УДК 517.977

А.Г. Наконечный, С.О. Мащенко, В.К. Чикрий

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Введение

Вопросам принятия решений в условиях неопределенности посвящена обширная научная литература. В зависимости от обстоятельств возникают различные постановки задач и соответствующие математические методы, обеспечивающие оптимальный или гарантированный результат. В любом случае такого рода проблемы носят игровой характер. В динамической ситуации противодействия следовало бы выделить фундаментальные исследования [1,2]. Несколько иной класс задач представляют собой задачи минимаксного оценивания [3]. Неопределенность может быть, в частности, нечеткой природы [4].

В данной работе в качестве предмета для исследований выбран один из методов теории динамических игр [5–7], связанный с построением некоторых скалярных функций — разрешающих функций, качественно характеризующих ход конфликтно-управляемого процесса и эффективность принятых решений. Работа [8] расширяет возможности подхода за счет введения матричных разрешающих функций.

В отличие от основной схемы упомянутого метода здесь рассматривается ситуация, когда не имеет места классическое условие Понтрягина, что приводит к необходимости введения верхних и нижних разрешающих функций двух типов, связанных со специальными многозначными отображениями, характеризующими игровую задачу. Через эти функции формируются достаточные условия завершения игры за некоторое гарантированное время. Приведены различные схемы метода, результаты иллюстрируются на модельном примере.

Постановка задачи о сближении, схема метода

Пусть в конечномерном евклидовом пространстве R^n движение управляемого объекта при наличии противодействия описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \ \ z(0) = z_0, \ \ u \in U \in K(R^n), \ \ v \in V \in K(R^n). \qquad (1)$$

Здесь A — квадратная матрица порядка n, $\varphi(u, v)$ — блок управления, u и v — управляющие параметры, функция непрерывная по совокупности переменных на множестве $U \times V$, $K(R^n)$ — непустые компакты пространства R^n.

Вместе с конфликтно-управляемой системой (1) задано цилиндрическое терминальное множество

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M \in K(L)$, L — ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цель первого игрока (u) — вывести траекторию системы (1) на множество M^* за кратчайшее время, второй игрок (v) этому препятствует.

Определим информированность противодействующих сторон в процессе игры. Второй игрок в качестве допустимых управлений выбирает произвольные измеримые функции времени со значениями из компакта V. Поведение первого игрока характеризуется выбором квазистратегий, которые назначают измеримое управление

$$u(t) = u(\ z_0, v_t(\cdot)) \in U\ ,\ v_t(\cdot) = \{v(s) :\ v(s) \in V\ ,\ s \in [t_0, t]\}, \tag{3}$$

зависящее от предыстории управления второго игрока, либо выбором стробоскопических стратегий, которые назначают контруправление

$$u(t) = u(\ z_0, v(t)) \in U\ , \tag{4}$$

и это измеримое управление зависит лишь от мгновенного значения управления второго игрока.

Обозначим π ортопроектор, который действует из R^n в L, и введем многозначное отображение

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\},\ v \in V\ .$$

Пусть

$$W(t, v) = \pi e^{At}\varphi(U, v),\ W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v)\ ,$$

где e^{At} — матричная экспонента.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t)$, $t \geq 0,$ имеет непустые образы.

В силу допущений о параметрах конфликно-управляемого процесса (1), (2) и условия Понтрягина многозначное отображение $W(t)$ является измеримым и замкнутозначным. Поэтому [9] в нем существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma(t), \gamma(t) \in W(t)$. Зафиксируем один из них и, обозначив $\xi(t) = \pi e^{At} z_0 + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$, введем многозначное отображение

$$B(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : [\pi e^{A(t-\tau)}\varphi(U, v) - \gamma(t-\tau)] \cap \alpha[M - \xi(t)] \neq \varnothing\}, \tag{5}$$

$$t \geq \tau \geq 0,\ \ v \in V,$$

и его опорную функцию в направлении +1

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in B(t, \tau, v)\}\ .$$

Образы многозначного отображения $B(t, \tau, v)$ непусты в силу условия Понтрягина. Разрешающая функция $\alpha(t, \tau, v)$ при фиксированном t суперпозиционно измерима по τ [5].

 ISSN 0572-2691

Рассмотрим множество

$$T(z_0, \gamma(\cdot)) = \{t \ge 0 : \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau))d\tau \ge 1\} . \qquad (6)$$

Здесь и далее inf по $v(\cdot)$ берется по всем измеримым функциям $v(t)$ со значениями из множества V, обозначим это множество Ω_E. Наименьший элемент $t(z_0, \gamma(\cdot)) = \inf\{t : t \in T(z_0, \gamma(\cdot))\}$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, множество M выпукло и для фиксированного селектора $\gamma(\cdot)$ многозначного отображения $W(t)$ множество (2) не пусто, причем $T \in T(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент T с помощью управления вида (3).

Если к тому же отображение $B\,(T, \tau, v)$ выпуклозначно и

$$\inf_{v(\cdot)} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau))d\tau = \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v)d\tau \, , \; t \in [0, T] \, ,$$

то этого же результата можно достичь в классе контруправлений (4).

Детальное доказательство вытекает из результатов работы [5]. Здесь приведем лишь некоторые конструктивные соотношения для выбора управлений первого игрока, необходимые для решения конкретного иллюстративного примера.

Рассмотрим первую часть утверждения. Если $\xi(T) \notin M$, то весь игровой интервал $[0, T]$ разобьем на две части: $[0, t_*)$ и $[t_*, T]$, активный и пассивный участки, где момент переключения t_* — ноль контрольной функции

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T, \tau, v(\tau)))d\tau \, . \qquad (7)$$

Тогда управление первого игрока на активном участке $[0, t_*)$ выбирается в виде суперпозиционно измеримого селектора многозначного отображения

$$U(\tau, v) = \{u \in U : \pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u, v) - \gamma(T-\tau) \in \alpha(T, \tau, v)[M - \xi(T)]\} \, , \qquad (8)$$

на пассивном участке $[t_*, T]$ аналогично, но в (8) $\alpha(T, \tau, v) \equiv 0$.

Поскольку момент переключения $t_* = t_*(v(\cdot))$ зависит от предыстории управления второго игрока, то поведение первого игрока назначается квазистратегией.

В случае $\xi(T) \in M$ управление первого игрока на всем интервале $[0, T]$ выбирается так же, как на пассивном участке.

Во второй части утверждения, когда отображение $B\,(T, \tau, v)$ выпуклозначно и inf с интегралом можно переставить местами, также рассмотрим два случая. Если $\xi(T) \notin M$, то обозначим

$$\alpha(T) = \int_0^T \inf_{v \in V} \alpha(T, \tau, v)d\tau \, , \; \bar{\alpha}(T, \tau) = \frac{1}{\alpha(T)} \inf_{v \in V} \alpha(T, \tau, v) \, .$$

Тогда управление первого игрока на всем интервале $[0, T]$ выбирается в виде суперпозиционно измеримого селектора многозначного отображения

$$U^*(\tau, v) = \{u \in U : \pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u, v) - \gamma(T-\tau) \in \bar{\alpha}(T, \tau)[M - \xi(T)]\} \, . \qquad (9)$$

При $\xi(T) \in M$ управление первого игрока выбирается так же, как на пассивном участке, но в (9) $\overline{\alpha}(T, \tau) \equiv 0$.

Заметим также, что управление первого игрока, реализующее вторую часть утверждения, осуществляется в классе контруправлений.

Из законов управления (5)–(9) на основе формулы Коши вытекает попадание траектории системы (1) на M^* в момент T [5].

Опишем несколько другой способ получения достаточных условий завершения игры (1), (2) в классе стробоскопических стратегий. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$B(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} B(t, \tau, v), \ t \geq \tau \geq 0, \tag{10}$$

его опорную функцию в направлении + 1

$$\alpha(t, \tau) = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha \in B(t, \tau)\}$$

и введем множество

$$\Theta(z_0, \gamma(\cdot)) = \{t > 0 : \int_0^t \alpha(t, \tau) d\tau \geq 1\}.$$

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, множество M выпукло и для некоторого измеримого селектора $\gamma(t), \gamma(t) \in W(t)$, многозначное отображение (10) имеет непустые образы, причем $\Theta \in \Theta(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (2) в момент Θ с помощью подходящего контруправления первого игрока.

Выбор управления первого игрока осуществляется аналогично ситуации, связанной с теоремой 1, ее первой частью, с той лишь разницей, что вместо T фигурирует число Θ, а вместо разрешающей функции $\alpha(t, \tau, v)$ используется функция $\alpha(t, \tau)$.

Первый прямой метод Понтрягина

Со стробоскопическими стратегиями тесно связан первый прямой метод Понтрягина. Рассмотрим множество

$$P(z_0) = \{t > 0 : \pi\, e^{At} z_0 \in M - \int_0^t W(\tau) d\tau\},$$

где под интегралом от многозначного отображения понимается интеграл Ауманна [8].

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, $P(z_0) \neq \varnothing$, а $P \in P(z_0)$. Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на множество (2) в момент P с помощью некоторого контруправления.

Гарантированное управление первого игрока в данном случае — суперпозиционно измеримый селектор многозначного отображения

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U : \pi e^{A(P-\tau)} \varphi(u, v) - \gamma(P - \tau) = 0\}, \ v \in V, \ \tau \in [0, P],$$

где $\gamma(P - \tau)$ удовлетворяет условию

$$\pi e^{AP} z_0 = m - \int_0^P \gamma(P - \tau) d\tau, \quad m \in M.$$

Оно обеспечивает попадание траектории (1) на множество M^* в силу формулы Коши.

Если выполнено условие Понтрягина, то для того, чтобы $\pi e^{aP} z_0 \in \in M - \int_0^t W(\tau)d\tau$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой измеримый селектор $\gamma(t),\ \gamma(t) \in W(t)$, что $\xi(t) \in M$. Эта ситуация соответствует вырождению разрешающей функции, $\alpha(t, \tau, v) = +\infty \forall \tau \in [0, t],\ v \in V$.

Схема с фиксированными точками телесной части терминального множества

В теоремах 1 и 2 одно из допущений — выпуклость множества M — телесной части терминального множества. Приведем одну из схем метода разрешающих функций, где условие выпуклости отсутствует, но для некоторой компенсации точка прицеливания на множестве M с течением времени не меняется.

Пусть выполнено условие Понтрягина и $\gamma(t)$ — измеримый селектор многозначного отображения $W(t)$. Зафиксируем точку $m,\ m \in M,$ и положим $\eta(t, m) = \xi(t) - m,\ t \geq 0$. Введем многозначное отображение

$$B(t, \tau, v, m) = \{\alpha \geq 0 : -\alpha\eta(t, m) \in \pi e^{A(t-\tau)}\varphi(U, v) - \gamma(t-\tau)\}$$

и его опорную функцию в направлении + 1

$$\alpha(t, \tau, v, m) = \sup\{\alpha : \alpha \in B(t, \tau, v, m)\},\ t \geq \tau \geq 0,\ v \in V,\ m \in M\ .$$

Заметим, что при $\eta(t, m) = 0$ $B(t, \tau, v, m) = [0, +\infty)$ для $\tau \in [0, t],\ v \in V$, и соответственно $\alpha(t, \tau, v, m) = +\infty$ для указанных значений переменных.

Рассмотрим множество

$$T(z_0, m, \gamma(\cdot)) = \{t > 0 : \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau), m)d\tau \geq 1\}$$

и его наименьший элемент в предположении, что такой достигается,

$$t(z_0, m, \gamma(\cdot)) = \inf\{t > 0 : t \in T(z_0, m, \gamma(\cdot))\}\ .$$

Если функция $t(z_0, m, \gamma(\cdot))$ полунепрерывна снизу по $m, m \in M$, то она порождает маргинальное множество

$$\mathrm{M}(z_0, \gamma(\cdot)) = \{m \in M : t(z_0, m, \gamma(\cdot)) = \bar{t}(z_0, \gamma(\cdot))\},$$

где $\bar{t}(z_0, \gamma(\cdot)) = \min_{m \in M} t(z_0, m, \gamma(\cdot))$.

Для сравнения отметим [5], что

$$t(z_0, \gamma(\cdot)) = \inf\{t > 0 : \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \max_{m \in M} \alpha(t, \tau, v(\tau), m)d\tau \geq 1\},$$

$$\bar{t}(z_0, \gamma(\cdot)) = \inf\{t > 0 : \max_{m \in M} \inf_{v(\cdot)} \int_0^t \alpha(t, \tau, v(\tau), m)d\tau \geq 1\},$$

причем $\max_{m \in M} \alpha(t, \tau, v, m) = \alpha(t, \tau, v)$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, для некоторого измеримого селектора $\gamma(t), \gamma(t) \in W(t)$, и точки $m,\ m \in M$, $T_m \in T(z_0, m, \gamma(\cdot)) \neq \varnothing$.

Тогда проекция траектории (1) может быть приведена в точку m в момент T_m с помощью некоторого управления, предписанного квазистратегией.

Не приводя подробного доказательства, укажем лишь способ построения управления, он аналогичен ситуации, связанной с теоремой 1.

Если $\eta(T_m, m) \neq 0$, то интервал $[0, T_m]$ разобьем на активный и пассивный участки: $[0, t_m)$ и $[t_m, T_m]$, где момент переключения t_m является нулем контрольной функции

$$h_m(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T_m, \tau, v(\tau), m) d\tau .$$

Тогда управление первого игрока на активном участке $[0, t_m)$ выбирается в виде суперпозиционно измеримого селектора многозначного отображения

$$U(\tau, v, m) = \{u \in U : \pi e^{A(T_m - \tau)} \varphi(u, v) - \gamma(T_m - \tau) =$$

$$= -\alpha(T_m, \tau, v, m) \eta(T_m, m)\},\ \tau \in [0, t_m),\ v \in V, \tag{11}$$

на пассивном участке $[t_m, T_m]$ — аналогично, но в (11) $\alpha(T_m, \tau, v, m) = 0$.

Если $\eta(T_m, m) = 0$, то на всем интервале $[0, T_m]$ управление первого игрока выбирается, как на пассивном участке.

Верхние и нижние разрешающие функции, функция сдвига

В дальнейшем будем считать, что условие Понтрягина не выполняется, т.е. $\mathrm{dom} W \neq R_+,\ \mathrm{dom} W = \{t \geq 0 : W(t) \neq 0\},\ R_+ = \{t : t \geq 0\}$. Это означает, что селектор Понтрягина для многозначного отображения $W(t)$, вообще говоря, не существует. Его роль будет выполнять некоторая специальная функция $\gamma_0(t)$.

Пусть $\gamma_0(t),\ \gamma_0 : R_+ \to L$ — почти везде ограниченная и суммируемая функция. Зафиксируем ее и назовем функцией сдвига.

Обозначим $\xi_0(t) = \pi e^{At} z_0 + \int_0^t \gamma_0(\tau) d\tau$ и рассмотрим многозначное отображение

$$B_0(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : [\pi e^{A(t-\tau)} \varphi(U, v) - \gamma_0(t-\tau)] \cap \alpha [M - \xi_0(t)] \neq \varnothing\},\ t \geq \tau \geq 0,\ v \in V.$$

Оно замкнутозначно и измеримо по $\tau,\ \tau \in [0, t]$ при любом $v \in V$.

Поскольку условие Понтрягина не имеет места, то сдвинутое многозначное отображение $W(t-\tau, v) - \gamma_0(t-\tau)$ при некоторых значениях переменных не содержит нуля и в этом случае $0 \notin B_0(t, \tau, v)$, что не исключает факт пустоты образов отображения $B_0(t, \tau, v)$ для вышеупомянутых значений переменных.

Учитывая это обстоятельство, вместо условия Понтрягина будем требовать более слабое предположение.

Условие 1. Многозначное отображение $B_0(t, \tau, v)$ имеет непустые образы при $t \geq \tau \geq 0$, $v \in V$.

В выпуклом анализе [10] при описании множеств ключевую роль играют опорные функции $\rho_X(p) = \sup_{x \in X} (p, x)$, где X — множество из R^n.

 ISSN 0572-2691

Если множество X выпукло и замкнуто, то функция $\rho_X(p)$ выпукла и положительно однородна. Будем называть такие функции верхними опорными функциями, а параллельно введем нижние опорные функции $\sigma_X(p) = \inf_{x \in X}(p, x)$. Тогда

$$\rho_X(-p) = -\sigma_X(p) \forall p \in R^n .$$

Если множество X выпукло и замкнуто, то между ним и его верхними и нижними опорными функциями существует взаимно однозначное соответствие [10], причем

$$X = \{x : (x, p) \le \rho_X(p) \forall p \in R^n\} = \{x : (x, p) \ge \sigma_X(p) \forall p \in R^n\} .$$

С учетом вышесказанного и при условии 1 многозначное отображение $B_0(t, \tau, v)$, значения которого — числовые множества положительной полуоси, порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции первого типа:

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in B_0(t, \tau, v)\} , \tag{12}$$

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in B_0(t, \tau, v)\},\ t \ge \tau \ge 0,\ v \in V.$$

Отметим, что обе функции зависят от мгновенного значения управления второго игрока, являясь соответственно верхней и нижней опорной функцией образов многозначного отображения $B_0(t, \tau, v)$ в направлении + 1.

Из выражения для $B_0(t, \tau, v)$ в силу теорем о характеризации, обратном образе и опорной функции [9] вытекает, что разрешающие функции (12) при фиксированном $t \in R_+$ суперпозиционно измеримы, т.е. $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$, $\alpha_*(t, \tau, v(\tau))$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in \Omega_E$.

Обозначим множество

$$T^*(z_0, \gamma_0(\cdot)) = \{t > 0 : \inf_{v(\cdot) \in \Omega_E} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau)) d\tau \ge 1\} . \tag{13}$$

Если для некоторого t, $t > 0$, $\alpha^*(t, \tau, v) = +\infty$ для $t \ge \tau \ge 0$, $v \in V$, то значения интеграла в (13) положим равным $+\infty$, тогда автоматически $t \in T^*(z_0, \gamma_0(\cdot))$. В случае, когда неравенство в (13) не имеет места при всех $t > 0$, положим $T^*(z_0, \gamma_0(\cdot)) = \varnothing$.

По аналогии с предыдущим введем многозначное отображение

$$B_0(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} B_0(t, \tau, v),\ t \ge \tau \ge 0 .$$

Условие 2. Для всех $t \ge \tau \ge 0$ $B_0(t, \tau) \ne \varnothing$.

Отображение $B_0(t, \tau)$ измеримое по τ [5], оно порождает верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа:

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in B_0(t, \tau)\} ,\ \alpha_*(t, \tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in B_0(t, \tau)\} ,$$

которые являются верхней и нижней опорными функциями образов отображения $B_0(t, \tau)$ в направлении + 1. По теореме об опорной функции [8] они измеримы по τ. Введем числовые функции

$$\alpha^*(t) = \int_0^t \alpha^*(t, \tau) d\tau ,\ \alpha_*(t) = \int_0^t \alpha_*(t, \tau) d\tau .$$

Процесс сближения без условия Понтрягина

Имеет место утверждение.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) телесная часть терминального множества выпукла и существует такая функция сдвига $\gamma_0(\cdot)$, что выполнено условие 2. Тогда если $T \in T(z_0, \gamma_0(\cdot)) \neq \varnothing$, то в случае $\alpha_*(T) < 1$ траектория системы (1) может быть приведена на множество (2) в момент T с помощью квазистратегии первого игрока, а если к тому же $\alpha^*(T) \geq 1$, то — в классе контруправлений при любом управлении противоборствующей стороны.

Доказательство. Пусть $v(\cdot) \in \Omega_E$, а функция $\alpha^*(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, принимает конечные значения. Рассмотрим контрольную функцию

$$h_1(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, v(\tau))d\tau - \int_t^T \alpha_*(T, \tau)d\tau, \ t \in [0, T].$$

Как отмечалось ранее, подынтегральные функции измеримы, а следовательно, функция $h_1(t)$ абсолютно непрерывна. Поскольку

$$h_1(0) = 1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau)d\tau = 1 - \alpha_*(T) > 0, \ h_1(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau))d\tau \leq 0,$$

то существует такой момент t_*^1, $t_*^1 \in [0, T]$, что $h_1(t_*^1) = 0$.

Заметим, что момент переключения t_*^1 зависит от предыстории управления второго игрока. Укажем способ управления первого игрока на активном $[0, t_*^1)$ и пассивном $[t_*^1, T]$ участках. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения:

$$U_1(\tau, v) = \{u \in U : \pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u, v) - \gamma_0(T-\tau) \in$$
$$\in \alpha^*(T, \tau, v)[M - \xi_0(T)]\}, \ \tau \in [0, t_*^1), \tag{14}$$
$$U_2(\tau, v) = \{u \in U : \pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u, v) - \gamma_0(T-\tau) \in \alpha_*(T, \tau)[M - \xi_0(T)]\}, \ \tau \in [t_*^1, T].$$

Из условия 3 вытекает, что отображения $U_1(\tau, v)$, $U_2(\tau, v)$ имеют непустые образы и являются $L \times B$-измеримыми [5]. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [9] в них существуют $L \times B$-измеримые селекторы $u_1(\tau, v)$, $u_2(\tau, v)$ соответственно, являясь суперпозиционно измеримыми функциями [8].

Обозначив $u_1(\tau) = u_1(\tau, v(\tau))$, $u_2(\tau) = u_2(\tau, v(\tau))$, положим управление первого игрока

$$u_1(\tau), \ \tau \in [0, t_*^1), \text{ и } u_2(\tau), \ \tau \in [t_*^1, T].$$

Из формулы Коши для представления решения системы (1) при указанных управлениях первого игрока и произвольных управлениях второго получим

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z_0 + \int_0^{t_*^1} \pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u_1(\tau), v(\tau))d\tau + \int_{t_*^1}^T \pi e^{A(T-\tau)}\varphi(u_2(\tau), v(\tau))d\tau.$$

Прибавив и вычтя в правой части интеграл от функции сдвига $\int_0^T \gamma_0(T-\tau)d\tau$ и учитывая включения в соотношениях (14), имеем

$$\pi z(T) \in \pi e^{AT} z_0 + \int_0^{t_*^1} \alpha^*(T, \tau, v(\tau))[M - \xi_0(T)]d\tau + \int_{t_*^1}^{T} \alpha_*(T, \tau)[M - \xi_0(T)]d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \gamma_0(T - \tau)d\tau = [\int_0^{t_*^1} \alpha^*(T, \tau, v(\tau))d\tau + \int_{t_*^1}^{T} \alpha_*(T, \tau)d\tau] M = M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*^1) = 0$.

Случай $\alpha^*(T, \tau, v) = +\infty$ для некоторых $v \in V, \tau \in [0, T]$, как вытекает из выражения для $B_0(t, \tau, v)$, возможен лишь при условиях

$$\xi_0(T) \in M, \ \ \gamma_0(T - \tau) \in \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(U, v)$$

для этих переменных, а в этом случае для них

$$B_0(T, \tau, v) = [0, +\infty), \ \ B_0(T, \tau) = [0, +\infty).$$

Последнее позволяет выбирать в качестве верхней разрешающей функции первого типа в этих точках $\tau \in [0, T]$, где $\alpha^*(T, \tau, v(\tau)) = +\infty$, произвольную суперпозиционно измеримую функцию, а также произвольную нижнюю разрешающую функцию второго типа, которые удовлетворяют условию $h(t_*^1) = 0$ для некоторого $t_*^1, t_*^1 \in [o, T]$. Далее построение управления первого игрока аналогично предыдущей ситуации.

Если $\alpha^*(T, \tau, v(\tau)) \equiv +\infty$, $v \in V, \tau \in [0, T]$, то это соответствует первому прямому методу Понтрягина [1]. Действительно, включение

$$0 \in \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(U, v) - \gamma_0(T - \tau), \ \forall v \in V, \tau \in [0, T],$$

гарантирует выполнение условия Понтрягина, а функция сдвига $\gamma_0(\tau)$ является селектором Понтрягина. Из условия $\xi_0(T) \in M$ вытекает включение

$$\pi\, e^{AT} z_0 \in M - \int_0^T W(\tau)d\tau,$$

которое обеспечивает согласно теореме 3 окончание игры в момент T в классе стробоскопических стратегий.

Вторая часть утверждения теоремы касается случая $\alpha^*(T) \geq 1$, $\alpha_*(T) < 1$.

Для убывающей непрерывной контрольной функции

$$h_2(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau)d\tau - \int_t^T \alpha_*(T, \tau)d\tau,$$

удовлетворяющей условиям

$$h_2(0) = 1 - \alpha_*(T) > 0, \ \ h_2(T) = 1 - \alpha^*(T) \leq 0,$$

существует такой момент $t_*^2, t_*^2 \in [o, T]$, что $h_2(t_*^2) = 0.$

Отметим, что t_*^2 уже не зависит от $v(\cdot)$. На обоих участках $[0, t_*^2)$ и $[t_*^2, T]$ рассмотрим многозначные отображения (14), обозначив их $U_1^1(\tau, v)$, $U_2(\tau, v)$, причем в отображении $U_1^1(\tau, v)$ вместо $\alpha^*(T, \tau, v)$ фигурирует функция $\alpha^*(T, \tau)$.

Используя свойства $L \times B$-измеримости и компактозначности отображений $U_1^1(\tau, v)$, $U_2(\tau, v)$, выберем управление первого игрока в виде их суперпозиционно измеримых селекторов, которые определяют допустимые управления на активном и пассивном участках. Заключительные соображения аналогичны выводам в предыдущей ситуации.

Установим достаточные условия завершения игры в некоторый момент времени в классе стробоскопических стратегий, которые базируются на свойствах выпуклозначности отображения $B_0(T, \tau, v)$, $t \geq \tau \geq 0$, $v \in V$.

Условие 3. Для выбранной функции сдвига $\gamma_0(\tau)$, $\tau \geq 0$, функция $\inf\limits_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)$ измерима по τ, $\tau \in [0, t]$, при любом $t > 0$, причем

$$\inf_{v(\cdot) \in \Omega_E} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau)) d\tau = \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) d\tau = \alpha(t).$$

Положим $\bar{\alpha}(t, \tau) = 1/\alpha(t) \cdot \inf\limits_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)$, где $\alpha(t) = \int_0^t \inf\limits_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) d\tau$.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с выбранной функцией сдвига $\gamma_0(\tau), \tau \geq 0$, выполнены условия 2 и 3, $M = coM$, отображение $B_0(t, \tau, v)$ выпуклозначно для $t \geq \tau \geq 0, v \in V$, и для $T \in T(z_0, \gamma(\cdot)) \neq \emptyset$ имеет место неравенство

$$\bar{\alpha}(T, \tau) \geq \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v), \quad \tau \in [0, T]. \tag{15}$$

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество в момент T с помощью контруправления.

Доказательство. Ограничимся случаем $\alpha^*(T, \tau, v) < +\infty$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$.

Поскольку по определению $\alpha(T) \geq 1$, то

$$\bar{\alpha}(T, \tau) = 1/\alpha(T) \cdot \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v) \leq \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v), \quad \tau \in [0, T].$$

Учитывая неравенство (15), условие 2 и выпуклозначность отображения $B_0(T, \tau, v)$ для $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, получим включение

$$\bar{\alpha}(T, \tau) \in B_0(T, \tau), \quad \tau \in [0, T].$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U : \pi e^{A(T-\tau)} \varphi(u, v) - \gamma_0(T - \tau) \in \bar{\alpha}(T, \tau)[M - \xi_0(T)]\}, \tau \in [0, T], v \in V. \tag{16}$$

Оно компактнозначно и $L \times B$-измеримо, поэтому в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u(\tau, v)$, являющийся суперпозиционно измеримой функцией.

Положим управление первого игрока $u(\tau) = u(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$. Тогда из формулы Коши и включения в (16) получим

$$\pi z(T) \in \xi_0(T)[1 - \int_0^T \bar{\alpha}(T, \tau) d\tau] + \int_0^T \bar{\alpha}(T, \tau) M d\tau.$$

Поскольку M — выпуклый компакт, а $\int\limits_0^T \bar{\alpha}(T,\tau)d\tau = 1$, то $\int\limits_0^T \bar{\alpha}(T,\tau)Md\tau = M$, а значит, $\pi z(T) \in M$.

Иллюстративный пример

Динамика конфликтно-управляемого процесса задается системой уравнений

$$\dot{z} = \lambda z + u - v\,,\ z \in R^n\,,\ z(0) = z_0,\ \ \lambda \in R^n\,, \tag{17}$$

а управляющие параметры удовлетворяют ограничениям

$$\| u \| \le a \ge 1,\ \ \| v \| \le 1,$$

т.е. в общей схеме матрица $A = \lambda E,\ E$ — единичная квадратная матрица порядка n, блок управления $\varphi(u,v) = u - v$, а области управлений $U = aS = S_a,\ V = S$, где $S = \{z : \|z\| \le 1\}$ — единичный шар с центром в нуле.

Терминальное множество задается соотношением $\| z \| \le \varepsilon$. Это ε-окрестность начала координат, она соответствует при разделенных движениях игроков сближению преследователя и убегающего на расстояние ε. Таким образом,

$$M^* = M = \varepsilon S,\ \ M_0 = \{0\}\,.$$

Ортогональное дополнение L к M_0 в R^n есть все пространство R^n, $L = R^n$, а оператор ортогонального проектирования $\pi : R^n \to L$ является оператором тождественного преобразования и задается единичной матрицей E. Фундаментальная матрица $e^{At} = e^{\lambda t}E$. Соответственно, многозначное отображение

$$W(t) = e^{\lambda t}\ [aS \overset{*}{-} S] = e^{\lambda t}(a-1)S \ne \varnothing,$$

поскольку $a \ge 1$. Здесь $\overset{*}{-}$ — геометрическая разность Минковского [1, 5]. Условие Понтрягина выполнено, $W(t)$ — шар радиуса $e^{\lambda t}(a-1)$ с центром в нуле. Время первого прямого метода определяется включением

$$e^{\lambda t} z_0 \in \varepsilon S - \int\limits_0^t e^{\lambda t}(a-1)Sd\tau\,. \tag{18}$$

В силу свойств интеграла Ауманна [9] от многозначного отображения с шарообразными образами

$$\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}(a-1)Sd\tau = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)(a-1)S,\ \ \lambda \ne 0, \\ t(a-1)S,\ \ \lambda = 0. \end{cases}$$

Поскольку образы имеют свойство центральной симметрии, то в (18) знак минус перед интегралом следует заменить плюсом. Тогда включение (18) приобретет вид ($\lambda \ne 0$)

$$e^{\lambda t} z_0 \in [\varepsilon + \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)\,(a-1)\,]S. \tag{19}$$

Наибольший интерес вызывает наименьшее время, при котором выполнено включение (19). В силу непрерывности левой части и радиуса шара в правой части включения (19) для определения этого времени получим равенство

$$\left\| e^{\lambda t} z_0 \right\| = \varepsilon + \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)(a-1), \tag{20}$$

которое соответствует первому моменту попадания вектора $e^{\lambda t} z_0$ на границу шара $[\varepsilon + \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)(a-1)]S$. Из равенства (20) получим

$$e^{\lambda t} = \frac{\varepsilon - \frac{1}{\lambda}(a-1)}{\| z_0 \| - \frac{1}{\lambda}(a-1)} = \frac{\lambda\varepsilon - (a-1)}{\lambda \| z_o \| - (a-1)}.$$

Отсюда

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda\varepsilon - (a-1)}{\lambda \| z_0 \| - (a-1)} = \min\{t > 0 : t \in P(z_0)\}. \tag{21}$$

Поскольку $\| z_0 \| > \varepsilon$, то это время положительно лишь при $\lambda < 0$. Даже в случае одинаковых ресурсов ($a = 1$) при $\lambda < 0$ время (21) конечно, если $\varepsilon \neq 0$. Если же $\varepsilon = 0$, то попадание траектории в начало координат состоится лишь в момент $+\infty$. Обратим внимание, что при $\lambda < 0$ должно выполняться ограничение $0 < \frac{\lambda\varepsilon - (a-1)}{\lambda \| z_0 \| - (a-1)} < 1$, а это накладывает условие, что числитель и знаменатель должны быть одинаковых знаков. Но поскольку знаменатель отрицательный, то и числитель должен быть отрицательным: $\lambda\varepsilon - (a-1) < 0$. А это всегда имеет место при $\lambda < 0$. При $\lambda = 0$ из (18) вытекает включение

$$z_0 \in \varepsilon S + t(a-1)S = [\varepsilon + t(a-1)]S .$$

Первый момент попадания соответствует равенству $\| z_0 \| = \varepsilon + t(a-1)$, откуда $t = \frac{\| z_0 \| - \varepsilon}{a-1}$.

Заметим, что при $\lambda > 0$ в (21) должно быть $\frac{\lambda\varepsilon - (a-1)}{\lambda \| z_0 \| - (a-1)} > 1$ для положительности времени *t*, а это ведет к неравенству $\varepsilon > \| z_0 \|$, что противоречит исходному предположению $\| z_0 \| > \varepsilon$, т.е. в этом случае закончить игру (17) за конечное время невозможно.

Селектор понтрягинского отображения $W(t)$ имеет вид

$$\gamma(\tau) = -e^{\lambda\tau}(a-1)\frac{z_0}{\| z_0 \|}.$$

Он определяет контруправление преследователя

$$u(\tau) = v(\tau) - (a-1)\frac{z_0}{\| z_0 \|},$$

которое и реализует параллельное ε-сближение в момент *t* в точке $\varepsilon \frac{z_0}{\| z_0 \|}$.

Действительно, рассмотрим представление траектории в виде формулы Коши с выбранным управлением. Тогда получим

$$z(t)=e^{\lambda t}z_0-\int_0^t e^{\lambda t}(a-1)\frac{z_0}{\|z_0\|}d\tau=\frac{\lambda\varepsilon-(a-1)}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}z_0-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda\varepsilon-(a-1)}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}-1\right)(a-1)\times$$

$$\times\frac{z_0}{\|z_0\|}=\frac{z_0}{\|z_0\|}\left[\frac{\lambda\varepsilon-(a-1)}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}\|z_0\|-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda\varepsilon-\lambda\|z_0\|}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}\right)\right](a-1)=\frac{z_0}{\|z_0\|}\times$$

$$\times\left[\frac{(\lambda\varepsilon-(a-1))\|z_0\|-(\varepsilon-\|z_0\|)(a-1)}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}\right]=\frac{z_0}{\|z_0\|}\,\frac{\varepsilon(\lambda\|z_0\|-(a-1))}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}=\varepsilon\frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Параллельность ε-сближения вытекает из представления траектории

$$z(t)=\left[e^{\lambda t}+\int_0^t e^{\lambda\tau}\frac{a-1}{\|z_0\|}d\tau\right]z_0,\ \ \forall t\geq 0.$$

Применим аппарат разрешающих функций для решения примера (17). Поскольку отображение $W(t)$ имеет вид шара с центром в 0 и, следовательно, условие Понтрягина выполнено, выберем в $W(t)$ селектор, который совпадает с началом координат, т.е. $\gamma(t)\equiv 0$. Тогда $\xi(t)=e^{\lambda t}z_0$, многозначное отображение

$$B(t,\tau,v)=\{\alpha\geq 0: e^{\lambda(t-\tau)}(aS-v)\cap\alpha[\varepsilon S-e^{\lambda t}z_0]\neq\varnothing\},$$

а разрешающая функция

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\alpha\geq 0:\alpha e^{\lambda t}z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v\in[\alpha\varepsilon+e^{\lambda(t-\tau)}a]S\},$$

т.е. $B(t,\tau,v)=[0,\alpha(t,\tau,v)]$ — отрезок полуоси R_+. Она удовлетворяет равенству $\left\|\alpha e^{\lambda t}z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v\right\|=\alpha\varepsilon+e^{\lambda(t-\tau)}a,$ которое сводится к квадратному уравнению относительно α,

$$(\alpha e^{\lambda t}z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v,\ \alpha e^{\lambda t}z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v)=[\alpha\varepsilon+e^{\lambda(t-\tau)}a]^2,$$

в стандартном виде

$$[e^{2\lambda t}\|z_0\|^2-\varepsilon^2]\alpha^2-2[(e^{\lambda t}z_0,e^{\lambda(t-\tau)}v)+\varepsilon a e^{\lambda(t-\tau)}]\alpha+e^{2\lambda(t-\tau)}(\|v\|^2-a^2)=0.$$

Его больший положительный корень и есть разрешающая функция

$$\alpha(t,\tau,v)=\frac{(e^{\lambda t}z_0,e^{\lambda(t-\tau)}v)+\sqrt{[(e^{\lambda t}z_0,e^{\lambda(t-\tau)}v]^2+(e^{2\lambda t}\|z_0\|^2-\varepsilon^2)e^{2\lambda(t-\tau)}(a^2-\|v\|^2)}}{e^{2\lambda t}\|z_0\|^2-\varepsilon^2}.$$

Учитывая, что $\min\limits_{\|v\|\leq 1}\alpha(t,\tau,v)$ достигается при $v=-\frac{z_0}{\|z_0\|}$, получаем

$$\min_{\|v\|\leq 1}\alpha(t,\tau,v)=\frac{-e^{\lambda(2t-\tau)}\|z_0\|+\varepsilon a e^{\lambda(t-\tau)}+\left|e^{\lambda(2t-\tau)}\|z_0\|a-\varepsilon e^{\lambda(t-\tau)}\right|}{e^{2\lambda t}\|z_0\|^2-\varepsilon^2}.\qquad(22)$$

Рассмотрим при $\lambda<0$ функцию $e^{\lambda t}\|z_0\|-\varepsilon=f(t)$. Очевидно, что $f(0)>0$, далее она убывает и обращается в нуль при $\bar{t}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{\|z_0\|}>0$.

Это время гарантирует окончание игры по первому прямому методу при $a=1$, при этом $\alpha(t,\tau,v)\equiv+\infty$. На интервале $[0,\bar{t}]$ $e^{\lambda t}\|z_0\|a-\varepsilon>0$ при $a>1$, поэтому, убрав модуль в (22) , получим

$$\min_{\|v\|\le 1} \alpha(t,\tau,v) = \frac{e^{\lambda(2t-\tau)}\|z_0\|(a-1)+\varepsilon e^{\lambda(t-\tau)}(a-1)}{e^{2\lambda t}\|z_0\|^2-\varepsilon^2} = \frac{(a-1)e^{\lambda(t-\tau)}}{e^{\lambda t}\|z_0\|-\varepsilon},\ t<\bar{t},$$

в силу непрерывности по t этой функции. Тогда минимальное время окончания игры по методу разрешающих функций дается соотношением $\int_0^t (a-1)e^{\lambda\tau}d\tau = e^{\lambda t}\|z_0\|-\varepsilon$. Далее $\frac{a-1}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)=e^{\lambda t}\|z_0\|-\varepsilon$, $e^{\lambda t}=\frac{\lambda\varepsilon-(a-1)}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}$,

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda\varepsilon-(a-1)}{\lambda\|z_0\|-(a-1)}=t(z_0,0). \qquad (23)$$

При $\lambda<0$ это время положительно, при $\lambda=0$ $t=\frac{\|z_0\|-\varepsilon}{a-1}$, как и в первом прямом методе Понтрягина. Учитывая выражение для $B(t,\tau,v)$, найдем точки прицеливания на множестве εS, а через них — и управление преследователя в явном виде.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathrm{M}(t,\tau,v)=\{m\in\varepsilon S:\alpha(t,\tau,v)(m-e^{\lambda t}z_0)\in e^{\lambda(t-\tau)}(aS-v)\},\ t\ge\tau\ge 0,\ v\in S.$$

В данном примере оно состоит из единого селектора

$$m(t,\tau,v)=\varepsilon\frac{\alpha(t,\tau,v)e^{\lambda t}z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v}{\left\|\alpha(t,\tau,v)e^{\lambda t}z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v\right\|}. \qquad (24)$$

Действительно, многозначные отображения $\alpha(t,\tau,v)(\varepsilon S-e^{\lambda t}z_0)$ и $e^{\lambda(t-\tau)}(aS-v)$ замкнуто- и выпуклозначно. Факт пересечения их образов означает, что ноль принадлежит их разности. Вычисляя опорные функции левой и правой части этого включения, получаем неравенство

$$\alpha(t,\tau,v)\varepsilon\|p\|+(e^{\lambda(t-\tau)}v-e^{\lambda t}\alpha(t,\tau,v)z_0,\ p)+e^{\lambda(t-\tau)}a\|p\|\ge 0,\ \forall p,\|p\|=1. \qquad (25)$$

Минимум по p левой части достигается на элементе

$$p=\frac{e^{\lambda t}\alpha(t,\tau,v)z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v}{\left\|e^{\lambda t}\alpha(t,\tau,v)z_0-e^{\lambda(t-\tau)}v\right\|}.$$

Отсюда вытекает, что селектор отображения $\mathrm{M}(t,\tau,v)$, на котором достигается максимум опорной функции отображения $\alpha(t,\tau,v)\varepsilon S$ с учетом неравенства (25) имеет вид (24).

Тогда управление, реализующее гарантированное время (23), имеет вид

$$u(\tau)=e^{-\lambda(T-\tau)}\{e^{\lambda(T-\tau)}v(\tau)+\bar{\alpha}(T,\tau,v(\tau))[m(T,\tau,v(\tau))-e^{\lambda T}z_0]\},\ T=t(z_0,0),$$

где

$$\bar{\alpha}(T,\tau,v(\tau))=\begin{cases}\alpha(T,\tau,v),\ \tau\in[0,t_*),\\ 0,\ \tau\in[t_*,T],\end{cases}\quad m(T,\tau,v)=\varepsilon\frac{\bar{\alpha}(T,\tau,v)e^{\lambda T}z_0-e^{\lambda(T-\tau)}v}{\left\|\bar{\alpha}(T,\tau,v)e^{\lambda T}z_0-e^{\lambda(T-\tau)}v\right\|}.$$

Здесь момент t_* разделяет активный и пассивный участки и является корнем контрольной функции

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T, \tau, v(\tau))\, d\tau, \ \ t > 0.$$

Поскольку есть момент переключения, а значит, используется предыстория управления убегающего, то, в целом, преследователь использует управление, назначенное квазистратегией . Отдельно на активном и пассивном участке оно является контруправлением [5–7].

С другой стороны, поскольку отображение $B(t, \tau, v)$ выпуклозначно, то игра может быть закончена и в классе контруправлений. Действительно, поскольку

$$\alpha(T) = \int_0^T \inf_{\|v\|\le 1} \alpha(T, \tau, v)\, d\tau = \int_0^T \frac{(a-1)e^{\lambda(T-\tau)}}{e^{\lambda T}\|z_0\| - \varepsilon}\, d\tau = 1,$$

то

$$\alpha^*(T, \tau) = \inf_{\|v\|\le 1} \alpha(T, \tau, v) = \frac{(a-1)e^{\lambda(T-\tau)}}{e^{\lambda T}\|z_0\| - \varepsilon}\ .$$

Таким образом, момент переключения отсутствует, если рассматривать контрольную функцию в виде $h_0(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau)\, d\tau,$ так как $h_0(T) = 1$.

Управление преследователя имеет вид

$$u(\tau) = e^{-\lambda(T-\tau)}\{e^{\lambda(T-\tau)}v(\tau) + \alpha^*(T, \tau)[m_1(T, \tau, v(\tau)) - e^{-\lambda T} z_0]\},$$

где

$$m_1(T, \tau, v) = \varepsilon \frac{\alpha^*(T, \tau)e^{\lambda T} z_0 - e^{\lambda(T-\tau)}v}{\left\| \alpha^*(T, \tau)e^{\lambda T} z_0 - e^{\lambda(T-\tau)}v \right\|}.$$

Легко видеть, что

$$B(t, \tau) = \bigcap_{v\in S} B(t, \tau, v) = [0, \alpha(t, \tau)] = [0, \alpha^*(t, \tau)]\ ,$$

поскольку

$$\alpha(t, \tau) = \alpha^*(t, \tau) = \frac{(a-1)e^{\lambda(t-\tau)}}{e^{\lambda t}\|z_0\| - \varepsilon}$$

и иллюстрация теоремы 2 дается предыдущими расчетами.

Рассмотрим схему метода разрешающих функций с фиксированной точкой множества εS . Селектор $\gamma(t) \equiv 0,$ как и ранее. Тогда $\eta(t, m) = e^{\lambda t} z_0 - m$ и

$$B(t, \tau, v, m) = \{\alpha \ge 0 : -\alpha(e^{\lambda t} z_0 - m) \in e^{\lambda(t-\tau)}(aS - v)\}\ .$$

Опорная функция его образов в направлении + 1, она же разрешающая функция, удовлетворяет равенству

$$\left\| e^{\lambda(t-\tau)} v - \alpha(m - e^{\lambda t} z_0) \right\| = e^{\lambda(t-\tau)} a\ ,$$

что приводит к соответствующему квадратному уравнению относительно $\alpha.$ Его больший положительный корень имеет вид

$$\alpha(t,\tau,v,m)=$$

$$=\frac{(e^{\lambda(t-\tau)}v, e^{\lambda t}z_0-m)+\sqrt{((e^{\lambda(t-\tau)}v, e^{\lambda t}z_0-m)^2+\left\|e^{\lambda t}-m\right\|^2 e^{2\lambda(t-\tau)}(a^2-\|v\|^2)}}{\left\|e^{\lambda t}z_0-m\right\|^2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\min_{\|v\|\le 1}\alpha(t,\tau,v,m)=\frac{e^{\lambda(t-\tau)}(a-1)}{\left\|e^{\lambda t}z_0-m\right\|},$$

причем минимум достигается на элементе $v=-\frac{e^{\lambda t}z_0-m}{\left\|e^{\lambda t}z_0-m\right\|}$.

Тогда наименьшее время окончания игры в этой схеме

$$t(z_0,0)=\min\left\{t>0:\max_{m\in\varepsilon S}\int_0^t\frac{e^{\lambda(t-\tau)}(a-1)}{\left\|e^{\lambda t}z_0-m\right\|}d\tau=1\right\}=\min\left\{t>0:\frac{\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}(a-1)d\tau}{\min\limits_{m\in\varepsilon S}\left\|e^{\lambda t}z_0-m\right\|}=1\right\}.$$

Минимум в знаменателе достигается на элементе $m=\varepsilon\frac{z_0}{\|z_0\|}$.

Попадание в заданную точку m состоится в момент

$$t_m=\min\left\{t>0:\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)(a-1)=\left\|e^{\lambda t}z_0-m\right\|\right\},$$

который реализуется с помощью управления

$$u(\tau)=e^{-\lambda(t_m-\tau)}\{e^{\lambda(t_m-\tau)}v(\tau)-\bar{\alpha}(t_m,\tau,v(\tau),m)\eta(t_m,m)\},$$

где

$$\bar{\alpha}(t,\tau,v,m)=\begin{cases}\alpha(t_m,\tau,v,m), & \tau\in[0,t_m^*),\\ 0, & \tau\in[t_m^*,t_m],\end{cases}$$

а t_m^* — ноль контрольной функции $h_m(t)=1-\int_0^t\alpha(t_m,\tau,v(\tau),m)d\tau$.

Далее рассмотрим случай в примере (17) , когда область управления U есть границей шара S_a , т.е. $U=\partial S_a$. Тогда условие Понтрягина не выполняется, поскольку

$$W(t)=e^{\lambda t}[\partial S_a \overset{*}{-} S]=\varnothing.$$

Функцию сдвига $\gamma_0(t)$ положим тождественно равной нулю, $\xi_0(t)=e^{\lambda t}z_0$.

Многозначное отображение

$$B_0(t,\tau,v)=\{\alpha\ge 0: e^{\lambda(t-\tau)}(\partial S_a-v)\cap\alpha[\varepsilon S-e^{\lambda t}z_0]\ne\varnothing\}$$

имеет непустые образы при $t\ge\tau\ge 0,\ v\in S$ и условие 2 выполнено.

 ISSN 0572-2691

Из геометрических соображений легко видеть, что верхняя разрешающая функция первого типа $\alpha^*(t, \tau, v)$ совпадает с разрешающей функцией $\alpha(t, \tau, v)$, и поэтому момент окончания игры

$$T = T(z_0, 0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{\lambda\varepsilon - (a-1)}{\lambda \| z_0 \| - (a-1)}, \ \lambda < 0, \\ \\ \dfrac{\| z_0 \| - \varepsilon}{a-1}, \ \lambda = 0. \end{cases} \qquad (26)$$

Вычислим нижнюю разрешающую функцию первого типа:

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha \geq 0 : e^{\lambda(t-\tau)}(\partial S_a - v) \cap \alpha[\varepsilon S - e^{\lambda t} z_0] \neq \varnothing\} =$$

$$= \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha[\varepsilon S - e^{\lambda t} z_0] \subset e^{\lambda(t-\tau)}(aS - v)\} =$$

$$= \sup\{\alpha \geq 0 : \left\| \alpha e^{\lambda t} z_0 - e^{\lambda(t-\tau)} v \right\| = e^{\lambda(t-\tau)} \cdot a - \alpha\varepsilon\}.$$

Больший положительный корень соответствующего квадратного уравнения

$$[e^{2\lambda t} \| z_0 \|^2 - \varepsilon^2]\alpha^2 - 2[(e^{\lambda t} z_0, e^{\lambda(t-\tau)} v) - \varepsilon a e^{\lambda(t-\tau)}]\alpha + e^{2\lambda(t-\tau)}(\| v \|^2 - a^2) = 0$$

имеет вид

$$\alpha_*(t, \tau, v) =$$

$$= \frac{(e^{\lambda t} z_0, e^{\lambda(t-\tau)} v) - \varepsilon a e^{\lambda(t-\tau)} + \sqrt{[(e^{\lambda t} z_0, e^{\lambda(t-\upsilon)} v) - \varepsilon a e^{\lambda(t-\tau)}]^2 + (e^{2\lambda t} \| z_0 \|^2 - \varepsilon^2) e^{2\lambda(t-\tau)}(a^2 - \| v \|^2)}}{e^{2\lambda t} \| z_0 \|^2 - \varepsilon^2}.$$

Тогда

$$B_0(t, \tau, v) = [\alpha_*(t, \tau, v), \ \alpha^*(t, \tau, v)] \ \text{и} \ 0 \notin B_0(t, \tau, v).$$

Равенство $\alpha_*(t, \tau, v) = 0$ автоматически означало бы выполнение условия Понтрягина. При этом

$$\sup_{\| v \| \leq 1} \alpha_*(t, \tau, v) = \frac{(a+1) e^{\lambda(t-\tau)}}{e^{\lambda t} \| z_0 \| + \varepsilon}$$

реализуется при $v = \dfrac{z_0}{\| z_0 \|}$. Тогда

$$B_0(t, \tau) = \bigcap_{\| v \| \leq 1} B(t, \tau, v) = \left[\frac{(a+1) e^{\lambda(t-\tau)}}{e^{\lambda t} \| z_0 \| + \varepsilon}, \frac{(a-1) e^{\lambda(t-\tau)}}{e^{\lambda t} \| z_0 \| - \varepsilon} \right] =$$

$$= e^{\lambda(t-\tau)} \left[\frac{a+1}{e^{\lambda t} \| z_0 \| + \varepsilon}, \frac{a-1}{e^{\lambda t} \| z_0 \| - \varepsilon} \right]$$

и условие 2, означающее, что $B_0(t, \tau) \neq \varnothing, \ t \geq \tau \geq 0,$ выполнено, если $\dfrac{(a+1)}{e^{\lambda t} \| z_0 \| + \varepsilon} \leq$

$\leq \dfrac{(a-1)}{e^{\lambda t} \| z_0 \| - \varepsilon}$, что приводит к неравенству $e^{\lambda t} \| z_0 \| - a\varepsilon \leq 0$.

Верхняя и нижняя разрешающие функции второго типа в этом случае

$$\alpha^*(t,\tau)=\frac{e^{\lambda(t-\tau)}(a-1)}{e^{\lambda t}\| z_0\|-\varepsilon},\ \alpha_*(t,\tau)=\frac{e^{\lambda(t-\tau)}(a+1)}{e^{\lambda t}\| z_0\|+\varepsilon}.$$

Поскольку $\alpha^*(T)=1$, а при $e^{\lambda T}\| z_0\|-a\varepsilon<0$

$$\alpha_*(T,\tau)<\alpha^*(T,\tau),$$

то $\alpha_*(T)<1$ и из теоремы 4 вытекает возможность закончить игру за время T, заданное равенством (26).

Этот процесс реализуется с помощью управления преследователя

$$u(\tau)=e^{-\lambda(T-\tau)}\{e^{\lambda(T-\tau)}v(\tau)+\overset{\approx}{\alpha}(T,\tau,v(\tau))[m(T,\tau,v(\tau))-e^{\lambda T}z_0]\}, \tag{27}$$

где

$$\overset{\approx}{\alpha}(T,\tau,v)=\begin{cases}\alpha(T,\tau,v), & \tau\in[0,t_*^1),\\ \alpha_*(T,\tau), & \tau\in[t_*^1,T],\end{cases}$$

а $m(T,\tau,v)=\varepsilon\dfrac{\overset{\approx}{\alpha}(T,\tau,v)e^{\lambda T}z_0-e^{\lambda(T-\tau)}v}{\left\|\overset{\approx}{\alpha}(T,\tau,v)e^{\lambda T}z_0-e^{\lambda(T-\tau)}v\right\|}$.

Момент переключения t_*^1 — ноль контрольной функции

$$h(t)=1-\int_0^t\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau-\int_t^T\alpha_*(T,\tau)d\tau,\ t\in[0,T].$$

Функции $\alpha^*(T,\tau,v)$, $\alpha_*(T,\tau)$ найдены ранее в аналитическом виде.

Поскольку $\alpha^*(T)=1$, то сближение может быть реализовано с помощью контруправления вида (27) с функцией $m(T,\tau,v)$, где вместо $\overset{\approx}{\alpha}(T,\tau,v)$ фигурирует функция $\alpha^*(T,\tau)$, $\tau\in[0,T]$.

В теореме 6 неравенство (15) обеспечивается соотношением

$$e^{\lambda T}\| z_0\|-a\varepsilon\le 0.$$

Построение гарантированного управления преследователя осуществляется аналогично предыдущим ситуациям, следовательно, в этом случае

$$u(\tau)=e^{-\lambda(T-\tau)}\{e^{\lambda(T-\tau)}v(\tau)+\alpha(T,\tau)[m(T,\tau,v(\tau))-e^{\lambda T}z_0]\},$$

где

$$m(T,\tau,v)=\varepsilon\frac{\alpha(T,\tau)e^{\lambda T}z_0-e^{\lambda(T-\tau)}v}{\left\|\alpha(T,\tau)e^{\lambda T}z_0-e^{\lambda(T-\tau)}v\right\|},\ \tau\in[0,T].$$

Заключение

Для квазилинейных конфликтно-управляемых процессов рассмотрены различные схемы метода разрешающих функций. При этом исследованы ситуации, когда условие Понтрягина выполнено и когда оно не имеет места.

В последнем случае введены верхние и нижние разрешающие функции, позволяющие получить достаточные условия сближения.

Результаты иллюстрируются на модельном примере с простой матрицей и шарообразными областями управления.

О.Г. Наконечний, С.О. Мащенко, В.К. Чикрій

КЕРУВАННЯ РУХОМ В УМОВАХ ПРОТИДІЇ

Досліджуються квазілінійні конфліктно-керовані процеси зближення на основі першого прямого методу Понтрягіна та методу розв’язуючих функцій. За допомогою верхніх та нижніх розв’язуючих функцій встановлено достатні умови завершення гри за скінчений час для різних схем методу. Наведено ілюстративний приклад, в якому керування знайдені в явному вигляді.

A.G. Nakonechnyi, S.O. Mashchenko, V.K. Chikrii

MOTION CONTROL UNDER CONFLICT CONDITION

The quasilinear conflict — controlled processes of approach are studied on the basis of Pontryagin first direct method and the method of resolving functions. Using the upper and the lower resolving functions, sufficient conditions for the game termination in a finite time are established for various schemes of the provided, in which controls are found in explicit form.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. — М. : Наука, 1988. — **2**. — 576 с.
2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М. : Наука, 1970. — 420 с.
3. *Zhuk S., Polyakov A., Nakonechnyi O.* Sliding mode control design for linear evolution equations with uncertain measurements and exogenous perturbations // 20th IFAC World Congress (IFAC WC 2017). — 2017. — **50**, N 1. — P. 8513–8517.
4. *Mashchenko S.O., Morenets V.I.* Shapley value of a cooperative game with fuzzy set of feasible coalitions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2017. — **53**, N 3. — P. 432–440.
5. *Chikrii A.A.* An analytical method in dynamic pursuit games // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Pleiades Publishing, Ltd. — 2010. — **271**. — P. 69–85.
6. *Chikrii A.A.*Quasilinear controlled processes under conflict // Journal of Mathematical Sciences. — 1996. — **80**, N 1. — P.1489–1518.
7. *Chikrii A.A.* Multivalued mapping and their selections in game control problems // Journal of Automation and Information Sciences. — 1995. — **27**, N 1 — P. 27–38.
8. *Chikrii A.A., Chikrii G.Ts.* Matrix resolving functions in game problems of dynamics // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2015. — **291**, suppl. 1. — P. 56–65.
9. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin : Birkhäuser, 1990. — 461 p.
10. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М. : Мир, 1973. — 470 с.

Получено 25.10.2017