

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫДЕЛЕНИЯ  
ТРЕНДОВ В ЗАДАЧАХ ФИНАНСОВОЙ РАЗВЕДКИ.  
Часть 2. МОМЕНТЫ ПОЯВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ  
ФИНАНСОВОГО ПОТОКА НЕИЗВЕСТНЫ\*

Данная публикация является логическим продолжением работы [1] и посвящена проблеме оценивания возникающих трендов при осуществлении возможных финансовых транзакций между субъектами различного социального и правового статуса. Облачные технологии в принципе позволяют решать задачи сбора и сортировки огромного количества данных и выявлять направления наиболее интенсивных потоков финансовых средств [2]. Это одна из наиболее важных задач органов финансового мониторинга и разведки. Но достоверность выводов во многом определяется адекватностью выделяемых и оцениваемых трендов отслеживаемых финансовых транзакций. Таким образом, если техническая сторона проблемы сегодня видится вполне разрешимой, то ее математическая часть представляется достаточно не тривиальной. Решению такой задачи и посвящены обе части данной работы. Но именно эта часть нацелена на решение задачи при неизвестных моментах времени возникновения элементов финансового потока, что является некоторым усложнением условий задачи и соответственно еще бóльшим приближением ее к реальности.

#### Постановка задачи

Как и в [1], предполагается, что финансовый поток  $x_i = x(t_i)$  на интервале наблюдения  $[0, T]$  можно представить в виде

$$x_i = \sum_{k=1}^s \theta_k \varphi_k(t_i) + n_i,$$

но теперь считаем, что значения  $t_i$  неизвестны, а известен лишь их порядок, т.е. известно, что

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < T. \quad (1)$$

При этом число измерений  $N$  считаем известным.

Оценки  $\hat{\theta}_k$  параметров  $\theta_k$  стандартным методом наименьших квадратов находятся из условия

$$\sum_{i=1}^N \left( x_i - \sum_{k=1}^s \hat{\theta}_k \varphi_k(t_i) \right)^2 \Rightarrow \min_{\hat{\theta}_k}. \quad (2)$$

Однако непосредственно воспользоваться этим методом невозможно, так как  $t_i$  неизвестны. Поэтому в данной ситуации необходимо модифицировать метод наименьших квадратов.

---

\* Исследование выполнено за счет проекта 8.9562 2017/8.9 Минобрнауки Российской Федерации.

Сделаем это следующим образом: в (2) вместо  $\varphi_k(t_i)$  используем их условные математические ожидания  $\bar{\varphi}_{ki} = M\{\varphi_k(t_i) | N\}$ , полученные при условии, что на интервале  $[0, T]$  произведено  $N$  измерений. Сами же оценки  $\hat{\theta}_k$  параметров  $\theta_k$  находятся из условия

$$R = \sum_{i=1}^N \left( x_i - \sum_{k=1}^s \hat{\theta}_k \bar{\varphi}_{ki} \right)^2 \Rightarrow \min_{\hat{\theta}_k}. \quad (3)$$

### Упрощенный алгоритм решения задачи

Проведем все соответствующие выкладки в предположении, что моменты возникновения элементов финансовых транзакций образуют пуассоновский поток событий постоянной интенсивности  $\lambda$ . В этом случае вероятность того, что на интервале  $[0, T]$  будет сделано  $N$  наблюдений, равна [3]

$$P(N) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} e^{-\lambda T}.$$

Рассмотрим функцию  $p_i(t, N)$ , представляющую собой плотность вероятности момента  $t_i$   $i$ -го измерения и (по второму аргументу) вероятность того, что на  $[0, T]$  будет  $N$  измерений. По свойствам пуассоновского потока имеем

$$p_i(t, N) dt = \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt \cdot \frac{(\lambda [T-t])^{N-i}}{(N-i)!} e^{-\lambda (T-t)},$$

так как на отрезке  $[0, t]$  выполнено  $i-1$  измерение, а на отрезке  $(t+dt, T]$  —  $(N-i)$  измерений. Поэтому

$$p_i(t, N) = \lambda e^{-\lambda T} \frac{(\lambda t)^{i-1} (\lambda [T-t])^{N-i}}{(i-1)(N-i)!}.$$

Отсюда условная плотность вероятности момента  $i$ -го измерения при условии, что на отрезке  $[0, T]$  сделано  $N$  измерений, равна

$$p_i(t | N) = \frac{p_i(t, N)}{P(N)} = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \cdot \frac{1}{T} \left( \frac{t}{T} \right)^{i-1} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^{N-i}. \quad (4)$$

Данная плотность называется  $B$ -распределением, свойства ее рассмотрены в [4]. В силу этого величины  $\bar{\varphi}_{ki}$  равны

$$\bar{\varphi}_{ki} = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{t}{T} \right)^{i-1} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^{N-i} \varphi_k(t) dt, \quad (5)$$

что при известных  $\varphi_k(t)$  позволяет вычислять эти величины точно.

Например, в случае, когда  $\varphi_k(t) = (t/T)^k$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{ki} &= \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{t}{T} \right)^{i+k-1} \left( 1 - \frac{t}{T} \right)^{N-i} dt = \\ &= \frac{(i+k-1)!}{(i-1)!} \cdot \frac{N!}{(N+k)!} = \frac{i(i+1)(i+2)\dots(i+k-1)}{(N+1)(N+2)(N+3)\dots(N+k)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим асимптотику величин  $\bar{\varphi}_{ki}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , т.е. при большом числе наблюдений на отрезке  $[0, T]$ . Для этого вычислим основные статистические характеристики  $t_i$ . Имеем

$$M\{t_i|N\} = \frac{1}{T} \cdot \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \int_0^T t \left(\frac{t}{T}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-i} dt = T \frac{i}{N+1}, \quad (7)$$

$$M\{t_i^2|N\} = \frac{1}{T} \cdot \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \int_0^T t^2 \left(\frac{t}{T}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-i} dt = T^2 \frac{i(i+1)}{(N+1)(N+2)}.$$

Отсюда получаем

$$D\{t_i|N\} = M\{t_i^2|N\} - M^2\{t_i|N\} = T^2 \frac{i(N+1-i)}{(N+1)^2(N+2)}. \quad (8)$$

Рассмотрим асимптотику поведения  $p_i(t|N)$  при  $N \rightarrow \infty$ . Отметим, что при этом нет особого смысла фиксировать  $i$ , так как при этом все будет вырождаться (см. формулы (7),(8)). Надо, чтобы при  $N \rightarrow \infty$  также и  $i \rightarrow \infty$ . Поэтому изучим асимптотику при  $N \rightarrow \infty$ ,  $i \rightarrow \infty$ , но так, что  $\frac{i}{N} = u$  останется постоянной величиной, т.е.  $i = N \cdot u$ ,  $0 < u < 1$ .

**Теорема.** Пусть при  $N \rightarrow \infty$   $i \rightarrow \infty$  так, что  $\frac{i}{N} = u$ ,  $0 < u < 1$ . Предположим далее,

$$\frac{t_i}{T} = \frac{i}{N+1} + x \sqrt{\frac{i(N+1-i)}{(N+1)^2(N+2)}}. \quad (9)$$

Тогда на любом конечном интервале  $a < x < b$  имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ i/N=u}} T \sqrt{\frac{i(N+1-i)}{(N+1)^2(N+2)}} p(t_i|N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (10)$$

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{Nu(N+1-Nu)}{(N+1)^2(N+2)}} / \sqrt{\frac{Nu(N-Nu)}{N^3}} = 1$$

при любых конечных  $u$ , то первый сомножитель в левой части (10) можно заменить на  $\sqrt{\frac{i(N-i)}{N^3}}$ .

Полагая далее  $i = N \cdot u$ , получим

$$\begin{aligned} T \sqrt{\frac{i(N-i)}{N^3}} p(t_i|N) &= \sqrt{\frac{i(N-i)}{N^3}} \cdot \frac{N!i}{i!(N-i)!} \left(\frac{t}{T}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{N-i} = \\ &= \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}} \left(u + x \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\right)^{Nu-1} \left(1 - u - x \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\right)^{N(1-u)} \frac{N!i}{i!(N-i)!} = \\ &= \frac{N!Nu \cdot u^{Nu-1} \cdot (1-u)^{N(1-u)}}{(Nu)!(N-Nu)!} \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}} \left(1 + x \sqrt{\frac{1-u}{Nu}}\right)^{Nu-1} \cdot \left(1 - x \sqrt{\frac{u}{N(1-u)}}\right)^{N(1-u)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала асимптотику сомножителя

$$Z = \left(1 + x \sqrt{\frac{1-u}{Nu}}\right)^{Nu} \cdot \left(1 - x \sqrt{\frac{u}{N(1-u)}}\right)^{N(1-u)}.$$

Используя разложение  $\ln(1+z)$  в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \ln Z &= Nu \cdot \ln\left(1 + x \sqrt{\frac{1-u}{Nu}}\right) + N(1-u) \cdot \ln\left(1 - x \sqrt{\frac{u}{N(1-u)}}\right) = \\ &= Nu \cdot x \sqrt{\frac{1-u}{Nu}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1-u}{Nu} \cdot Nu + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) - N(1-u) \cdot \\ &\cdot x \sqrt{\frac{u}{N(1-u)}} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{u}{N(1-u)} \cdot N(1-u) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \end{aligned}$$

так что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln Z = -\frac{x^2}{2}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Z = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Очевидно, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + x \sqrt{\frac{1-u}{Nu}}\right)^{-1} = 1.$$

Пользуясь далее формулой Стирлинга для  $N!$ , получим  $\left(\theta_N = \frac{1}{12N}\right)$ :

$$\begin{aligned} &\frac{N! Nu \cdot u^{Nu-1} \cdot (1-u)^{N(1-u)}}{(Nu)!(N-Nu)!} \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}} = \\ &= \frac{N^N \cdot \sqrt{2\pi N} \cdot e^{\theta_N} \cdot Nu \cdot u^{Nu-1} \cdot (1-u)^{N(1-u)} \cdot \sqrt{u(1-u)}}{(Nu)^{Nu} \cdot \sqrt{2\pi Nu} \cdot e^{\theta_{Nu}} \cdot [N(1-u)]^{N(1-u)} \cdot \sqrt{2\pi N(1-u)} \cdot e^{\theta_{N(1-u)}} \sqrt{N}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(\theta_N - \theta_{Nu} - \theta_{N(1-u)}), \end{aligned}$$

и поэтому при  $N \rightarrow \infty$  этот сомножитель стремится к  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

Теорема доказана.

Нетрудно оценить асимптотику величин  $\bar{\Phi}_{ki}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Действительно, в этом случае

$$\bar{\Phi}_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k \left( T \frac{i}{N+1} + Tx \sqrt{\frac{i(N+1-i)}{(N+1)^2(N+2)}} \right) p(x) dx,$$

где  $p(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ , для  $x$  на любом конечном интервале  $a < x < b$ . При

$N \rightarrow \infty$ , так что  $\frac{i}{N} = u$ , получим

$$\bar{\Phi}_{ki} = \Phi_k \left( T \frac{i}{N+1} \right) \approx \Phi_k \left( T \frac{i}{N} \right), \quad i = \overline{1, N}. \quad (11)$$

После того как найден явный вид оценок  $\bar{\varphi}_{ki}$ , можно найти и явный вид оценок  $\hat{\theta}_k$  параметров  $\theta_k$ . Приравнявая к нулю  $\frac{\partial R}{\partial \hat{\theta}_l}$ , получим

$$\sum_{k=1}^s \hat{\theta}_k \left( \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{ki} \bar{\varphi}_{li} \right) = \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{li} x_i, \quad l = \overline{1, s}. \quad (12)$$

Переходя к матричным обозначениям

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \dots \\ \hat{\theta}_s \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{11} & \bar{\varphi}_{21} & \dots & \bar{\varphi}_{s1} \\ \bar{\varphi}_{12} & \bar{\varphi}_{22} & \dots & \bar{\varphi}_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\varphi}_{1N} & \bar{\varphi}_{2N} & \dots & \bar{\varphi}_{sN} \end{bmatrix},$$

получим

$$\hat{\theta} = (\bar{\varphi}^T \bar{\varphi})^{(-1)} \bar{\varphi}^T \bar{x}, \quad (13)$$

что и дает явное выражение для оценок неизвестных параметров.

Это выражение можно упростить в асимптотическом случае  $\lambda \rightarrow \infty$ , когда  $N$  также велико. Действительно, матрица  $(\bar{\varphi}^T \bar{\varphi})$  в этом случае — матрица с элементами

$$\sum_{i=1}^N \varphi_k \left( T \frac{i}{N+1} \right) \varphi_l \left( T \frac{i}{N+1} \right).$$

Рассматривая сумму вида

$$\frac{T}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_k \left( T \frac{i}{N+1} \right) \varphi_l \left( T \frac{i}{N+1} \right),$$

легко увидеть, что это — сумма Дарбу для интеграла

$$\int_0^T \varphi_k(u) \varphi_l(u) du,$$

так что при  $N \rightarrow \infty$  асимптотически

$$\sum_{i=1}^N \varphi_k \left( T \frac{i}{N+1} \right) \varphi_l \left( T \frac{i}{N+1} \right) \sim \frac{N}{T} \int_0^T \varphi_k(u) \varphi_l(u) du = N \varphi_{kl}.$$

Поэтому при  $\lambda \rightarrow \infty$  асимптотически

$$\bar{\varphi}^T \bar{\varphi} \sim N \cdot \Phi, \quad (14)$$

где матрица  $\Phi$  введена в части 1 данной работы [1].

Тогда

$$\hat{\theta} = \Phi^{(-1)} \frac{1}{N} \bar{\varphi}^T \bar{x} \quad (15)$$

и вектор-столбец  $\frac{1}{N} \bar{\varphi}^T \bar{x}$  — вектор-столбец с элементами

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_k \left( T \frac{i}{N+1} \right) x_i. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) дают явные выражения для оценок параметров  $\bar{\theta}$ , которые и будут далее исследованы.

**Анализ свойств упрощенного алгоритма оценки параметров  
при неизвестных моментах осуществления финансовых транзакций**

Исследуем свойства полученных оценок (15). Для сокращения выкладок введем матрицу

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_s(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_s(t_2) \\ \varphi_1(t_3) & \varphi_2(t_3) & \dots & \varphi_s(t_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_N) & \varphi_2(t_N) & \dots & \varphi_s(t_N) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Так как

$$x_i = \sum_{k=1}^s \theta_k \varphi_k(t_i) + n_i$$

или в матричном виде

$$\bar{x} = \varphi \bar{\theta} + \bar{n},$$

то, усредняя по  $n_i$  и  $t_i$ , получим

$$M\{\bar{x}\} = M\{\varphi|N\}\bar{\theta} + M\{\bar{n}\} = \bar{\varphi}\bar{\theta}. \quad (18)$$

Поэтому для оценок вида (15) получаем

$$M\{\hat{\theta}\} = \Phi^{(-1)} \cdot \frac{1}{N} (\bar{\varphi}^T \bar{\varphi}) \bar{\theta}. \quad (19)$$

Так как при  $N \rightarrow \infty$   $\frac{1}{N} (\bar{\varphi}^T \bar{\varphi}) \rightarrow \Phi$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M\{\hat{\theta}\} = \Phi^{(-1)} \Phi \bar{\theta} = \bar{\theta},$$

т.е. оценки (19) являются асимптотически несмещенными.

Найдем матрицу ковариаций оценок (19). Имеем

$$\hat{\theta} - \bar{\theta} = \Phi^{(-1)} \cdot \frac{1}{N} \bar{\varphi}^T (\varphi \bar{\theta} + \bar{n}) - \bar{\theta} = \Phi^{(-1)} \cdot \frac{1}{N} \bar{\varphi}^T ((\varphi - \bar{\varphi}) \bar{\theta} + \bar{n}),$$

где  $\Phi$  заменена на  $\frac{1}{N} \bar{\varphi}^T \bar{\varphi}$ , что возможно при  $N \rightarrow \infty$ . Отсюда

$$\left( \hat{\theta} - \bar{\theta} \right)^T = \frac{1}{N} [\bar{\theta} (\varphi - \bar{\varphi})^T + \bar{n}^T] \bar{\varphi} \cdot \Phi^{(-1)},$$

и поэтому матрица ковариаций оценок  $\hat{\theta}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = M\left\{ (\hat{\theta} - \bar{\theta})(\hat{\theta} - \bar{\theta})^T \right\} &= \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{N} \Phi^{(-1)} \bar{\varphi}^T M\{\bar{n}\bar{n}^T\} \bar{\varphi} \Phi^{(-1)} \right] + \\ &+ \frac{1}{N} \Phi^{(-1)} \cdot \frac{1}{N} \bar{\varphi}^T M\{(\varphi - \bar{\varphi}) \bar{\theta} \bar{\theta}^T (\varphi - \bar{\varphi})^T\} \bar{\varphi} \Phi^{(-1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Обозначим  $\mathbf{R}$  матрицу

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \bar{\varphi}^T M \{ \bar{n} \bar{n}^T \} \bar{\varphi} + \frac{1}{N} \bar{\varphi}^T M \{ (\varphi - \bar{\varphi}) \theta \theta^T (\varphi - \bar{\varphi})^T \} \bar{\varphi}. \quad (21)$$

Тогда

$$\mathbf{V} = \frac{1}{N} \Phi^{(-1)} \mathbf{R} \Phi^{(-1)}. \quad (22)$$

Матрица  $\mathbf{R}$  в асимптотическом случае  $N \rightarrow \infty$  равна

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \Phi + \left\| \sum_{k, l=1}^s \theta_k \theta_l r_{mnkl} \right\| \quad (23)$$

или поэлементно

$$R_{mn} = \sigma^2 \Phi_{mn} + \sum_{k, l=1}^s \theta_k \theta_l r_{mnkl}. \quad (24)$$

Как и раньше, в это выражение входят неизвестные величины  $\sigma^2$  и  $\theta_k, \theta_l$ .

Поэтому необходимо получить оценку этой матрицы.

Основу этой оценки составит комбинация

$$S_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{mi} \bar{\varphi}_{ni} x_i^2. \quad (25)$$

Так как  $x_i = n_i + \sum_{k=1}^s \theta_k \varphi_k(t_i)$ , то

$$S_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{mi} \bar{\varphi}_{ni} \left[ n_i^2 + 2n_i \sum_{k=1}^s \theta_k \varphi_k(t_i) + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \theta_k \theta_l \varphi_k(t_i) \varphi_l(t_i) \right].$$

Усредняя по  $n_i$  при фиксированных  $t_i$ , получим

$$M\{S_{mn} | \{t_i\}\} = \sigma^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{mi} \bar{\varphi}_{ni} + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \theta_k \theta_l \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{mi} \bar{\varphi}_{ni} \varphi_k(t_i) \varphi_l(t_i).$$

Но при  $N \rightarrow \infty$   $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{mi} \bar{\varphi}_{ni} \rightarrow \Phi_{mn}$ . Второе слагаемое после усреднения по  $\{t_i\}$ ,

при фиксированном  $N$  дает

$$\sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \theta_k \theta_l \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{mi} \bar{\varphi}_{ni} \varphi_k(t_i) \varphi_l(t_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \theta_k \theta_l \varphi_{mnkl},$$

так что

$$M\{S_{mn}\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma^2 \Phi_{mn} + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \theta_k \theta_l \varphi_{mnkl}.$$

Поэтому оценку  $\hat{R}_{mn}$  величин  $R_{mn}$  можно получить в виде

$$\hat{R}_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{\varphi}_{mi} \bar{\varphi}_{ni} x_i^2 + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \hat{\theta}_k \hat{\theta}_l (r_{mnkl} - \varphi_{mnkl}). \quad (26)$$

В силу того, что при  $N \rightarrow \infty$   $\hat{\theta}_k$  сходится к  $\theta_k$ , по крайней мере, в средне-квадратичном смысле,  $\hat{R}_{mm}$  сходится к  $R_{mm}$ , по меньшей мере, по вероятности, что и оправдывает замену матрицы  $\mathbf{R}$  на  $\hat{\mathbf{R}}$ . Оценку  $\hat{\mathbf{V}}$  матрицы вариаций  $\mathbf{V}$  можно взять в виде

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{N} \Phi^{(-1)} \hat{\mathbf{R}} \Phi^{(-1)}.$$

Знание  $\hat{\mathbf{V}}$  позволяет построить доверительные интервалы для  $\theta_k$ .

### Имитационное моделирование

Для проверки работоспособности исследованных алгоритмов, изложенных в обеих частях данной работы, а также приложимости нормальной аппроксимации для оценок проведено их имитационное моделирование.

На рис. 1, а–в приведены результаты моделирования линейного тренда вида  $x(t) = a + b \frac{t}{T}$  для  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $T = 100$  при пуассоновском потоке моментов измерений при  $\lambda = 0,2$  ( $\lambda T = 20$ ),  $\lambda = 0,5$  ( $\lambda T = 50$ ) и  $\lambda = 1,0$  ( $\lambda T = 100$ ). Линия  $B$  — это данные моделирования, соединенные отрезками прямых, линия  $C$  — истинный тренд, линия  $D$  — это оценка тренда, когда  $\{t_i\}$  известны точно, линия  $E$  — это оценка тренда, когда относительно моментов  $\{t_i\}$  известен лишь их порядок. На рис. 1, а–в не нанесены доверительные интервалы для тренда, но во всех случаях истинное значение тренда попадает в 95 % -й доверительный интервал.

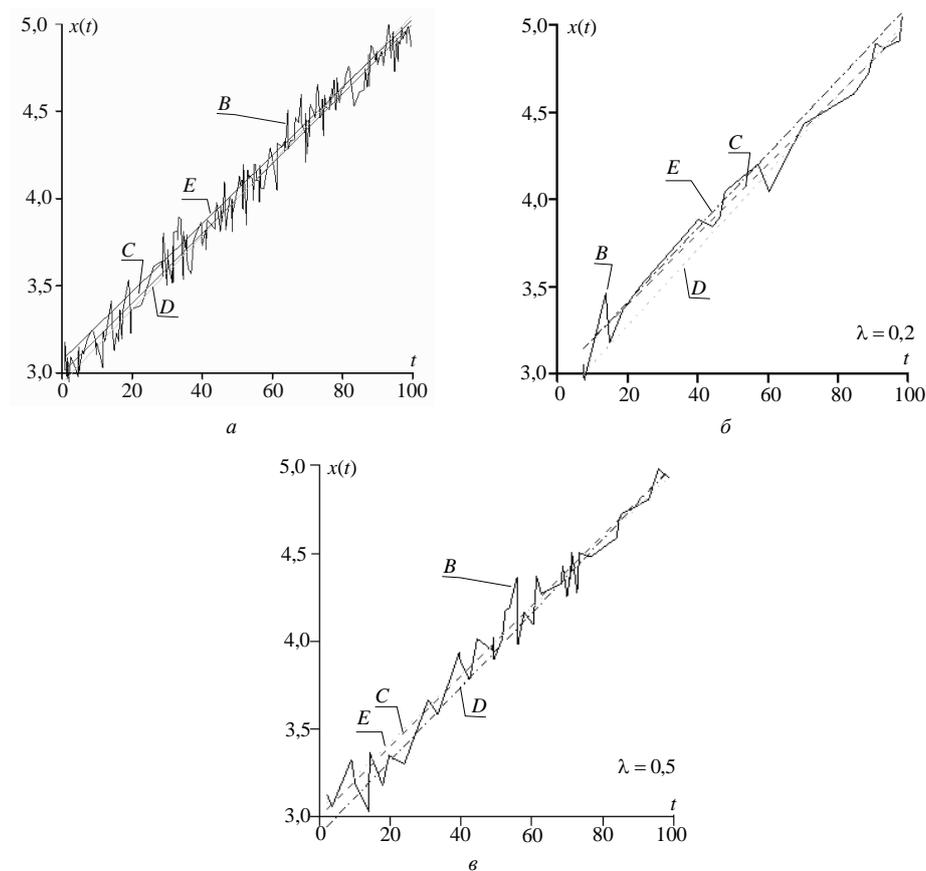


Рис. 1

Как показывают результаты моделирования, достаточно хорошее выделение линейного тренда начинается с  $\lambda T = 50$ . Что касается асимптотической нормальности полученных оценок, то она соблюдается (гипотеза о нормальности справедлива по критерию  $\chi^2$  с 95 %-м уровнем значимости) примерно с  $\lambda T = 100$ .

На рис. 2, а и б приведены гистограммы величин  $\frac{(\hat{a} - a)}{\sqrt{\hat{D}\{\hat{a}\}}}$  и  $\frac{(\hat{b} - b)}{\sqrt{\hat{D}\{\hat{b}\}}}$  при  $\lambda T = 100$  для приведенного выше случая с нанесенной на них стандартной кривой нормального распределения.

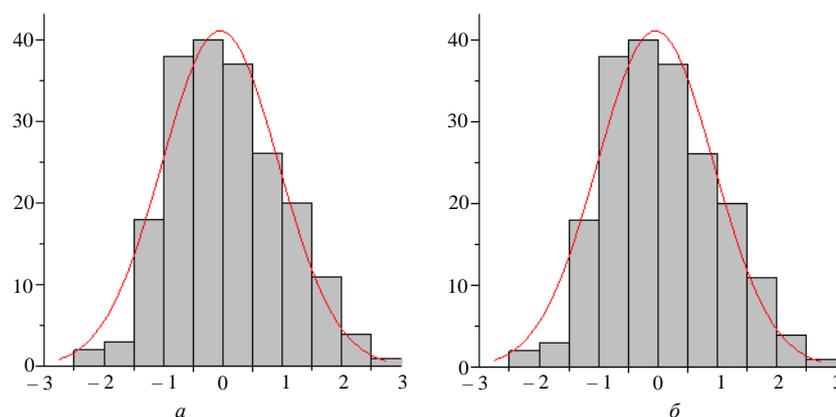


Рис. 2

Эти гистограммы получены моделированием оценок тренда при числе повторений  $N = 200$ . В этом случае гипотеза о нормальности также удовлетворяет по критерию  $\chi^2$  с 95 %-м уровнем значимости. Несколько хуже выделяется квадратичный тренд, что связано с ростом элементов матрицы  $\Phi^{(-1)}$ . Его надежное выделение начинается примерно с  $\lambda T = 150 \div 200$ , а нормальность оценок коэффициентов тренда — примерно с  $\lambda T = 300$ .

Выделение трендов более высоких порядков требует еще больших объемов выборки — так, например, надежное выделение тренда третьего порядка начинается примерно с  $\lambda T = 500$ . Поэтому рекомендуется при использовании изложенной выше методики выделять тренды в виде полиномов порядка не выше 3.

### Заключение

В работе рассмотрена проблема выделения трендов финансовых потоков, когда моменты времени появления их элементов  $t_i$  случайны. Все результаты конкретизированы для полиномиальных трендов.

Рассмотрены два случая: а) моменты  $t_i$  известны точно; б) моменты  $t_i$  неизвестны.

1. Для случая, когда моменты  $t_i$  известны точно, предложен упрощенный алгоритм оценки параметров тренда, дающий асимптотически несмещенные оценки. Показано, что эти оценки параметров тренда сходятся при  $\lambda \rightarrow \infty$  в среднеквадратичном смысле и почти наверное к истинным значениям оценок, а также являются асимптотически нормальными. Найдена матрица ковариаций этих оценок и построена для нее несмещенная и состоятельная оценка.

2. Для случая, когда о моментах появления элементов финансового потока  $t_i$  известна лишь их последовательность, построен алгоритм оценки параметров тренда, доказана сходимость их оценок к истинным значениям параметров в среднеквадратичном смысле, а также найдены матрица ковариации оценок и ее свойства.

3. Для проверки и работоспособности предложенных алгоритмов выделения трендов проведено имитационное моделирование, позволившее уточнить пределы применимости построенных оценок и те значения объемов выборки, с которых оценки параметров можно считать асимптотически нормальными. В результате исследований рекомендуется данными алгоритмами выделять полиномиальные тренды не выше третьего порядка.

*Ф.Ф. Ідрісов*

**НАБЛИЖЕНІ АЛГОРИТМИ ВИДІЛЕННЯ ТРЕНДІВ  
В ЗАДАЧАХ ФІНАНСОВОЇ РОЗВІДКИ. Частина 2.  
МОМЕНТИ ПОЯВИ ЕЛЕМЕНТІВ  
ФІНАНСОВОГО ПОТОКУ НЕВІДОМІ**

Розглянуто наближені алгоритми оцінювання трендів в задачах фінансової розвідки. Досліджено випадок, коли моменти появи елементів фінансового потоку невідомі. Отримано оцінки статистичних характеристик запропонованих алгоритмів.

*F.F. Idrisov*

**APPROXIMATE ALGORITHMS OF ESTIMATING  
TRENDS FOR FINANCIAL INTELLIGENCE  
TASKS. Part II. MOMENTS OF THE APPEARANCE  
OF FINANCIAL FLOW ELEMENTS ARE UNKNOWN**

Approximate algorithms for estimating trends in financial intelligence tasks are considered. The case when the appearance of financial flow elements are unknown is investigated. The estimates of the statistical characteristics of the proposed algorithms are obtained.

1. *Ідрісов Ф.Ф.* Оценка параметров динамических систем при случайных пропусках измерений// Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — 4. — С. 18–26
2. *Alguliev R., Abdullaeva F.* User profiles and identifying user behavior in the cloud computing environment// Universal journal of communications and network. — 2014. — 2, N 5. — P. 87–92.
3. *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1972. — 287 с.
4. *Кендал М. Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. — М.: Наука, 1966. — 587 с.

*Получено 18.04.2017*