

# ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

---

УДК 519.8

*Е.М. Киселева, О.М. Притоманова, С.В. Журавель*

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ С НЕЙРОЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ФУНКЦИЙ, ВХОДЯЩИХ В ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИОНАЛ

### Введение

Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств (ОРМ) является активно развивающимся направлением современной теории оптимизации. Актуальность теории оптимального разбиения множеств обусловлена широким спектром ее теоретических и практических приложений [1, 2].

Среди различных классов непрерывных задач ОРМ можно выделить мало изученные задачи оптимального разбиения в условиях неопределенности. Для снятия неопределенности в таких задачах может применяться математический аппарат стохастического бесконечномерного математического программирования (если часть исходной информации имеет вероятностный характер) или аппарат нечетких множеств и нечеткой логики (если параметры, входящие в описание моделей, являются нечеткими, неточными, недостоверными, имеется недостоверное математическое описание некоторых зависимостей в модели либо явный аналитический вид таких зависимостей неизвестен и требуется его восстановление).

В данной работе для одной из непрерывных задач оптимального разбиения множеств из [1, 2] предлагается для идентификации (восстановления) некоторых входящих в целевой функционал функций, явный аналитический вид которых неизвестен, применить нейронечеткие технологии [3].

### 1. Постановка задачи

Приведем математическую постановку непрерывной линейной задачи ОРМ  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества без ограничений с отысканием координат некоторых характерных для каждого подмножества точек, называемых «центрами» подмножеств [2].

Пусть  $\Omega$  — ограниченное, измеримое по Лебегу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ . Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  множества  $\Omega \subset E_n$  назовем возможным разбиением множества  $\Omega$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , если  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega$ ,  $\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$ ,

$i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , где  $\text{mes}(\cdot)$  означает меру Лебега. Обозначим  $\Sigma_N^{\Omega}$  класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , т.е.

© Е.М. КИСЕЛЕВА, О.М. ПРИТОМАНОВА, С.В. ЖУРАВЕЛЬ, 2018

*Международный научно-технический журнал*

*«Проблемы управления и информатики», 2018, № 2*

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Введем функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx.$$

Непрерывной линейной задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) без ограничений с отысканием координат центров  $\tau_1, \dots, \tau_N$  этих подмножеств соответственно называется следующая задача.

**Задача А.** Найти

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}),$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N,$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ; функции  $c(x, \tau_i)$  ограниченные, определенные на  $\Omega \times \Omega$ , измеримые по аргументу  $x$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$  из  $\Omega$  для всех  $i = 1, \dots, N$ ; координаты  $\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центра  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , заранее неизвестны;  $\rho(x)$  — ограниченная, измеримая, неотрицательная на  $\Omega$  функция;  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  — заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, N.$$

Здесь и в дальнейшем интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , равна нулю.

Разбиение  $\{\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}\}$ , являющееся решением задачи А, назовем оптимальным.

На рис. 1 изображено разбиение множества  $\Omega \subset E_2$  на три подмножества:  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  с центрами  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  этих подмножеств соответственно.

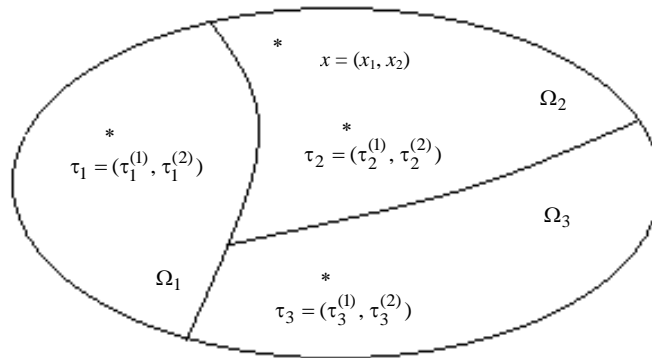


Рис. 1

Введем характеристические функции подмножеств  $\Omega_i$ :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} i = 1, \dots, N,$$

и перепишем задачу А.

**Задача Б.** Найти  $\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau)$ ,

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ п.в. для } x \in \Omega\},$$

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega,$$

$$i = 1, \dots, N, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ п.в. для } x \in \Omega\}; \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N.$$

Здесь

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx. \quad (1)$$

Как доказано в [2], для каждого фиксированного набора  $\tau \in \Omega^N$  (в предположении, что  $\rho(x) \geq 0$  п.в. для  $x \in \Omega$ ) имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для того чтобы возможное разбиение  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$  множества  $\Omega$  для каждого фиксированного  $\tau \in \Omega$  было оптимальным для задачи А, необходимо и достаточно, чтобы

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_j) + a_j, \quad i \neq j, \text{ п.в. для } x \in \Omega_{*i}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

*Следствие.* В точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega_{*i}$  и  $\Omega_{*j}$ , в неравенстве (2) достигается знак равенства.

**Теорема 2.** Компоненты характеристической вектор-функции  $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$ , соответствующей оптимальному решению  $(\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N})$  задачи А для  $i = 1, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$ , имеют такой вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{п.в. для } c(x, \tau_{*i}) + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) + a_j, \\ i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, & j = 1, \dots, N, \text{ п.в. для } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{п.в. для } x \in \Omega_{*i}, \end{cases} \quad (3)$$

в качестве  $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx \rightarrow \min, \quad \tau \in \Omega^N. \quad (4)$$

Заметим, что в математической постановке задачи А и в различных обобщениях этой задачи из [1,2] в целевые функционалы входят функции  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и  $\rho(x)$ , которые, например, в терминах бесконечномерных транспортных задач и задач размещения имеют следующий смысл:  $c(x, \tau_i)$  — стоимость транспортировки единицы продукции из пунктов производства  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в пункт потребления с координатой  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а  $\rho(x)$  — функция спроса потребителя  $x$  на продукцию, производящуюся пунктом производства  $\tau_i$ .

Также напомним [2], что в бесконечномерных транспортных задачах и задачах размещения предполагается, что спрос распределен либо равномерно в заданной области, либо с заданной плотностью  $\rho(x)$ . Поэтому функцию  $\rho(x)$  далее будем называть спросом или плотностью.

В [2] предполагалось, что для функций  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и  $\rho(x)$  известна явная аналитическая зависимость от их аргументов. Однако на практике эта зависимость (как правило, сложная нелинейная) неизвестна. Кроме того, часто невозможно учесть в явном аналитическом виде влияние некоторых реальных факторов по причине либо недостатка информации о моделируемой зависимости, либо

сложности учета многообразия факторов, оказывающих влияние на характер данной зависимости. Для бесконечномерной транспортной задачи, например, на спрос  $\rho(x)$  могут влиять такие факторы, как изменение уровня дохода потребителя, колебание валютного курса, нестабильность политической обстановки, колебание цен на бензин и др.

Для моделирования сложных процессов, объектов, систем, если нет явной аналитической зависимости, описывающей поведение исследуемого объекта, или экспертные знания об объекте можно сформулировать только в лингвистической форме, целесообразно применять системы с нечеткой логикой [3,4]. Задача идентификации (восстановления) сложной нелинейной зависимости рассматривается как построение модели объекта по экспертно-экспериментальным данным о взаимосвязи «вход–выход» [3]. Подход к лингвистической идентификации основан на аппроксимации нелинейных объектов с помощью систем нечеткого логического вывода. Процесс нечеткого логического вывода представляет собой некоторую процедуру или алгоритм получения нечетких заключений на основе нечетких условий или предпосылок с использованием основных понятий и методов теорий нечетких множеств и нечеткой логики, таких как функции принадлежности, лингвистические переменные, операции над нечеткими множествами, нечеткие отношения, методы нечеткой импликации и нечеткой композиции и др.

Однако точность нечеткой модели зависит от ее структуры, а именно: базы знаний и параметров функций принадлежности, а также реализации логических операций и др. Поскольку эти компоненты выбираются субъективно, они могут быть не вполне адекватны моделируемому объекту, поэтому на первом этапе формируется грубая модель объекта, которая аппроксимирует связь «вход–выход». В настоящее время все чаще для повышения качества модели в системах с нечеткой логикой используют нейронные сети, которые применяют для получения более точной модели, решая задачу оптимизации ее параметров через настройку нечеткой нейронной сети.

Такое объединение нейронных сетей и нечеткой логики лежит в основе нейро-нечетких технологий, которые позволяют учитывать неопределенности не только статистической, но и лингвистической природы [3].

В данной работе предлагается применить нейро-нечеткие технологии для идентификации зависимости функции  $\rho(x)$  от ее аргументов.

## 2. Нейролингвистическая идентификация зависимости функции $\rho(x)$ от ее аргументов

Рассмотрим функциональную зависимость выхода  $y$  от входов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в виде

$$y = \rho(x), \text{ где } x = (x_1, \dots, x_n), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Для задачи идентификации предполагаются известными:

1) области определения входов и область изменения выхода для (5):

$$U_i = [x_{\min i}, x_{\max i}] \text{ — области определения входных переменных } x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$U = U_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times U_n$  —  $n$ -мерный параллелепипед, содержащий множество  $\Omega$ ;

$$Y = [y_{\min}, y_{\max}] \text{ — область изменения выходной переменной } y; \quad (7)$$

2) экспертно-экспериментальная информация о зависимости в виде выборки из  $M$  пар данных о входах и выходе объекта  $\{x^{(m)}_{\text{exp}}, y^{(m)}_{\text{exp}}\}$ , где  $x^{(m)}_{\text{exp}} = \{x^{(m)}_{1_{\text{exp}}}, x^{(m)}_{2_{\text{exp}}}, \dots, x^{(m)}_{n_{\text{exp}}}\}$  — входной вектор в  $m$ -й паре,  $m = \overline{1, M}$ .

Нейролингвистическая идентификация сложной, как правило, нелинейной функциональной зависимости (5) состоит из двух этапов.

**Этап 1** — построение нечеткой модели объекта (5) в виде нечеткой продукционной модели по экспертно-экспериментальным данным о взаимосвязи выхода  $y$  и входов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  как согласованного множества отдельных нечетких продукционных (экспертно-лингвистических) правил вида

$$\text{«ЕСЛИ } x \text{ есть } A, \text{ ТО } y \text{ есть } B \text{»}, \quad (8)$$

где  $x$  — входная переменная,  $x \in U$ ,  $U$  — область определения предпосылки (условия)  $A$  нечеткого продукционного правила (8);  $A$  — нечеткое множество, определенное на  $U$ ;  $y$  — выходная переменная,  $y \in Y$ , где  $Y$  — область определения заключения  $B$  правила (8);  $B$  — нечеткое множество, определенное на  $Y$ .

**Этап 2** — настройка параметров нечеткой модели для минимизации отклонения между результатами моделирования и экспериментальными данными.

Далее кратко опишем этап 1 метода нейролингвистической идентификации — построение нечеткой продукционной модели с использованием некоторых необходимых для этого понятий теории нечетких множеств и нечеткой логики из [3,4].

Типовая структура процесса построения нечеткой продукционной модели объекта (5) с несколькими входами и одним выходом состоит из таких блоков: фаззификация, нечеткий логический вывод, дефаззификация.

**Фаззификация.** Для нахождения зависимости (5) в явном виде рассмотрим входные переменные и выходную переменную как лингвистические переменные, заданные на универсальных множествах (6) и (7).

В контексте нечеткой логики под фаззификацией понимается процедура определения терм-множеств входных и выходной переменных с соответствующими функциями принадлежности каждого термина.

В рассматриваемой зависимости (5) для оценки лингвистических переменных  $y$  и  $x_i, i = 1, \dots, n$ , используем термы из таких терм-множеств:

- $D = \{D_k\}$  — терм-множество переменной  $y$ , где  $D_k$  —  $k$ -й лингвистический терм переменной  $y$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ ,  $L$  — число различных классов выхода  $y$ . Для каждого класса  $D_k$  выберем «наиболее характерного представителя»  $d_k \in D_k$  и назовем его центром класса;

- $A_i = \{A_{ir}\}$  — терм-множество переменной  $x_i$ , где  $A_{ir}$  —  $r$ -й лингвистический терм переменной  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $r = 1, 2, \dots, p_i$ ,  $p_i$  — количество термов в терм-множестве  $A_i$  переменной  $x_i$ . Причем в общем случае  $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$ .

Значения лингвистических термов  $D_k$  и  $A_{ir}$  получим на основе экспертно-лингвистической информации о моделируемом объекте (5).

Лингвистические термы  $A_{ir} \in A_i$  и  $D_k \in D$  рассматриваются как нечеткие множества, заданные на универсальных множествах  $U_i, i = 1, 2, \dots, n$ , и  $Y$  соответственно, определенных в (6), (7). Каждый из нечетких термов  $A_{ir} \in A_i$  представляет соответствующее нечеткое подмножество на множестве значений  $x_i$ . А каждое нечеткое множество, в свою очередь, зададим его обобщенной колокообразной функцией принадлежности  $\mu_{ir}(x_i)$ , которую представим в следующем виде:

$$\mu_{ir}(x_i) = 1 / \left( 1 + \left| \frac{x_i - b_{ir}}{c_{ir}} \right|^{2t_{ir}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, p_i. \quad (9)$$

Здесь  $\mu_{ir}(x_i)$  — число в диапазоне  $[0, 1]$ , которое характеризует субъективную меру соответствия значения  $x_i$  нечеткому терму  $A_{ir}$ ;  $b_{ir}$ ,  $\tilde{n}_{ir}$  и  $t_{ir}$  — параметры, которые сначала выбираются экспертом, а затем (этап 2 построения нечеткой модели) настраиваются на экспериментальные данные:  $b_{ir}$  — координата максимума

функции  $\mu_{ir}(x_i)$ , причем  $\mu_{ir}(b_{ir})=1$ ,  $\tilde{n}_{ir}$  — коэффициент концентрации-растяжения функции  $\mu_{ir}(x_i)$ ,  $t_{ir}$  — коэффициент крутизны функции  $\mu_{ir}(x_i)$ ,  $t_{ir} > 0$ .

Таким образом, на выходе блока фаззификации заданы функции принадлежности  $\mu_{ir}(x_i)$  для каждого лингвистического термина  $A_{ir}$  из терм-множества  $A_i$  соответствующей входной переменной  $x_i$ .

**Нечеткий логический вывод.** На входе этот блок получает из предыдущего блока степени принадлежности значений входных переменных конкретным нечетким множествам (термам), т.е. значения  $\mu_{ir}(x_i)$ , и на выходе вычисляет результирующую функцию принадлежности выходного значения модели  $\mu_{res}(y)$ . Данная функция имеет сложную форму и определяется с помощью алгоритма нечеткого логического вывода. Для выполнения вычислений блок вывода должен включать следующие компоненты: база нечетких продукционных логических правил, алгоритм нечеткого логического вывода, функции принадлежности  $\mu_{D_k}(y)$  для каждого термина  $D_k$  из терм-множества  $D$  выходной переменной  $y$ .

Представим известную экспертно-экспериментальную информацию об объекте (5) в виде системы нечетких продукционных логических правил типа (8). Пусть условие в правиле нечеткого логического вывода  $R_k$  для  $n$ -мерного входного вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , составляющего аргумент этого условия, является сложным нечетким высказыванием, тогда импликация  $R_k$  будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned}
 R_k : & \text{ЕСЛИ} ((x_1 = A_{11}^k) \text{ И } \dots \text{ И } (x_i = A_{i1}^k) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = A_{n1}^k)) \\
 & \dots \\
 & \text{ИЛИ} ((x_1 = A_{1j}^k) \text{ И } \dots \text{ И } (x_i = A_{ij}^k) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = A_{nj}^k)) \\
 & \dots \\
 & \text{ИЛИ} ((x_1 = A_{1s_k}^k) \text{ И } \dots \text{ И } (x_i = A_{is_k}^k) \text{ И } \dots \text{ И } (x_n = A_{ns_k}^k)) \text{ ТО } y = D_k. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — входные переменные,  $y$  — выходная переменная,  $A_{ij}^k$  — лингвистическая оценка (терм) входной переменной  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , в  $j$ -м правиле (строке),  $j = 1, 2, \dots, s_k$ , выбираемая из соответствующего терм-множества  $A_i$ ;  $D_k$  — заключение правила для  $k$ -го класса зависимой переменной  $y$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ ;  $s_k$  — количество правил для  $k$ -го класса.

*Замечание к формуле (10).* Поскольку  $A_{ij}^k$  — лингвистические оценки входной переменной  $x_i$  в  $j$ -м,  $j = 1, 2, \dots, s_k$ , правиле  $k$ -го,  $k = 1, 2, \dots, L$ , класса выбираются из соответствующих терм-множеств  $A_i$ , а терм-множества  $A_i$  имеют вид  $A_i = \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ir}, \dots, A_{ip_i}\}$ , то оценки  $A_{ij}^k$  переменной  $x_i$  совпадают с некоторыми оценками  $A_{ir}$  в терм-множестве  $A_i$  той же переменной  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $r = 1, 2, \dots, p_i$ ,  $p_i$  — количество термов переменной  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $r = 1, \dots, p_i$ ,  $p_i$  — количество термов в терм-множестве  $A_i$  переменной  $x_i$ .

Тогда функцию принадлежности выходной переменной  $y$  классу  $D_k$  построим на основании наличия зависимости (5) и применения принципа обобщения Заде теории нечетких множеств [4] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu_{D_k}(y) = & (\mu_{11}^k(x_1) \wedge \mu_{21}^k(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{n1}^k(x_n)) \vee \\ & \dots \vee (\mu_{1j}^k(x_1) \wedge \mu_{2j}^k(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{nj}^k(x_n)) \vee \\ & \dots \vee (\mu_{1s_k}^k(x_1) \wedge \mu_{2s_k}^k(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{ns_k}^k(x_n)), \quad k=1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (11)$$

Заменяя в (11) операцию нечеткого «И» ( $\wedge$ ) в каждом  $j$ -м,  $j=1, 2, \dots, s_k$ , правиле произведением, получаем:

$$\begin{aligned} \mu_{1j}^k(x_1) \wedge \mu_{2j}^k(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{nj}^k(x_n) = \mu_{1j}^k(x_1) \cdot \mu_{2j}^k(x_2) \cdot \dots \cdot \mu_{nj}^k(x_n) = \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^k(x_i), \\ j=1, 2, \dots, s_k, k=1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение для  $\mu_{D_k}(y)$  из (11) с учетом (12) перепишем следующим образом:

$$\mu_{D_k}(y) = \prod_{i=1}^n \mu_{i1}^k(x_i) \vee \dots \vee \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^k(x_i) \vee \dots \vee \prod_{i=1}^n \mu_{is_k}^k(x_i), \quad (13)$$

где с учетом (9)

$$\mu_{ij}^k(x_i) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x_i - b_{ij}^k}{c_{ij}^k} \right|^{2t_{ij}^k}}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, s_k, \quad k=1, 2, \dots, L. \quad (14)$$

Кроме того, для большей гибкости модели в соответствии каждому правилу поставим число  $w_j^k \in [0, 1]$ , которое означает степень достоверности  $j$ -го правила для  $k$ -го класса. Тогда, учитывая (12), выход  $j$ -го правила вычисляем по формуле

$$p_j^k(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_j^k \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^k(x_i), \quad j=1, 2, \dots, s_k, \quad k=1, 2, \dots, L. \quad (15)$$

Заменяя в (13) операцию нечеткого «ИЛИ» ( $\vee$ ) суммой с сокращением значения до единицы и учитывая (15), выход класса правил вычислим по формуле

$$\mu_{D_k}(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^k(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{если } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1, \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}, \quad (16)$$

где  $k=1, 2, \dots, L$ .

**Дефаззификация.** Для получения точного (четкого) значения выходной переменной  $y$  применим дискретный аналог метода центра тяжести:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \cdot \mu_{D_k}(y)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}(y)}. \quad (17)$$

Таким образом, построена нечеткая модель объекта (5) в виде соотношений (14)–(17), структура которой соответствует нечеткой базе знаний (10) и грубо описывает искомую зависимость  $\rho(x)$ .

Запишем построенную нечеткую модель в виде

$$y = F(x, B, C, T, W). \quad (18)$$

Здесь  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — входной вектор,  $W = \{w_j^k\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ , — набор весовых коэффициентов правил,  $B = \{b_{ij}^k\}$ ,  $C = \{c_{ij}^k\}$ ,  $T = \{t_{ij}^k\}$  — наборы параметров настройки функций принадлежности (14),  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, s_k$ ,  $k = 1, \dots, L$ ;  $F$  — функция связи «входы–выход», которая включает приведенные выше преобразования.

Если построенная модель (18) недостаточно точно описывает моделируемый объект (5), то необходимо настроить ее, т.е. найти такие параметры  $B, C, T, W$ , которые минимизируют отклонения между модельными (теоретическими, полученными по модели (18)) и экспериментальными данными.

Перейдем к этапу 2 — настройке нечеткой модели (18). В терминах математического программирования задача настройки нечеткой модели может быть сформулирована следующим образом:

найти вектор  $(B, C, T, W)$ , который обеспечивает

$$\|F(x, B, C, T, W) - y_{\text{exp}}\| \rightarrow \min_{B, C, T, W}. \quad (19)$$

Обозначим вектор  $Q = (B, C, T, W)$  и запишем задачу оптимизации (19) в следующем виде:

$$\phi(Q) \rightarrow \min_Q, \quad (20)$$

где  $\phi(Q) = \|y - y_{\text{exp}}\|$ ,  $y$  — результаты, рассчитанные по модели (18),  $y_{\text{exp}}$  — экспериментальные данные.

Здесь норма  $\|\cdot\|$  определяется как евклидова метрика

$$\|y - y_{\text{exp}}\| = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{m=1}^M (y^{(m)} - y_{\text{exp}}^{(m)})^2}, \quad (21)$$

где  $y_{\text{exp}}^{(m)}$  — значения выходной переменной  $y$  из  $m$ -й пары экспериментальной выборки  $\{x_{\text{exp}}^{(m)}, y_{\text{exp}}^{(m)}\}$ ,  $m = 1, \dots, M$ ;  $y^{(m)}$  — результаты, рассчитанные по модели (14)–(17) для значений входных переменных из  $m$ -й пары экспериментальной выборки.

Для решения задачи оптимизации (20) применим метод минимизации с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных антиградиентов ( $r$ -алгоритм Н.З. Шора) [2, 5]. С одной стороны, преимущество этого алгоритма, кроме того, что он хорошо работает в задачах оптимизации больших размерностей для гладких овражных функций с сильно вытянутыми линиями уровня, состоит в том, что его можно применять и для негладких целевых функций. С другой стороны, при замене операции максимума на сложение с сокращением значений, превышающих единицу, как в формуле (16), а также при использовании треугольных и трапециевидных функций принадлежности, приходим к негладким функциям. В этих случаях применение классических градиентных методов, требующих гладкости функций, может вызвать проблемы в сходимости этих методов.



В результате решения задачи оптимизации (20) получаем вектор  $Q^* = (B^*, C^*, T^*, W^*)$ , который доставляет минимальное значение целевой функции  $\phi(Q)$ . Иными словами, получаем такие значения  $W^* = \{w_j^{k*}\}$  для набора весовых коэффициентов правил и наборов параметров  $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$ ,  $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$ ,  $T^* = \{t_{ij}^{k*}\}$  функций принадлежности (14), для которых отклонение вида (21) между экспериментальными и модельными данными, полученными после настройки нечеткой модели, достигает минимального значения.

Запишем результирующую нейронечеткую идентификацию функции  $\rho(x)$ , которую далее используем для решения задачи Б, в виде следующих отношений:

$$\rho(x) = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \cdot \mu_{D_k}^*(y)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(y)}, \quad x \in U = U_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times U_n, \quad (22)$$

где

$$\mu_{D_k}^*(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{если } \sum_{j=1}^{s_k} p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (23)$$

$$p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^{k*}(x_i), \quad (24)$$

$$\mu_{ij}^{k*}(x_i) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}} \right|^{2t_{ij}^{k*}}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, s_k, \quad k = 1, 2, \dots, L. \quad (25)$$

В соотношениях (22)–(25) значения  $\mu_{ij}^{k*}(x_i)$ ,  $p_j^{k*}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mu_{D_k}^*(y)$  вычисляются при оптимальных значениях параметров  $W^* = \{w_j^{k*}\}$ ,  $B^* = \{b_{ij}^{k*}\}$ ,  $C^* = \{c_{ij}^{k*}\}$ ,  $T^* = \{t_{ij}^{k*}\}$ , полученных после настройки.

### 3. Алгоритм решения задачи ОРМ с нейролингвистической идентификацией функции $\rho(x)$

Приведем математическую постановку задачи А в терминах характеристической функции  $\lambda(\cdot)$ , т.е. задачу Б с восстановленной и настроенной в предыдущем разделе функцией  $\rho(\cdot)$ : найти

$$\begin{aligned} & \min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_2 \times \Omega^N} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx, \\ & \Gamma_2 = \{\lambda(x) : \lambda(x) \in \Gamma_1 \text{ и.д. } \forall x \in \Omega\}; \\ & \Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ и.д. } \forall x \in \Omega, i = 1, \dots, N, \\ & \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ и.д. } \forall x \in \Omega\}; \\ & \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \end{aligned}$$

где в качестве функции  $\rho(x)$  выбирается ее нейролингвистическая идентификация, полученная в виде соотношений (22)–(25).

В соответствии с теоремой 2 оптимальное решение задачи А в терминах характеристических функций  $\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x)$  подмножеств  $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*i}, \dots, \Omega_{*N}$  соответственно, составляющих оптимальное разбиение множества  $\Omega$ , в предположении, что  $\rho(x)$  — неотрицательная на  $\Omega$  функция, определяется по формулам (3), (4).

Для решения полученной конечномерной задачи оптимизации (4) с недифференцируемой целевой функцией  $G(\tau)$  применим алгоритм обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных антиградиентов ( $r$ -алгоритм Н.З. Шора [2, 5]).

**Алгоритм решения задачи А.** Приведем алгоритм решения задачи А, основанный на теореме 2.

Определим  $i$ -ю компоненту вектора обобщенного градиента  $g_G^\tau(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$  функции

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx$$

в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$  следующим образом:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x, \tau) \lambda_i(x) \rho(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Здесь  $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$  —  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c^\tau(x, \tau)$  функции  $c(x, \tau_i)$  в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$  ( $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ ); при фиксированном  $x$  она имеет вид

$$g_c^{\tau_i}(x, \tau) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x, \tau) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x, \tau) \end{pmatrix}.$$

**Алгоритм.** Область  $\Omega$  заключаем в  $n$ -мерный параллелепипед  $U$ , стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем  $\rho(x) = 0$  для  $x \in U \setminus \Omega$ . Параллелепипед  $U$  покрываем прямоугольной сеткой. Вычисляем значения функции  $\rho(x)$  в узлах сетки по формулам (22)–(25) и задаем начальное приближение  $\tau = \tau^{(0)}$ . Вычисляем значения  $\lambda^{(0)}(x)$  в узлах сетки по формулам (3) при  $\tau = \tau^{(0)}$ , значения  $g_G(\tau)$  — по формуле (26) при  $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(0)}$ , выбираем начальный пробный шаг  $r$ -алгоритма  $h_0 > 0$  и находим

$$\tau^1 = P_U \left( \tau^0 - h_0 \frac{H_1 g_G(\tau^0)}{\sqrt{(H_1 g_G(\tau^0), g_G(\tau^0))}} \right),$$

где  $P_U$  — оператор проектирования на  $U$ .

Переходим на следующий шаг.

Пусть в результате вычислений после  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , шагов алгоритма получены определенные значения  $\tau^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$  в узлах сетки. Опишем  $(k+1)$ -й шаг.

1. Вычисляем значения  $\lambda^{(k)}(x)$  в узлах сетки по формулам (3) при  $\tau = \tau^{(k)}$ .
2. Находим значения  $g_G(\tau)$  по формулам (26) при  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(k)}$ .

3. Проводим  $(k + 1)$ -й шаг  $r$ -алгоритма в  $H$ -форме [5], итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{k+1} = P_U \left( \tau^k - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau^k)}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau^k), g_G(\tau^k))}} \right).$$

4. Если условия

$$\|\tau^k - \tau^{k+1}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (27)$$

не выполняются, переходим к  $(k + 2)$ -му шагу алгоритма, в противном случае — к п. 5  $(k + 1)$ -го шага.

5. Полагаем  $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ ,  $\tau^* = \tau^{(l)}$ , где  $l$  — номер итерации, на которой выполнилось условие (27).

6. Вычисляем оптимальное значение целевой функции по формуле

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) + a_i] \rho(x) dx$$

и для контроля правильности счета — по формуле (1) при  $\tau = \tau^*$  и  $\rho(x)$ , вычисленном по формулам (22)–(25).

Алгоритм описан.

#### 4. Модельная задача

Проиллюстрируем описанный ранее подход на примере модельной тестовой задачи ОРМ с размещением центров подмножеств из [1, 6]. Приведем сначала смысловую постановку этой задачи из [1] с явно заданной функцией плотности  $\rho(x)$ . Предположим, имеется город с приблизительно постоянным уровнем преступности, исключая только центральную часть, в которой он более высокий, чем в остальных частях города. Требуется разместить на территории города три новых полицейских участка в целях наилучшего контроля за криминогенной ситуацией.

Аналитически функцию плотности  $\rho(x)$ , которая будет характеризовать такой уровень преступности в городе, можно задать в виде

$$\rho(x) = \begin{cases} 100, & \text{если } (x_1 \in [0; 0,33] \wedge x_2 \in [0,33; 0,67]), \\ 1, & \text{если } (x_1 \in [0; 1] \wedge x_2 \in [0; 0,33]) \vee (x_1 \in [0; 1] \wedge x_2 \in [0,67; 1]) \vee \\ & \vee (x_1 \in [0,33; 1] \wedge x_2 \in [0,33; 0,67]). \end{cases} \quad (28)$$

На рис. 2 представлено ее трехмерное изображение для области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , график функции плотности  $\rho(x)$ , заданной соотношением (28).

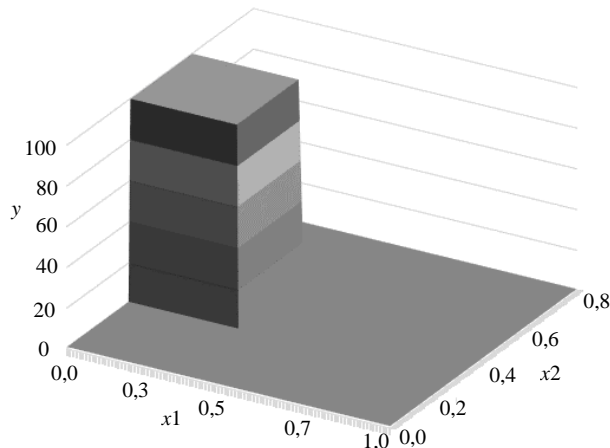


Рис. 2

Для этой задачи в [1] получено одно из локальных оптимальных разбиений  $\Omega$  на три подмножества с функцией плотности  $\rho(x)$ , заданной аналитически соотношением (28) (рис. 3).

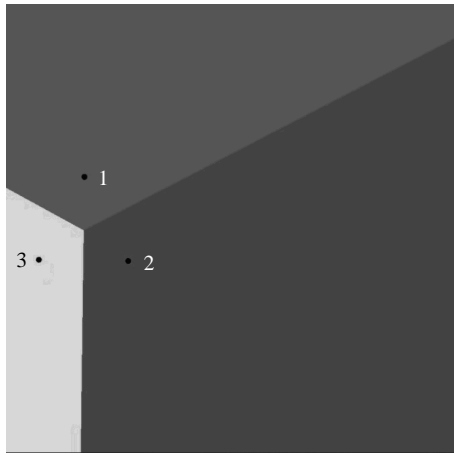


Рис. 3

Границы области по X: [0; 1]  
 Границы области по Y: [0; 1]  
 Количество интервалов по X: 15  
 Количество интервалов по Y: 15  
 Количество подмножеств: 3  
 Начальные координаты центров подмножеств:  
 $\tau 1 = (0,00000; 0,00000)$ ;  $\tau 2 = (0,00000; 0,00000)$ ;  
 $\tau 3 = (0,00000; 0,00000)$ ;  
 Начальный шаг r-алгоритма: 1,01  
 Точность r-алгоритма: 0,0001  
 Коэффициент уменьшения шага r-алгоритма: 1,1  
 Коэффициент увеличения шага r-алгоритма: 0,9  
 Количество итераций для увеличения шага r-алгоритма: 3  
 Коэффициент растяжения пространства: 2  
 Оптимальное решение, итерация 48:  
 Центры:  $\tau 1 = (0,17342; 0,61329)$ ;  $\tau 2 = (0,27051; 0,42628)$ ;  $\tau 3 = (0,07237; 0,42890)$ ;  
 Субградиент:  $(0,00069; 0,00008; -0,00097; -0,00038; 0,00218; -0,00574)$   
 Значения целевого функционала: 1,28775  
 Значения функционала двойственной задачи: 1,28775

Предположим, что для функции плотности  $\rho(x)$  в приведенной выше модельной тестовой задаче не задана функциональная зависимость в явном виде. Восстановим эту зависимость с помощью описанного ранее метода нейролингвистической идентификации. Затем найдем оптимальное решение этой модельной тестовой задачи ОРМ с восстановленной функцией  $\rho(x)$  с помощью алгоритма, описанного ранее, и сравним его с оптимальным решением задачи ОРМ в случае явно заданной функцией  $\rho(x)$ .

Для восстановления зависимости  $\rho(x)$  вида

$$y = \rho(x), \text{ где } x = (x_1, x_2) \in U = U_1 \times U_2, \quad (29)$$

с помощью метода нейролингвистической идентификации зададим согласно (6), (7) области определения входов  $x_1, x_2$  и область изменения выхода  $y$  соответственно следующим образом:

$$x_1 \in U_1 = [0, 1], \quad x_2 \in U_2 = [0, 1], \quad y \in Y = [1, 100],$$

а также экспертно-экспериментальную информацию о зависимости в виде выборки из  $M$  пар данных о входах и выходе объекта  $\{x^{(m)}_{\text{exp}}, y^{(m)}_{\text{exp}}\}$ , где  $x^{(m)}_{\text{exp}} = \{x^{(m)}_{1_{\text{exp}}}, x^{(m)}_{2_{\text{exp}}}, \dots, x^{(m)}_{n_{\text{exp}}}\}$  — входной вектор в  $m$ -й паре,  $m = \overline{1, M}$ . Эта выборка представлена для  $M = 12$  (табл. 1).

Таблица 1

Номер пары	Y	Входные переменные		Номер пары	Y	Входные переменные		Номер пары	Y	Входные переменные	
		$x_1$	$x_2$			$x_1$	$x_2$			$x_1$	$x_2$
1	1	0	0	5	100	0,15	0,5	9	1	1	0,5
2	1	0,5	0	6	100	0	0,4	10	1	0	1
3	1	1	0	7	100	0	0,6	11	1	0,5	1
4	100	0	0,5	8	1	0,5	0,5	12	1	1	1

Выполним этап 1 метода нейролингвистической идентификации.

**Фаззификация.** Для построения нечеткой модели зависимости (29) рассмотрим ее входные переменные  $x_1$  и  $x_2$  как лингвистические переменные с единой шкалой качественных термов: низкий (Н), средний (С), высокий (В), т.е. для  $x_1$ :  $A_{11}$  — Н,  $A_{12}$  — С,  $A_{13}$  — В; для  $x_2$ :  $A_{21}$  — Н,  $A_{22}$  — С,  $A_{23}$  — В. Тогда, исходя из имеющейся выборки (табл. 1), представим интервальные значения для носителей соответствующих термов входных переменных в табл. 2.

Таблица 2

Терм	$x_1$	$x_2$
Низкий (Н)	Для $A_{11}$ — [0; 0,33)	Для $A_{21}$ — [0; 0,33)
Средний (С)	Для $A_{12}$ — [0,33; 0,67)	Для $A_{22}$ — [0,33; 0,67)
Высокий (В)	Для $A_{13}$ — [0,67; 1]	Для $A_{23}$ — [0,67; 1]

Каждый из нечетких термов  $A_{ir}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $r = 1, 2, 3$ , зададим функцией принадлежности вида (9). На рис. 4 представлены:  $a$  — графики функций принадлежности термов переменной  $x_1$ ,  $b$  — графики функций принадлежности термов переменной  $x_2$ .

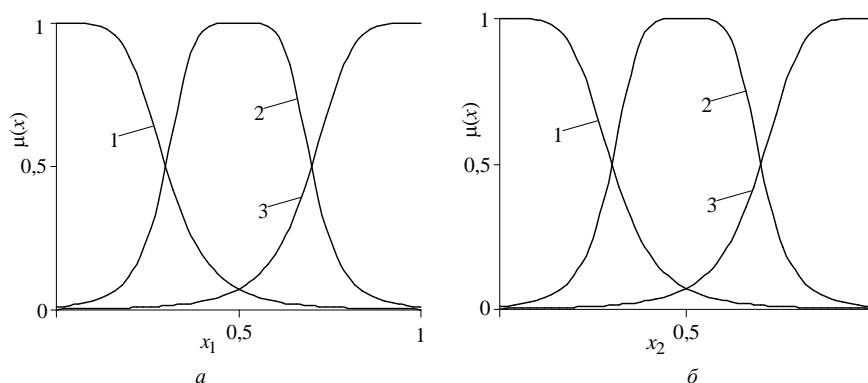


Рис. 4

Для выходной переменной  $y$  зададим два класса:  $D_1$  и  $D_2$ , с центрами  $d_1 = 1$  и  $d_2 = 100$  соответственно.

**Нечеткий логический вывод.** Построение модели (29) в явном виде начнем с формирования нечеткой продукционной базы знаний, являющейся совокупностью нечетких экспертно-лингвистических правил типа ЕСЛИ-ТО, которые связывают между собой лингвистические оценки входных переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и выходной переменной  $y$ , полученные в предыдущем блоке. На основе исходных данных из табл.1, а также построенных нечетких термов и лингвистических высказываний типа ЕСЛИ ( $x_1$  — низкий) И ( $x_2$  — высокий) ТО ( $y$  — принадлежит классу  $D_1$ ) сформируем нечеткую базу знаний вида (10):

$$\begin{aligned}
 R_1 : & \text{ЕСЛИ } (x_1 - A_{11}^1) \text{ И } (x_2 - A_{21}^1) \\
 & \text{ИЛИ } (x_1 - A_{12}^1) \text{ И } (x_2 - A_{22}^1) \\
 & \text{ИЛИ } (x_1 - A_{13}^1) \text{ И } (x_2 - A_{23}^1) \\
 & \text{ИЛИ } (x_1 - A_{14}^1) \text{ И } (x_2 - A_{24}^1) \\
 & \text{ИЛИ } (x_1 - A_{15}^1) \text{ И } (x_2 - A_{25}^1) \\
 & \text{ИЛИ } (x_1 - A_{16}^1) \text{ И } (x_2 - A_{26}^1) \\
 & \text{ИЛИ } (x_1 - A_{17}^1) \text{ И } (x_2 - A_{27}^1)
 \end{aligned}$$

или  $(x_1 - A_{18}^1)$  и  $(x_2 - A_{28}^1)$  то  $y = d_1$ ,

$R_2$ : ЕСЛИ  $(x_1 - A_{11}^2)$  и  $(x_2 - A_{21}^2)$

или  $(x_1 - A_{12}^2)$  и  $(x_2 - A_{22}^2)$

или  $(x_1 - A_{13}^2)$  и  $(x_2 - A_{23}^2)$

или  $(x_1 - A_{14}^2)$  и  $(x_2 - A_{24}^2)$  то  $y = d_2$ .

С учетом замечания к формуле (10) легко видеть, что для переменной  $x_1$  термы  $A_{11}^1, A_{16}^1, A_{11}^2, A_{12}^2, A_{13}^2, A_{14}^2$  — это терм низкий (Н), термы  $A_{12}^1, A_{14}^1, A_{17}^1$  — средний (С), термы  $A_{13}^1, A_{15}^1, A_{18}^1$  — высокий (В); для переменной  $x_2$ : термы  $A_{21}^1, A_{22}^1, A_{23}^1$  — это терм низкий (Н), термы  $A_{24}^1, A_{25}^1, A_{21}^2, A_{22}^2, A_{23}^2, A_{24}^2$  — это терм средний (С), термы  $A_{26}^1, A_{27}^1, A_{28}^1$  — это терм высокий (В). Тогда сформированную базу знаний представим в компактном виде (табл. 3).

Функции принадлежности  $\mu_{D_k}(y)$  выходной переменной  $y$  классам  $k = 1, 2$  определим из соотношений (14)–(16). Далее для удобства вычислений перейдем в соответствии с замечанием к формуле (10) от трехиндексных обозначений термов к двухиндексным и приведем формулы для функций принадлежности выходной переменной  $y$  классам  $D_k, k = 1, 2$ :

$$\mu_{D_1}(y) = \min \begin{cases} 1, \\ w_1 \cdot \mu_{11}(x_1) \cdot \mu_{21}(x_2) + w_2 \cdot \mu_{12}(x_1) \cdot \mu_{21}(x_2) + \\ + w_3 \cdot \mu_{13}(x_1) \cdot \mu_{21}(x_2) + w_8 \cdot \mu_{12}(x_1) \cdot \mu_{22}(x_2) + \\ + w_9 \cdot \mu_{13}(x_1) \cdot \mu_{22}(x_2) + w_{10} \cdot \mu_{11}(x_1) \cdot \mu_{23}(x_2) + \\ + w_{11} \cdot \mu_{12}(x_1) \cdot \mu_{23}(x_2) + w_{12} \cdot \mu_{13}(x_1) \cdot \mu_{23}(x_2); \end{cases} \quad (30)$$

$$\mu_{D_2}(y) = \min \begin{cases} 1, \\ w_4 \cdot \mu_{11}(x_1) \cdot \mu_{22}(x_2) + w_5 \cdot \mu_{11}(x_1) \cdot \mu_{22}(x_2) + \\ + w_6 \cdot \mu_{11}(x_1) \cdot \mu_{22}(x_2) + w_7 \cdot \mu_{11}(x_1) \cdot \mu_{22}(x_2). \end{cases} \quad (31)$$

Таблица 3

Номер класса выходной переменной $y$	Номер пары, $m$	Номер правила в классе, $j$	Веса правил, $w_j^k$ (или $w_m$ )	Входные переменные	
				$x_1$	$x_2$
$k = 1$	1	1	$w_1^1 = w_1 = 1$	Н	Н
	2	2	$w_2^1 = w_2 = 1$	С	Н
	3	3	$w_3^1 = w_3 = 1$	В	Н
	8	4	$w_4^1 = w_8 = 1$	С	С
	9	5	$w_5^1 = w_9 = 1$	В	С
	10	6	$w_6^1 = w_{10} = 1$	Н	В
	11	7	$w_7^1 = w_{11} = 1$	С	В
	12	8	$w_8^1 = w_{12} = 1$	В	В
$k = 2$	4	1	$w_1^2 = w_4 = 1$	Н	С
	5	2	$w_2^2 = w_5 = 1$	Н	С
	6	3	$w_3^2 = w_6 = 1$	Н	С
	7	4	$w_4^2 = w_7 = 1$	Н	С

**Дефаззификация.** Для определения точного значения результирующей переменной  $y$  применим дискретный аналог метода центра тяжести (17):

$$y = \frac{\sum_{k=1}^2 d_k \cdot \mu_{D_k}(y)}{\sum_{k=1}^2 \mu_{D_k}(y)}, \quad (32)$$

где  $\mu_{D_k}(y)$  определяем по формулам (30), (31), а  $\mu_{i_r}(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $r = 1, 2, 3$ , — по (9).

Таким образом, построенная нечеткая модель объекта (29) в виде соотношений (9), (30)–(32) позволяет рассчитать значения зависимости  $\rho(x)$  от любых пар значений входных переменных из их области определения.

Однако, как отмечалось выше, построенная нечеткая модель (9), (30)–(32) грубо описывает искомую зависимость (29), поэтому выполним этап 2 метода нейролингвистической идентификации — настройку параметров нечеткой модели. Для этого построенную нечеткую модель (9), (30)–(32) запишем в виде

$$y = F(x, B, C, T), \quad (33)$$

где  $x = (x_1, x_2)$  — входной вектор,  $B = \{b_{i_r}\}$ ,  $C = \{c_{i_r}\}$ ,  $T = \{t_{i_r}\}$  — наборы параметров настройки функций принадлежности (9),  $i = 1, 2$ ,  $r = 1, 2, 3$ ,  $F$  — функция связи «входы–выход», которая включает приведенные выше преобразования. Тогда настройку параметров нечеткой модели запишем как задачу оптимизации следующим образом.

Найти вектор  $(B, C, T)$ , который минимизирует отклонения между модельными (теоретическими, полученными по модели (33)) и экспериментальными данными:

$$\|F(x, B, C, T) - y_{\text{exp}}\| \rightarrow \min_{B, C, T}, \quad (34)$$

где норма  $\|\cdot\|$  определяется как евклидова метрика:

$$\|F(x, B, C, T) - y_{\text{exp}}\| = \frac{1}{12} \sqrt{\sum_{m=1}^{12} (F(x^{(m)}, B, C, T) - y_{\text{exp}}^{(m)})^2}. \quad (35)$$

Применяем  $r$ -алгоритм [5] для решения задачи оптимизации (34), (35) с начальными значениями параметров  $B, C, T$ , которые выбираются следующим образом: значения для  $b_{i_r}$  — это координата максимума функций принадлежности вида (9) соответствующих термов,  $c_{i_r}$  выбираются так, чтобы функции принадлежности соседних термов пересекались на значениях, равном 0,5,  $t_{i_r} = 2,5$ ,  $i = 1, 2$ ,  $r = 1, 2, 3$ .

На выходе получаем оптимальные значения векторов параметров  $B^*$ ,  $C^*$  и  $T^*$  для функции  $F$  из зависимости (33), представленные в табл. 4.

Таблица 4

Терм	$x_1$			$x_2$		
	$b_{1r}^*$	$c_{1r}^*$	$t_{1r}^*$	$b_{2r}^*$	$c_{2r}^*$	$t_{2r}^*$
Низкий, $r = 1$	0	0,33	39	0	0,33	39

Средний, $r = 2$	0,5	0,2	39	0,5	0,2	39
Высокий, $r = 3$	1	0,33	39	1	0,33	39

На рис. 5 приведены графики функций принадлежности термов входных переменных  $x_1$  и  $x_2$  после настройки.

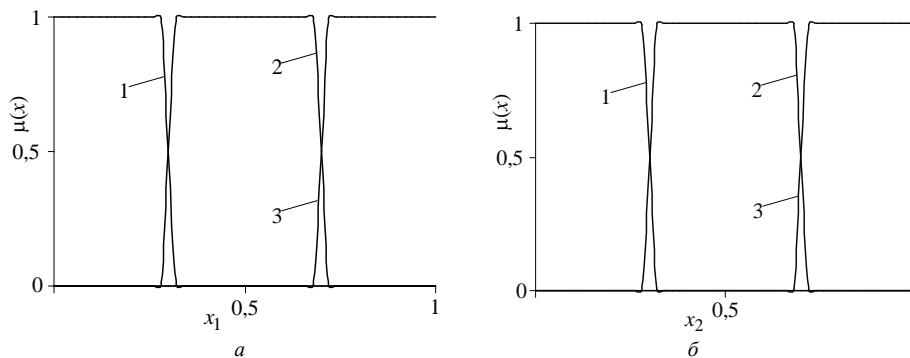


Рис. 5

Среднеквадратическое отклонение (критерий точности нечеткой модели) экспериментальных данных от модельных, рассчитанное по формуле (35), после настройки равно 0,00017 (для сравнения, до настройки среднеквадратическое отклонение равно 0,62702).

На рис. 6, а, б представлены соответственно графики модельных значений выходной переменной  $y$ , полученные до и после настройки, а также для сравнения — исходных экспериментальных данных.

На рис. 7, а, б представлены трехмерные графики зависимости  $y = \rho(x)$ , восстановленные с помощью метода нейролингвистической идентификации до и после настройки.

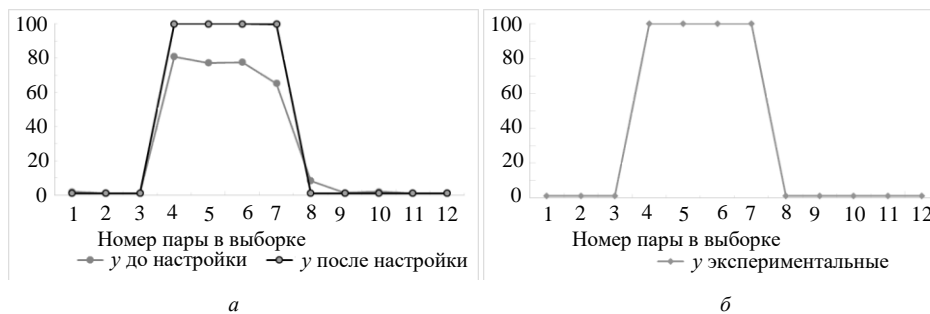


Рис. 6

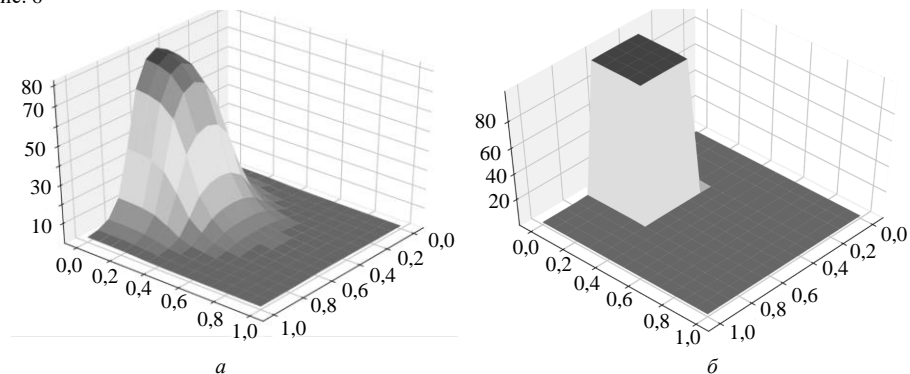


Рис. 7

Перейдем к решению модельной тестовой задачи ОРМ с размещением центров подмножеств, используя описанный ранее алгоритм со значениями функции  $\rho(x)$ ,



полученными (восстановленными) по методу нейролингвистической идентификации после настройки.

Начальные условия для алгоритма ОРМ и оптимальное решение модельной тестовой задачи, полученное по этому алгоритму с функцией  $\rho(x)$ , восстановленной после настройки, представлены на рис. 8.

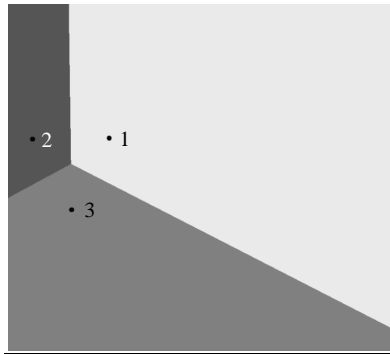


Рис. 8

Границы области по X: [0; 1]  
 Границы области по Y: [0; 1]  
 Количество интервалов по X: 15  
 Количество интервалов по Y: 15  
 Количество подмножеств: 3  
 Начальные координаты центров подмножеств:  $\tau_1 = (0,00000; 0,00000)$ ;  $\tau_2 = (0,00000; 0,00000)$ ;  $\tau_3 = (0,00000; 0,00000)$ ;  
 Начальный шаг  $r$ -алгоритма: 1  
 Точность  $r$ -алгоритма: 0,0001  
 Коэффициент уменьшения шага  $r$ -алгоритма: 1,1  
 Коэффициент увеличения шага  $r$ -алгоритма: 0,9  
 Количество итераций для увеличения шага  $r$ -алгоритма: 3  
 Коэффициент растяжения пространства: 2  
 Оптимальное решение, итерация 51:  
 Центры:  $\tau_1 = (0,27038; 0,57373)$ ;  $\tau_2 = (0,07232; 0,57112)$ ;  
 $\tau_3 = (0,17332; 0,38655)$ ;  
 Субградиент: (0,00138; 0,00101; 0,00028; -0,00098; -0,00088;  
 -0,00044)  
 Значения целевого функционала: 1,28966  
 Значения функционала двойственной задачи: 1,28966

Сравнивая результаты решения задачи ОРМ, полученные для явно заданной функции плотности  $\rho(x)$  в целевом функционале (см. рис. 3) и для функции плотности  $\rho(x)$ , восстановленной с помощью метода нейролингвистической идентификации после настройки (см. рис. 8), видим, что оптимальные решения этих задач совпадают с достаточной степенью точности.

Таким образом, можно сделать вывод, что метод нейролингвистической идентификации с достаточной степенью точности восстанавливает зависимости, если их явный аналитический вид неизвестен, либо имеется недостоверное математическое описание этих зависимостей.

### Заключение

В данной работе предложен алгоритм решения непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множеств из  $n$ -мерного евклидова пространства на подмножества без ограничений с отысканием координат центров подмножеств в случае, когда для функции  $\rho(x)$ , входящей в целевой функционал, явный аналитический вид заранее неизвестен. Для восстановления функции  $\rho(x)$  предложен метод нейролингвистической идентификации, основанный на использовании нейронечетких технологий.

Разработанный алгоритм с использованием нейронечетких технологий и  $r$ -алгоритма Н.З. Шора программно реализован в среде Microsoft Visual Studio 2013 на языке C# и проиллюстрирован на модельной тестовой задаче.

*О.М. Кисельова, О.М. Притоманова, С.В. Журавель*

**АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
НЕПЕРЕРВНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО  
РОЗБИТТЯ З НЕЙРОЛІНГВІСТИЧНОЮ  
ІДЕНТИФІКАЦІЄЮ ФУНКЦІЙ,  
ЩО ВХОДЯТЬ ДО ЦІЛЬОВОГО ФУНКЦІОНАЛА**

Запропоновано алгоритм розв'язання однієї неперервної задачі оптимального розбиття множин з  $n$ -мірного евклідового простору на їх підмножини з нейролінгвістичною ідентифікацією функцій, що входять до цільового функціонала, явний аналітичний вид яких заздалегідь невідомий. Розроблено програмне забезпечення, що реалізує запропонований в статті підхід на основі нейронечітких технологій з використанням  $r$ -алгоритму Шора. Викладено результати програмної реалізації розробленого алгоритму для модельної тестової задачі.

*E.M. Kiseleva, O.M. Prytomanova, S.V. Zhuravel*

**ALGORITHM TO SOLVE CONTINUOUS  
PROBLEM OF OPTIMAL PARTITIONING  
WITH NEUROLINGUISTIC IDENTIFICATION  
OF FUNCTIONS IN TARGET FUNCTIONAL**

Algorithm for solving a continuous optimal partitioning problem of sets from  $n$ -dimensional Euclidean space into subsets with a neurolinguistic identification of functions that included into target functional with undefined explicit analytical form is proposed. The software that implements the approach proposed in the article based on neuron-fuzzy technologies using Shor's  $r$ -algorithm is developed. The results of program implementation of the developed algorithm for modeled test problem are described.

1. *Киселева Е.М., Коряшкіна Л. С.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и  $r$ -алгоритмы. — К. : Наук. думка, 2015. — 400 с.
2. *Киселева Е.М., Шор Н.З.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. — К. : Наук. думка, 2005. — 564 с.
3. *Борисов В. В., Круглов В.В., Федулов А.С.* Нечеткие модели и сети. — М. : Горячая линия-Телеком, 2015. — 284 с.
4. *Леоненков А.В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 736 с.
5. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — К. : Наук. думка, 1979. — 200 с.
6. *Friedman M.* On the analysis and solution of certain geographical optimal covering problems // *Comput. and Oper. Res.* — 1976. — 3, N 4. — P. 283–294.

*Получено 12.01.2018*