overline{1, 3}$, как следует из (48), является многомерным слоем в R^n . Для построения эллипсоида $E_{s=1}$, содержащего пере-

сечение множеств $\overline{X}_{j,k+1}$, $j = \overline{1, 3}$, используется алгоритм, изложенный в [24], при этом эллипсоид $E_{k+1|k}$ берется в качестве начального $E_{s=0}$. Вектор центра получаемого в результате эллипсоида E_s будет удовлетворять неравенствам (48).

Нормировка оценки кватерниона выполняется с помощью операции сжатия пространства R^n по части переменных [29]. Матрица H_s эллипсоида E_s может быть единственным образом представлена в виде $H_s = G_s^T G_s$, где G_s — некоторая матрица. Для любого вектора $x \in E_s$ справедливо следующее представление:

$$x = x_s + G_s \varepsilon, \quad \|\varepsilon\| \leq 1. \quad (49)$$

Для части вектора состояния — вектора q — отсюда можно получить

$$q = q_s + G_s(7:10, 1:13)\varepsilon, \quad \|\varepsilon\| \leq 1. \quad (50)$$

Здесь $4 \times n$ -матрица $G_s(7:10, 1:13)$ составлена из строк 7–10 матрицы G_s . Пусть $\lambda_s = |q_s|^{-1} = (q_{s,0}^2 + q_{s,1}^2 + q_{s,2}^2 + q_{s,3}^2)^{-1/2} \neq 1$. Каждый вектор q эллипсоида E_s (определяемый (50)) делим на число λ_s . В результате получим эллипсоид

$$E_{s+1} = \{x = x_s(\lambda_s) + G_s(\lambda_s)\varepsilon, \quad \|\varepsilon\| \leq 1\}, \quad (51)$$

где

$$x_s(\lambda_s) = (X_s^T, V_s^T, \lambda_s^{-1} q_s^T, b_s^T)^T, \quad G_s(\lambda_s) = \begin{pmatrix} G_s(1:6, 1:n) \\ \lambda_s^{-1} G_s(7:10, 1:n) \\ G_s(11:n, 1:n) \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Очевидно, при таком преобразовании области изменения остальных координат векторов из эллипсоида E_s не изменятся.

Рассмотрим построение эллипсоида, центр которого принадлежит пересечению эллипсоида E_s и множеств $\overline{X}_{j,k+1}$, $j = \overline{4, 6}$, соответствующих неравенствам (13).

В результате будет получена оценка вектора состояния (вектор центра эллипсоида), которая согласована с измерениями магнитного поля. Прежде заметим, что три неравенства (13) в совокупности с условием нормировки кватерниона (т.е. три неравенства и одно равенство, всего четыре ограничения) не позволяют однозначно определить кватернион даже при отсутствии помех измерения, $\xi_{m,k} \equiv 0$.

Действительно, пусть известно истинное положение связанной системы координат, т.е. известен единичный кватернион ориентации этой системы координат (относительно СКЗ). При отсутствии помех координаты измеренного вектора магнитного поля B_m связаны с координатами вектора B_0 в связанной системе координат соотношением $B_m = F^T(q)B_0$. Если повернуть эту систему координат вокруг вектора B_0 на произвольный угол, то координаты вектора B_0 в такой системе координат на оси связанной системы координат не изменятся. Но при указанном повороте системы координат кватернион ориентации будет меняться, при этом его норма будет неизменна, т.е. условие нормировки будет выполнено. Следовательно, измерение магнитного поля не позволяет однозначно определить кватернион ориентации.

Построение эллипсоида, центр которого удовлетворяет неравенствам (13), предлагается выполнить итерационно в соответствии с приведенным ниже алго-

ритмом. Пусть E_s — исходный эллипсоид, полученный после операции нормировки (51) и (52). Пусть для некоторого j центр эллипсоида E_s — вектор $x_s = (X_s^T, V_s^T, q_s^T, b_s^T)^T$ — не содержится во множестве $\bar{X}_{j,k+1}$, $j=4,6$, т.е. $x_s \notin \bar{X}_{j,k+1}$. Это означает, что

$$|g_i(q_s) - B_{mi}| \geq c_m, \quad i = j-3, \quad (53)$$

где

$$g_i(q) = F_i^T(q)B_0. \quad (54)$$

Необходимо построить эллипсоид E_{s+1} , который имеет непустое пересечение со множеством $\bar{X}_{j,k+1}$ и исходным эллипсоидом E_s и центр которого x_{s+1} удовлетворяет неравенству

$$|g_i(q) - B_{mi}| < c_m, \quad i = j-3. \quad (55)$$

Исследуем структуру множеств $\bar{X}_{j,k+1}$. Можно убедиться, что функция $g_i(q)$ представляет собой квадратичную форму относительно вектора q . Действительно, для $i=1$ имеем

$$\begin{aligned} g_1(q) &= F_1^T(q)B_0 = (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)B_{0,1} + 2(q_1q_2 + q_0q_3)B_{0,2} + 2(q_1q_3 - q_0q_2)B_{0,3} = \\ &= (q_0, q_1, q_2, q_3) \begin{pmatrix} B_{0,1} & 0 & -B_{0,3} & B_{0,2} \\ 0 & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ -B_{0,3} & B_{0,2} & -B_{0,1} & 0 \\ B_{0,2} & B_{0,3} & 0 & -B_{0,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = q^T A_1(B_0) q, \end{aligned} \quad (56)$$

где матрица

$$A_1(B_0) = \begin{pmatrix} B_{0,1} & 0 & -B_{0,3} & B_{0,2} \\ 0 & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ -B_{0,3} & B_{0,2} & -B_{0,1} & 0 \\ B_{0,2} & B_{0,3} & 0 & -B_{0,1} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Аналогичные (56) представления справедливы для функций $g_2(q)$ и $g_3(q)$. Поэтому окончательно запишем

$$g_i(q) = q^T A_i(B_0) q, \quad i = \overline{1,3}, \quad (58)$$

где

$$A_2(B_0) = \begin{pmatrix} B_{0,2} & B_{0,3} & 0 & -B_{0,1} \\ B_{0,3} & -B_{0,2} & B_{0,1} & 0 \\ 0 & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ -B_{0,1} & 0 & B_{0,3} & -B_{0,2} \end{pmatrix}, \quad A_3(B_0) = \begin{pmatrix} B_{0,3} & -B_{0,2} & B_{0,1} & 0 \\ -B_{0,2} & -B_{0,3} & 0 & B_{0,1} \\ B_{0,1} & 0 & -B_{0,3} & B_{0,2} \\ 0 & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Каждая матрица $A_i(B_0)$, $i = \overline{1,3}$, имеет четыре собственных значения, два из которых отрицательны и равны $-\|B_0\|$, два других равны $\|B_0\|$. Следовательно,

функции $g_i(q), i = \overline{1, 3}$, обладают седловой точкой, а множества значений q , удовлетворяющих каждому из неравенств (55), являются в общем случае невыпуклыми и несвязными.

Для построения эллипсоида E_{s+1} предлагается вместо нелинейных неравенств (55) рассматривать их линейные аппроксимации. А именно, использовать линейную аппроксимацию функции $g_i(q)$ в окрестности точки $q = q_s$ следующего вида:

$$g_i(q) \approx g_i(q_s) + (\nabla_q g_i(q)|_{q=q_s}, (q - q_s)) = g_i(q_s) + 2q_s^T A_i^T(B_0)(q - q_s), \quad (60)$$

где градиент

$$\nabla_q g_i(q)|_{q=q_s} = 2A_i(B_0)q_s. \quad (61)$$

В результате из (55) с учетом (60) получаем

$$|2q_s^T A_i^T(B_0)(q - q_s) + g_i(q_s) - B_{mi}| < c_m, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (62)$$

Заметим, что градиенты $\nabla_q g_i(q)|_{q=q_s}$ функций $g_i(q)$ попарно ортогональны, в чем можно убедиться непосредственными вычислениями с использованием выражений (57) и (59).

Множество векторов x , удовлетворяющих неравенству (62), запишем в виде

$$\Pi_{s,i} = \{x : |z_{i,s}^T x - y_{i,s}| \leq c_m\}, \quad (63)$$

где

$$z_{i,s} = \begin{pmatrix} \Theta_{6 \times 1} \\ 2A_i(B_0)q_s \\ \Theta_{3 \times 1} \end{pmatrix}, \quad y_{i,s} = g_i(q_s) + B_{mi}. \quad (64)$$

Эллипсоид E_{s+1} строится с использованием параметров E_s и $\Pi_{s,i}$ в соответствии с алгоритмом [24].

Если неравенство (56) для центра эллипсоида E_s выполняется, то полагаем $E_{s+1} = E_s$ и рассматриваем для этого эллипсоида следующее неравенство и т.д. Этот процесс построения последовательности эллипсоидов $\{E_s\}$ является конечносходящимся [24], т.е. в результате процесс уточнения параметров эллипсоидов E_s остановится и будет получен эллипсоид E_S , для центра которого будут выполнены все неравенства (55). Этот эллипсоид и принимается за эллипсоид E_{k+1} , т.е. полагаем $E_{k+1} = E_S$. Конечная сходимости предлагаемого алгоритма построения $\{E_s\}$ следует из предположения о том, что множество (46) не пусто.

4. Имитационное моделирование

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма оценивания параметров движения был использован тестовый пример, в котором имитировалось перемещение объекта по эллиптической траектории со спусками и подъемами. Параметры тестового примера были предоставлены сотрудниками Аэрокосмического центра Национального авиационного университета (г. Киев).

Траектория центра масс объекта в СКЗ задавалась следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \alpha \cos \omega t; \\
y(t) &= \beta \sin \omega t; \\
z(t) &= 0,5h_0 + 0,5h_0 \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} x(t)\right).
\end{aligned} \tag{65}$$

Параметры этих уравнений следующие: $\alpha = 100$ м, $\beta = 30$ м, $h_0 = 15$ м, $\omega = 1/25$ с⁻¹. Несложно убедиться, что при таком выборе параметров скорость точки (прибора) изменяется примерно от 5 до 17 км/ч. Угловые скорости, измеряемые в СК БИНС, выбраны в виде

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= \omega_{10} \sin \gamma_1 t, \\
\omega_2(t) &= \omega_{20} \sin \gamma_2 t, \\
\omega_3(t) &\equiv \omega_{30} = \omega.
\end{aligned} \tag{66}$$

Предполагалось, что ось 1 СК БИНС направлена примерно вдоль вектора скорости движения, ось 2 — по вектору главной нормали к траектории, а ось 3 — так, чтобы получалась ортогональная правая тройка. В (66) выбраны следующие значения параметров:

- $\omega_{10} = 0,1$ рад/с; $\gamma_1 = 2\pi$ с⁻¹. При таких параметрах период изменения скорости — 1 с;
- $\omega_{20} = 1$ рад/с; $\gamma_2 = 2\pi/10$ с⁻¹. Здесь период колебаний больше — 10 с и амплитуда колебаний больше;
- скорость вокруг третьей оси предлагается брать постоянной равной $\omega = 1/25$ с⁻¹, $\omega_3(t) \equiv \omega_{30} = \omega$. При таком выборе угловой скорости поворот прибора выполняется так, чтобы ось 1 системы координат прибора была примерно направлена вдоль его вектора скорости.

Начальный кватернион

$$q(0) = (1, 0, 0, 0), \tag{67}$$

что соответствует совпадению осей СК БИНС и СКЗ.

По известным уравнениям движения (65) рассчитаны скорости

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -\alpha\omega \sin \omega t; \\
\dot{y}(t) &= \beta\omega \cos \omega t; \\
\dot{z}(t) &= 0,5h_0 \frac{\pi}{2\alpha} \dot{x}(t) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} x(t)\right)
\end{aligned} \tag{68}$$

и ускорения

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= -\alpha\omega^2 \cos \omega t; \\
\ddot{y}(t) &= -\beta\omega^2 \sin \omega t; \\
\ddot{z}(t) &= 0,5h_0 \frac{\pi}{2\alpha} \ddot{x}(t) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} x(t)\right) - 0,5h_0 \left(\frac{\pi}{2\alpha} \dot{x}(t)\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} x(t)\right)
\end{aligned} \tag{69}$$

в системе координат, связанной с Землей.

Вектор магнитного поля B_0 в системе координат, связанной с Землей, взят из сайта [32]. В районе Киева (широта 50° 26' 53", долгота 30° 30' 8")

$$B_0 = (19315, 2488, 46445) \text{ нТл}. \tag{70}$$

Все перечисленные данные (66)–(70) использованы для расчета истинных параметров движения — вектора $x_k = x(t_k) = (X^T(t_k), V^T(t_k), q^T(t_k), b^T(t_k))^T$, а также измеренных с погрешностью значений — векторов $X_m(t_k), B_m(t_k), a_m(t_k), \omega_m(t_k)$, ко-

торые являются входными переменными для описанного выше алгоритма. Для расчета этих величин необходимо знание кватерниона $q(t)$, который вычислялся путем численного интегрирования уравнения

$$\dot{q} = 0,5\Omega(q)\omega(t) \quad (71)$$

с использованием начального условия (67) и выражений (66) для угловых скоростей. Измеренные значения моделировались следующими выражениями:

$$\begin{aligned} X_m(t_k) &= X(t_k) + \xi_X(t_k), \\ B_m(t_k) &= F^T(q_k)B_0 + \xi_B(t_k), \\ a_m(t_k) &= F^T(q_k)(a(t_k) + (0, 0, G)^T) + \xi_a(t_k), \\ \omega_m(t_k) &= \omega(t_k) + b(t_k) + \xi_\omega(t_k). \end{aligned} \quad (72)$$

Максимальные значения помех измерений предполагались известными $c_X = 5$, $c_B = 10$, $c_a = 0,1$, $c_\omega = 0,01$. Элементы постоянного вектора $b(t_k)$ систематической ошибки при измерении угловой скорости выбирались из интервала $[-0,5; 0,5]$. В качестве последовательностей помех рассматривались процессы типа белого шума с равномерным распределением значений помех в пределах ограничений, а также помехи с усеченным нормальным распределением.

Параметры априорного эллипсоида $E_0 = \{x : (x - \hat{x}_0)^T H_0^{-1} (x - \hat{x}_0) \leq 1\}$ не предполагались известными и выбирались произвольно. В частности, начальный кватернион $q_0 = (0,5; 0,5; 0,5; 0,5)^T$, остальные начальные параметры полагались нулевыми, матрица $H_0 = 0,1 \cdot I$. С помощью численного моделирования исследовалась зависимость устойчивости и точности описанного выше алгоритма оценивания от значения начальных условий. Было установлено, что эти свойства алгоритма очень слабо зависели от значения начальных данных.

На рис. 1–4 приведены графики изменения ошибок оценок во времени, получаемых с помощью описанного алгоритма для каждого из векторов, составляющих вектор состояния при $b(t_k) = (0,3; 0,4; 0,5)^T$.

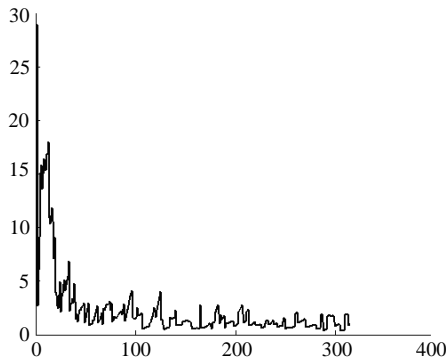


Рис. 1

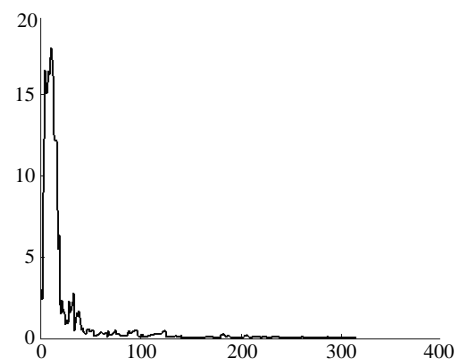


Рис. 2

Из графика на рис. 1 видно, что ошибка определения положения хотя и меньше, чем максимальная ошибка измерения положения c_X , но продолжает изменяться во времени. Это связано с тем, что процесс оценивания вектора состояния продолжается, хоть и с меньшей интенсивностью, т.е. число уточнений вектора состояния уменьшается со временем. За время наблюдения в течение 315 с ошибка определения скорости в рассматриваемом примере уменьшилась до 0,015 м/с. На

рис. 3 и 4 приведены изменения величин $\|q_k - \hat{q}_k\|_\infty$ и $\|b_* - \hat{b}_k\|_\infty$. Эти величины в конце рассматриваемого временного интервала не равны нулю. Ошибка оценки кватерниона равна $2 \cdot 10^{-3}$, а ошибка оценки смещения показаний гироскопов не превышает $2,5 \cdot 10^{-6}$.

Эти предельные значения ошибок мало менялись при проведении расчетов для других значений смещений показаний каждого из гироскопов, которые выбирались произвольно из интервала $[-0,5; 0,5]$, т.е. максимальные значения смещений не превышали 0,5. Для смещений, превышающих это значение, алгоритм оценивания в некоторых случаях становился неустойчивым. Точные границы области неустойчивости не определялись, так как исследуемые смещения почти вдвое превышали реальные измерения угловых скоростей, что не имеет места на практике.

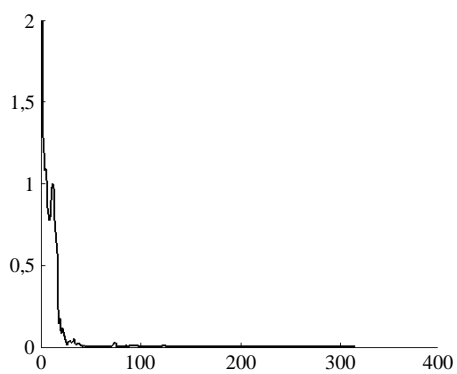


Рис. 3

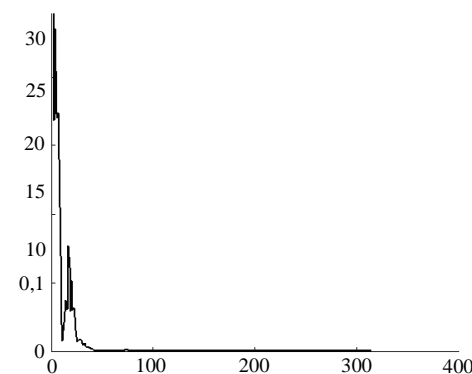


Рис. 4

Заключение

Решение задачи комплексного использования измерений БИНС и ГНСС рассмотрено в так называемой нестохастической постановке, при которой не предполагаются известными стохастические свойства неопределенных величин: параметров и помех. Предполагались известными только множества их возможных значений в виде некоторых интервальных множеств. Такие характеристики для измерительных устройств наиболее часто используются на практике. Поэтому такая постановка задачи в максимальной степени использует априорную информацию, как правило, доступную в реальных условиях.

Основу алгоритма оценивания составил модифицированный метод эллипсоидов [24], который обладает свойством грубости по отношению к нарушению априорных гипотез о неопределенных величинах и свойством конечной сходимости. Известно, что благодаря последнему свойству разработанный алгоритм достаточно экономный в вычислительном плане, оценки вычисляются только в том случае, когда они не согласуются с измеренными данными.

По результатам имитационного моделирования алгоритм успешно компенсировал постоянные смещения в показаниях гироскопов. Более общий случай переменных во времени смещений $b_i(t), i = \overline{1, 3}$, измерений угловых скоростей, зависящих от времени по неизвестному закону, предполагается рассмотреть в дальнейшем на основе результатов, полученных в этой работе.

Несомненный интерес представляет теоретическое исследование устойчивости и точности предложенного в данной работе алгоритма оценивания.

Следующим шагом развития этой работы является реализация и испытания разработанных алгоритмов на конкретной системе БИНС с блоком приема сигналов ГНСС.

М.М. Сальников, В.Ф. Губарев, С.В. Мельничук

ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО ЕЛІПСОЇДАЛЬНОГО ФІЛЬТРА В КОМПЛЕКСОВАНИЙ БЕЗПЛАТФОРМЕНІЙ ІНЕРЦІАЛЬНІЙ НАВІГАЦІЙНІЙ СИСТЕМІ

Розглянуто рішення задачі корекції зміщень показань MEMS гіроскопів, що повільно змінюються, з використанням вимірювань положення об'єкта за допомогою ГНСС. Для похибок вимірювання відомі тільки їх максимальні значення, наявність стохастичних властивостей не передбачається. Орієнтація рухомого об'єкта описується кватерніонами. Задача коригування показань БИНС розглядається в спрощеній постановці, використовується інерціальна система координат, не враховуються сила Кориоліса і неоднорідність гравітаційного поля Землі. Застосування запропонованого підходу продемонстровано на даних тестового прикладу.

N.N. Salnikov, V.F. Gubarev, S.V. Melnichuk

APPLICATION OF THE MODIFIED ELLIPSOIDAL FILTER IN INTEGRATED STRAPDOWN INERTIAL NAVIGATION SYSTEM

The solution of the problem of correction of slowly varying shifts of MEMS gyroscopes using GNSS position measurements is considered. For measurement errors, only their maximum values are known, the presence of stochastic properties is not assumed. The mobile vehicle attitude is described by quaternions. The task of SINS correction is considered in a simplified formulation, an inertial coordinate system is used, the Coriolis force and the inhomogeneity of the Earth's gravitational field are not taken into account. The application of the approach proposed in the article is demonstrated on the test example.

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. — М. : Наука, 1992. — 280 с.
2. *Jekeli C.* Inertial navigation systems with geodetic applications. — Berlin; New York : Walter de Gruyter, 2001. — 352 p.
3. *Farrell J.A.* Aided navigation: GPS with high rate sensors. — New York : McGraw-Hill, 2008. — 530 p.
4. *Salychev O.S.* Applied inertial navigation: Problems and Solutions. — Moscow : BMSTU Press, 2004. — 304 p.
5. *Ориентации и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии /* Под ред. Алешина Б.С., Веремеенко К.К., Черноморского А.И. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 424 с.
6. *Ding W., Wang J., Rizos C., Kinlyside D.* Improving adaptive Kalman estimation in GPS/INS integration // The Journal of Navigation. — 2007. — **60**. — P. 517–529.
7. *Chen Jiang, Shu-bi Zhang, Qiu-zhao Zhang.* A Novel robust interval Kalman filter algorithm for GPS/INS integrated navigation // Journal of Sensors. — 2016. — **2016**, Article ID 3727241. — 7 p. — doi:10.1155/2016/3727241.
8. *Slavov T., Petkov P.* Strapdown inertial system based on improved MEMS error models// Cybernetics and Information Technologies. — 2011. — **11**, N 4. — P. 3–23.

9. *Rabbou M.A., El-Rabbany A.* Nonlinear filtering for precise point positioning GPS/INS integration // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. — 2014. — **XL-2**. — P. 127–132. — doi:10.5194/isprsarchives-XL-2-127-2014.
10. *Rabbou M.A., El-Rabbany A.* Integration of GPS precise point positioning and MEMS-Based INS using unscented particle filter // Journal of Sensors. — 2015. — **15**. — P. 7228–7245. — doi:10.3390/s150407228.
11. *Kalman Filtering and Neural Networks* / Edited by S. Haykin. — New York; Toronto : John Wiley&Sons, Inc., 2001. — 284 p.
12. *Arulampalam M.S., Maskell S., Gordon N., Clapp T.* A tutorial on particle filters for online non-linear/non-Gaussian Bayesian tracking // IEEE Trans. on Signal processing. — 2002. — **50**, N 2. — P. 174–188.
13. *Schwepe F.C.* Uncertain dynamic systems. — Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1973. — 563 p.
14. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М. : Наука, 1977. — 392 с.
15. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. — М. : Наука, 1988. — 320 с.
16. *Избранные труды А.Б. Куржанского* / Отв. ред. А.Н. Дарьин, И.А. Дигайлова, И.В. Рублев. — М. : Издательство Московского университета, 2009. — 756 с.
17. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
18. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — вып. 3. — С. 106–125.
19. *Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J.* Introduction to interval analysis. — Philadelphia : SIAM, 2009. — 223 p.
20. *Zonotopes: From guaranteed state-estimation to control* / V.T.H. Le, C. Stoica, T. Alamo, E.F. Camacho, D. Dumur. — Hoboken : John Wiley & Sons, 2013. — 150 p.
21. *Garulli A., Vicino A.* A linear programming approach to online set membership parameter estimation for linear regression models // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2016. — **31**. — P. 360–378.
22. *Волосов В.В., Тютюнник Л.И.* Разработка и исследование робастных алгоритмов гарантированного эллипсоидального оценивания состояния многомерных линейных дискретных динамических систем. Часть 1 // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 4. — С. 31–43.
23. *Волосов В.В., Тютюнник Л.И.* Разработка и исследование робастных алгоритмов гарантированного эллипсоидального оценивания состояния многомерных линейных дискретных динамических систем. Часть 2 // Там же. — 1997. — № 6. — С. 52–65.
24. *Сальников Н.Н.* Об одной модификации алгоритма оценивания параметров линейной регрессии с помощью эллипсоидов // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 2. — С. 65–81.
25. *Сальников Н.Н.* Эллипсоидальное оценивание состояния и параметров динамической системы при отсутствии априорной информации об оцениваемых величинах // Там же. — 2014. — № 2. — С. 144–156.
26. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М. : Наука, 1973. — 320 с.
27. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. — М. : Физматлит, 2001. — 320 с.
28. *Шор Н.З., Гершович В.И.* Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. — 1979. — № 4. — С. 62–67.
29. *Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. — М. : Наука, 1986. — 264 с.
30. *Волосов В.В.* Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем // Автоматика. — 1991. — № 3. — С. 24–32.
31. *Бакан Г.М.* Фильтрация в условиях нестатистически заданной неопределенности // Там же. — 1980. — № 2. — С. 13–21.
32. http://geomag.bgs.ac.uk/data_service/models_compass/wmm_calc.html

Получено 06.10.2017