

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.71

В.Ф. Губарев, В.В. Фатенко

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕДУКЦИИ ПОРЯДКА МОДЕЛИ. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Введение

В работе [1] рассмотрена проблема редукции порядка модели наблюдаемой и управляемой линейной стационарной системы большой размерности с описанием ее в пространстве состояний. Решение такой задачи особенно востребовано, когда размерность переменных наблюдения существенно меньше размерности вектора внутреннего состояния системы. Например, в скалярном случае с одним выходом удастся построить аппроксимирующую модель третьего-четвертого порядков, отклик которой на любое ограниченное входное воздействие достаточно мало отличается от реакции реальной системы. В результате на основе достаточно простой системы уравнений можно прогнозировать поведение выходной переменной при различных входных воздействиях, в том числе управляемых.

Краткий обзор методов решения задачи редукции порядка модели сложной линейной системы дается также в [1]. В данной работе проведен сравнительный анализ вариационных и геометрических методов построения редуцированных приближенных моделей, описанных в работе [1], на основе численного моделирования.

Постановка задачи

Допустим, имеем исходную математическую модель линейной стационарной наблюдаемой системы большой размерности с описанием в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1)$$

где, как обычно, вектор состояния x имеет достаточно большую размерность N , входное воздействие представляется вектором u размерности R , измеряемый выход y имеет размерность M , а матрицы A , B , C заданы для некоторой реализации и имеют соответствующую размерность. Предполагается, что размерности R и M существенно меньше N . Ставится задача для тех же входов и выходов системы построить модель, в которой вектор внутреннего состояния имел бы существенно меньшую размерность, т.е. получить ее в виде

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \quad \bar{y} = \bar{C}\bar{x}, \quad (2)$$

где \bar{x} имеет размерность Q , матрицы \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} соответствующей усеченной размерности подлежат определению так, чтобы выход редуцированной модели \bar{y} той же размерности M , что и y исходной, удовлетворял условию

© В.Ф. ГУБАРЕВ, В.В. ФАТЕНКО, 2018

$$\|y - \bar{y}\| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

где ε — заданная малая величина. Неравенство (3) должно выполняться при достаточно произвольном, но ограниченном входном воздействии u . Норма в (3) устанавливается в каждой конкретной задаче. Здесь же будет рассмотрен достаточно общий и в то же время вполне естественный случай, когда условию (3) должна удовлетворять каждая компонента векторов y и \bar{y} , т.е.

$$\|y_i - \bar{y}_i\| \leq \varepsilon, \quad i \in \overline{1, M}. \quad (4)$$

Однако решить задачу редукции в такой постановке не так просто. Поэтому предлагается перейти к несколько иной ее трактовке. Вместо (4) используем другое условие, позволяющее находить приближенную модель, характеристики которой мало отличаются от соответствующих точной. Оценку их отклонения зададим аналогичным (4) неравенством. При этом ограничение ε в (4) может быть выражено через ограничения, налагаемые на соответствующие отклонения приближенной модели от точной.

В качестве указанных характеристик можно брать, например, передаточные функции, являющиеся элементами передаточных матриц, или фундаментальные решения, из которых формируется переходная матрица системы. Из теории линейных систем хорошо известно, что описание (1) при нулевых начальных условиях эквивалентно следующему соотношению вход-выход:

$$y(t) = \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $\Phi(\theta)$ — переходная матрица, элементы которой формируются из независимых фундаментальных решений.

Если возбуждающие воздействия подаются отдельно на каждый вход u_r при нулевых остальных, то отклик системы (5) на m -м выходе можно записать в виде

$$y_m(t) = \int_0^t c_m^T \Phi(t-\tau) b_r \cdot u_r(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где c_m^T — m -я вектор-строка C ; b_r — r -й вектор-столбец B ; $m \in \overline{1, M}$, $r \in \overline{1, R}$, а $y_m(t)$ и $u_r(t)$ — скалярные функции. Декомпозиция многосвязной системы (5) на отдельные подсистемы в форме (6) позволяет проводить редукцию модели независимо по каждой из них. Фактически многосвязная система представлена в виде совокупности односвязных подсистем, в каждой из которых скалярная функция $c_m^T \Phi(\theta) b_r$ — импульсная переходная функция, определяющая отклик системы на m -м выходе при воздействии на нее на r -м входе. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только скалярный случай односвязной системы, представленной соотношением (6). При этом для удобства опустим индексы m и r и будем считать $y(t)$, $u(t)$ и импульсную реакцию скалярными функциями.

Для матрицы A , записанной в блочно-диагональной жордановой форме, можно получить аналитическое выражение импульсной функции, например, с помощью подхода, описанного в [2, 3]. При отсутствии кратных корней (6) будет записано как

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где

$$h(\theta) = \sum_{p=1}^P [f_p^c \cos \beta_p \theta + f_p^s \sin \beta_p \theta] e^{-\alpha_p \theta},$$

$$f_p^c = c_{mp}^c \cdot b_{rp}^c + c_{mp}^s \cdot b_{rp}^s, \quad f_p^s = c_{mp}^s \cdot b_{rp}^c - c_{mp}^c \cdot b_{rp}^s.$$

При получении (7) было использовано, что $A = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_P)$, $J_p = \begin{bmatrix} -\alpha_p & \beta_p \\ -\beta_p & -\alpha_p \end{bmatrix}$, а c_{mp}^c , c_{mp}^s , b_{rp}^c , b_{rp}^s — соответствующие этим блокам элементы матриц C и B . Кроме того, здесь принята унифицированная форма записи, объединяющая действительные и комплексно-сопряженные собственные значения. Действительным соответствуют параметры $\beta_p = 0$, $c_{mp}^c = b_{rp}^s = 0$ с вытекающим из этого удалением некоторых столбцов и строк у матриц A , B , C для жордановой реализации. Собственные значения и параметры f_p^c , f_p^s являются инвариантами системы, не зависящими от конкретной реализации. Для устойчивых систем функция $h(\theta)$ определена от 0 до ∞ . Описание (7) полностью эквивалентно исходному (1), т.е. существует преобразование, однозначно переводящее (1) в (7) и наоборот.

Аппроксимируем функцию $h(\theta)$ на интервале ее определения другой функцией $\bar{h}(\theta)$, имеющей аналогичное разложение по базовым функциям $\cos \beta_q \theta$, $\sin \beta_q \theta$, $e^{-\alpha_q \theta}$, $q = \overline{1, Q}$, но гораздо меньшим числом членов ряда $Q \ll P$. При этом речь идет не об усечении разложения $h(\theta)$, а о нахождении таких параметров α_q , β_q , $q = \overline{1, Q}$, которые могут быть отличными от α_p , β_p , $p = \overline{1, P}$. В пользу именно такой постановки задачи свидетельствуют результаты численного моделирования самых разнообразных линейных систем большой размерности. С помощью небольшого числа членов ряда $\bar{h}(\theta)$ их удается хорошо аппроксимировать. Объясняется это тем, что выход одной моды редуцированной модели может достаточно корректно представлять выход целого кластера исходной, собственные значения которой расположены в окрестности некоторого значения α_q , β_q редуцированной модели с учетом весовых коэффициентов f_p^c , f_p^s .

Вариационный подход

Параметры усеченной модели при заданной размерности Q определим из решения оптимизационной задачи

$$\|\bar{h} - h\| \rightarrow \min, \quad (8)$$

а размерность Q находится итеративно — решением последовательности задач (8). Начинать итерации следует с $Q = 1$, а во всех последующих Q каждый раз увеличивается на единицу. На каждой итерации проверяется выполнимость условия

$$\|\bar{h} - h\| \leq \varepsilon_M, \quad (9)$$

где ε_M при заданном ограничении на входное воздействие можно оценить так, чтобы гарантированно выполнялось (3) или (4). Итерации прекращаются, когда получим выполнение (9). Соответствующее значение Q принимается за размерность редуцированной модели.

Выбор нормы в (8), (9) зависит от конкретно рассматриваемой задачи. Для интегрируемых непрерывных функций наиболее распространены на практике нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$.

Подход, основанный на сингулярном разложении

Эффективность вариационного подхода падает с увеличением Q , поскольку приходится решать оптимизационные задачи большой размерности. В этом случае предлагается иной путь формулировки задачи, в которой вместо исходной непрерывной модели (1) используем ее дискретную аппроксимацию, которую запишем как

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k, \quad (10)$$

где k определяет дискретные моменты времени. Описание (10) можно рассматривать также как исходное в том случае, когда сама система по своей природе является дискретной.

Дискретной системе (10) при нулевых начальных условиях соответствует эквивалентное описание в форме, аналогичной (5), а именно, как соотношение вход-выход

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i} u_i, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где h_s — дискретная функция импульсной реакции. Переход от (10) к (11) осуществляется по формуле

$$h_k = c^T A^{k-1} b, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Здесь и в (11) c^T представляет одну из вектор-строк матрицы C , а b — один из вектор-столбцов матрицы B . Тогда y_k и u_i являются дискретными функциями, соответствующими определенным входу и выходу многосвязной системы. Из значений h_k на интервале $k \in \overline{1, 2K}$ формируем матрицу Ганкеля следующего вида:

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_K \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_K & h_{K+1} & \dots & h_{2K} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Значение K в (13) выбираем так, чтобы искомым порядком Q редуцированной модели удовлетворял условию $Q < K$. Например, можно положить $K = N$. Формула (12) позволяет провести факторизацию матрицы H и представить ее в виде произведения матриц наблюдаемости Γ_K и управляемости Ω_K , а именно,

$$H = \Gamma_K \cdot \Omega_K, \quad (14)$$

где

$$\Gamma_K = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{K-1} \end{bmatrix}, \quad \Omega_K = [b \ Ab \ \dots \ A^{K-1}b].$$

Осуществим сингулярное разложение (SVD — singular value decomposition) матрицы H

$$H = U \cdot \Sigma \cdot V^T, \quad (15)$$

где U и V — ортогональные матрицы, а Σ — диагональная матрица с сингулярными числами, расположенными в невозрастающем порядке на диагонали. Если исходная система (1) и ее дискретный аналог являются управляемыми и наблюдаемыми, то при любых размерностях K вплоть до $K = N$ матрицы Γ_K и Ω_K будут невырожденными, а все сингулярные числа матрицы Σ — строго положительными числами.

Представим матрицы U , Σ , V , входящие в разложение (15), в виде следующих блоков:

$$U = [U_1, U_2], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad V = [V_1, Q_2]. \quad (16)$$

Разбиение (16) произведем так, чтобы выполнялось условие

$$\sigma_k \leq \varepsilon_M \leq \sigma_{k+1}, \quad (17)$$

где σ_k — последнее сингулярное число матрицы Σ_1 , а σ_{k+1} — первое сингулярное число матрицы Σ_2 . Согласно (16) матрицу Ганкеля H можно записать как

$$H = U_1 \cdot \Sigma_1 \cdot V_1^T + U_2 \cdot \Sigma_2 \cdot V_2^T = H_1 + H_2. \quad (18)$$

Фактически (18) позволяет вместо исходной полноранговой матрицы H рассматривать матрицы неполного ранга, которые по 2-норме близки к исходной, т.е. некоторым «оптимальным» образом производить усечение H . Неполноранговая матрица H_1 при этом будет представлять, исходя из (18), усеченную модель вида (10) с размерностью k вектора состояния. Чтобы найти такую модель, необходимо из H_1 выделить матрицы наблюдаемости и управляемости. Сделать это можно, применяя известную из теории реализаций [4] процедуру факторизации матрицы H_1 и используя уже найденное ее сингулярное разложение. В результате для некоторой реализации в пространстве состояний расширенные матрицы наблюдаемости и управляемости будут записаны как

$$\bar{\Gamma}_k = U_1 \cdot \Sigma_1^{1/2}, \quad \bar{\Omega}_k = \Sigma_1^{1/2} \cdot V_1^T, \quad (19)$$

где $\bar{\Gamma}_k$ и $\bar{\Omega}_k$ — расширенные матрицы наблюдаемости и управляемости усеченной системы. Из выражений этих матриц через c^T , A , b , приведенных в (14), следует, что первая строка матрицы $\bar{\Gamma}_k$ будет \bar{c}^T , а первый столбец матрицы $\bar{\Omega}_k$ — \bar{b} . Матрица \bar{A} находится из переопределенной системы уравнений, которая получается из выражения $\bar{\Gamma}_k$ с учетом сдвиговой инвариантности

$$\bar{\Gamma}_{2:k} = \bar{\Gamma}_{1:k-1} \cdot \bar{A}, \quad (20)$$

где $\bar{\Gamma}_{2:k}$ получается вычеркиванием из $\bar{\Gamma}_k$ первой строки, а $\bar{\Gamma}_{1:k-1}$ — последней. Решение (20) следует находить методом наименьших квадратов (МНК) или с помощью общей задачи МНК [5]. Найденные таким образом \bar{c}^T , \bar{b} , \bar{A} соответствуют так называемой балансной реализации в том смысле, что благодаря ортогональности матриц U_1 и V выполняется соотношение

$$\bar{\Gamma}_k^T \cdot \bar{\Gamma}_k = \bar{\Omega}_k^T \cdot \bar{\Omega}_k = \Sigma_1.$$

Для полученной таким образом редуцированной модели следует проверить выполнимость (9) или, возможно, (4) с помощью численного моделирования. По результатам этих оценок либо устанавливается соответствие k искомой размерности Q , либо нет. В последнем случае в зависимости от результата увеличиваем k или уменьшаем его на единицу. Для нового разбиения на блоки повторяются описанные выше действия вплоть до выполнимости ограничений. Либо получаем решение задачи редукции, либо продолжаем поиск подходящей размерности Q .

В принципе описанный метод позволяет решать задачу редукции модели сразу для многосвязной системы без разбиения ее на множество односвязных задач. Однако это потребует оценивать качество аппроксимирующих моделей в матричных нормах, которые могут определяться по-разному, в том числе через векторные нормы, что должно следовать из конкретной постановки задачи. Поэтому с практической точки зрения подход, основанный на односвязном представлении, более предпочтителен.

Методы решения, моделирование и анализ результатов

Вариационные методы. Рассмотрим сначала решение задачи построения редуцированной модели вариационным методом. Он заключается в решении оптимизационной задачи (8), в которой

$$\bar{h}(\theta) = \sum_{q=1}^Q [f_q^c \cos \beta_q \theta + f_q^s \sin \beta_q \theta] e^{-\alpha_q \theta}.$$

В результате ее решения должны быть найдены Q и параметры $(f_q^c, f_q^s, \alpha_q, \beta_q)$ для $q = \overline{1, Q}$. Фактически это сводится к аппроксимации сложной импульсной функции в (7) более простой. Для удобства численной реализации методов редукции исходную функцию возьмем в дискретном виде с таким шагом квантования, чтобы все ее особенности были учтены. Шаг квантования Δ полагаем одинаковым на всем интервале определения, где она принимает существенное значение.

Исходя из этого запишем невязку аппроксимации в виде среднеквадратического отклонения как

$$J(\overrightarrow{f^c}, \overrightarrow{f^s}, \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{q=1}^Q [f_q^c \cos \beta_q \Delta k + f_q^s \sin \beta_q \Delta k] e^{-\alpha_q \Delta k} - h(\Delta k) \right)^2 \quad (21)$$

и в случае чебышевской аппроксимации как

$$J(\overrightarrow{f^c}, \overrightarrow{f^s}, \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) = \max_{k=1, N} \left| \sum_{q=1}^Q [f_q^c \cos \beta_q \Delta k + f_q^s \sin \beta_q \Delta k] e^{-\alpha_q \Delta k} - h(\Delta k) \right|. \quad (22)$$

На α и β в устойчивом случае накладывается условие их неотрицательности. Оценка качества аппроксимации в форме (21) задается непрерывной функцией. Однако она, как и в случае (22), является мультимодальной со множеством локальных минимумов и максимумов. Поэтому предприняты специальные меры нахождения на их фоне глобального минимума. С этой целью использовался алгоритм «basinhopping», который эффективно справляется с задачей минимизации мультимодальных функций и функционалов с большими барьерами между минимумами [2].

Критерий (22) не является дифференцируемым, поэтому при построении минимизирующей последовательности необходим метод, который эффективно работает без использования якобиана. В работе применялись методы дифференциальной эволюции, являющиеся разновидностью генетического алгоритма, а также метод перебора на сетке с локальным запуском градиентного спуска для уточнения решения.

Далее приводятся результаты построения редуцированных моделей. Для этого исходная система наблюдалась в 250 точках носителя функции. Шаг квантования выбирался как $\min\left(\frac{\pi}{5\beta_{\max}}, \frac{2}{5\alpha_{\max}}\right)$, где α_{\max} и β_{\max} — предельные значения α и β исходной модели.

Метод дифференциальной эволюции

Одним из методов эволюционного моделирования, предназначенного для решения задачи многомерной оптимизации, является метод дифференциальной эволюции. По классификации оптимизационных методов он относится к классу стохастических, так как использует в процессе поиска решения генератор случайных чисел. Кроме того, он использует и некоторые идеи генетических алгоритмов, но, в отличие от них, не требует работы с переменными в бинарном коде.

Метод дифференциальной эволюции — прямой метод оптимизации, так как в ходе его работы требуется вычислять только значения целевой функции (критерия оптимизации), а производные не вычисляются. В общем случае целевые функции, оптимизируемые с помощью данного метода, могут быть недифференцируемыми, нелинейными, многоэкстремальными и с очень большим количеством переменных. Метод прост в реализации и при его использовании легко реализовать распараллеливание вычислительного процесса [3].

Рассмотрим алгоритм метода дифференциальной эволюции согласно [3].

1. Инициализируется множество случайных векторов, называемых поколением, представляющих собой возможные решения задачи оптимизации. Число векторов в каждом поколении одно и то же и является одним из параметров настройки метода.

2. На каждой эпохе эволюционного процесса алгоритм генерирует новое поколение векторов, случайным образом комбинируя между собой векторы предыдущего поколения.

3. Над мутантным вектором выполняется операция кроссовера (скрещивания), в ходе которой некоторые координаты мутантного вектора замещаются соответствующими координатами из базового вектора. Каждая координата замещается с некоторой вероятностью p , которая также является параметром настройки метода дифференциальной эволюции. Полученный после скрещивания вектор называется пробным. Если он оказывается лучше базового (значение целевой функции улучшилось), то в новом поколении базовый вектор заменяется на пробный, в противном случае базовый вектор сохраняется в новом поколении.

4. На каждой эпохе эволюционного процесса или с заданной периодичностью определяется лучший вектор поколения в целях контроля скорости поиска оптимального решения. Условия окончания итераций процесса моделирования могут быть следующие:

- исчерпано заданное предельное количество эпох эволюции;
- исчерпано заданное предельное физическое расчетное время;
- значение критерия оптимизации лучшего вектора поколения не изменяется на протяжении заданного предельного количества эпох эволюции;
- достигнуто удовлетворительное значение критерия оптимальности.

На рис. 1 показано сравнение импульсной функции исходной системы 30 порядка (сплошная кривая) и ее аппроксимации (пунктирная) при $Q = 14$.

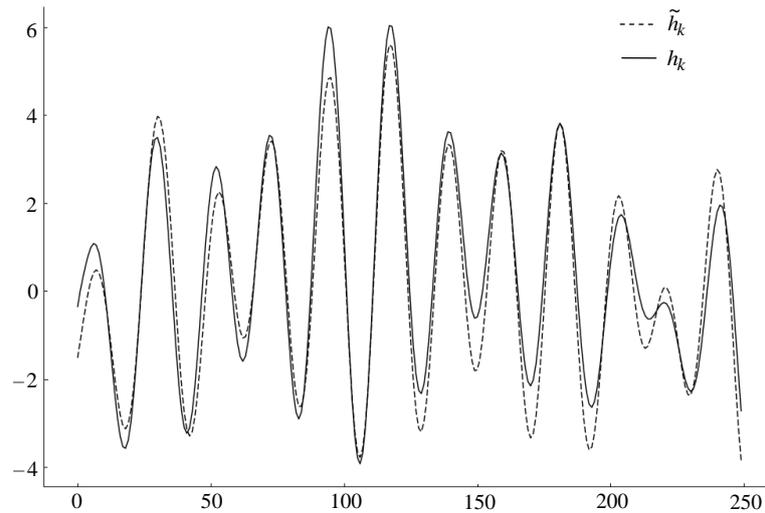


Рис. 1

На рис. 2 представлено расположение на комплексной плоскости (устойчивой области) собственных значений исходной системы (кружочки) и усеченной модели (крестики).

Графики на рис. 3 показывают сходимость итерации метода дифференциальной эволюции по нормам $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$.

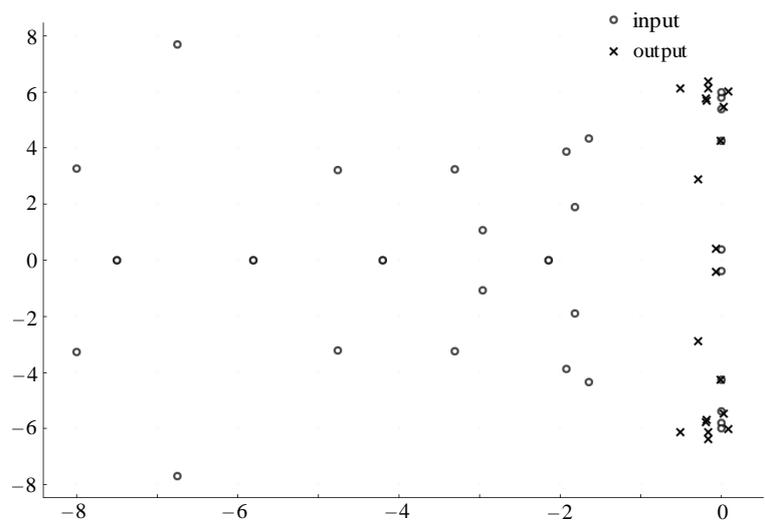


Рис. 2

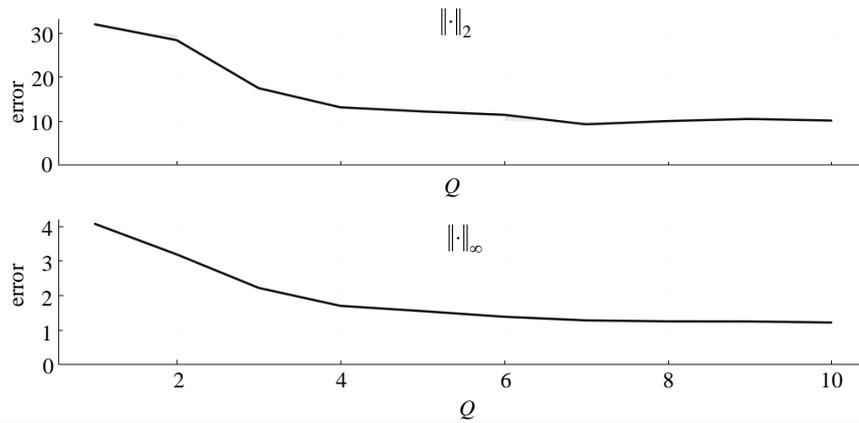


Рис. 3

Метод перебора

Тривиальным методом оптимизации, при котором перебираются возможные значения аргумента функционала по сетке с фиксированным шагом внутри некоторой ограниченной области, является метод перебора. Часто оптимизационные пакеты содержат такой метод с небольшим улучшением, а именно: вместо подстановки точки из сетки перебора в функцию и проверки улучшения значения, запускается один из методов нестохастического градиентного спуска, который «доводит» аргумент до локального минимума функционала вблизи текущего элемента сетки.

Результаты работы такого метода при тех же исходных данных, что и в предыдущем методе, представлены на рис. 4, 5.

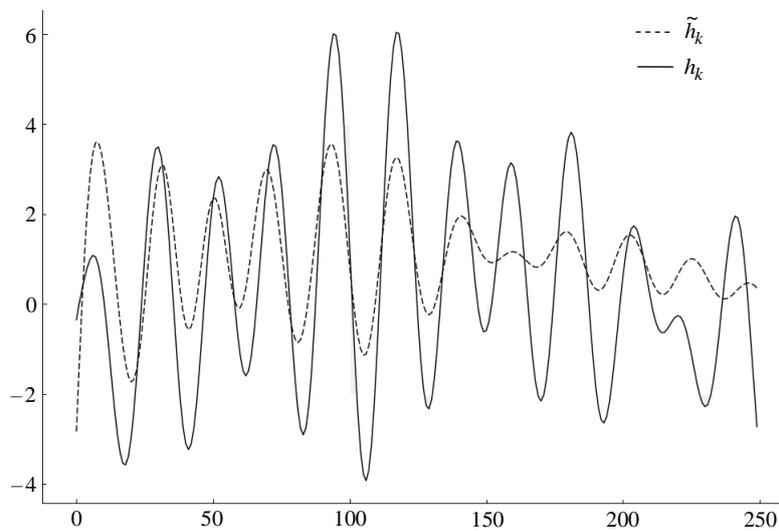


Рис. 4

На рис. 4 показана импульсная функция исходной, сложной, (сплошная) и усеченной (пунктирная) систем, а на рис. 5 представлено расположение собственных значений для исходной (кружочки) и усеченной (крестики) систем. Сходимость метода по нормам $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ иллюстрируется на рис. 6. Видно, что данный метод дает худшую аппроксимацию по сравнению с методом дифференциальной эволюции при тех же параметрах.

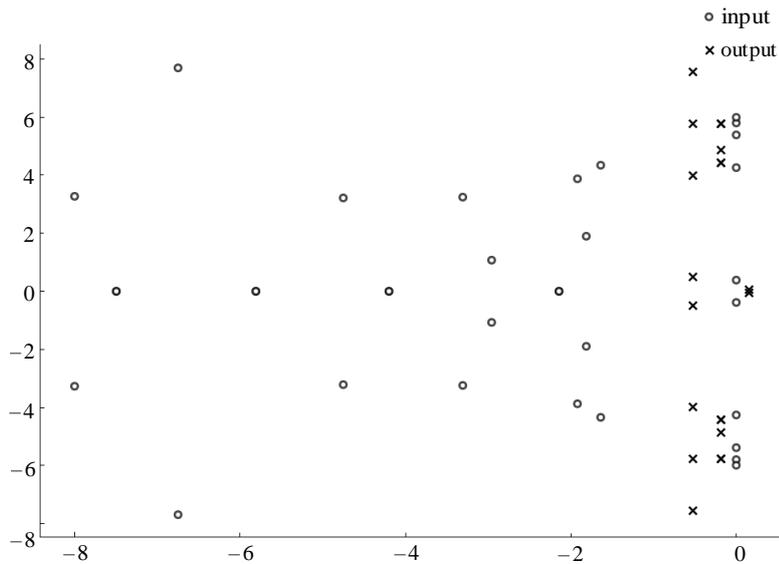


Рис. 5

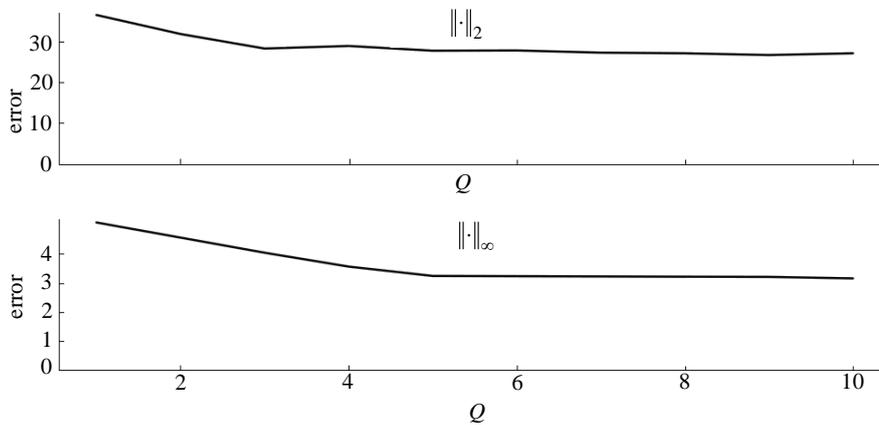


Рис. 6

Метод «basin-hopping»

Данный алгоритм по своей сути схож с алгоритмом дифференциальной эволюции, однако ключевой особенностью этого метода является использование локальной минимизации после мутирования вектора. При этом для гладкой минимизирующей функции можно использовать аналитическое вычисление якобиана, что улучшит качество локальной оптимизации и уменьшит затраты на машинное вычисление якобиана конечными разностями. Именно поэтому в качестве критерия соответствия использовалось среднеквадратическое отклонение.

На рис. 7 показана импульсная функция исходной, сложной, (сплошная) и усеченной (пунктирная) систем, а на рис. 8 дано расположение собственных значений для исходной (кружочки) и усеченной (крестики) систем. Сходимость метода по нормам $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ иллюстрируется рис. 9. Видно, что данный метод дает лучшую аппроксимацию по сравнению с методом дифференциальной эволюции при тех же параметрах.

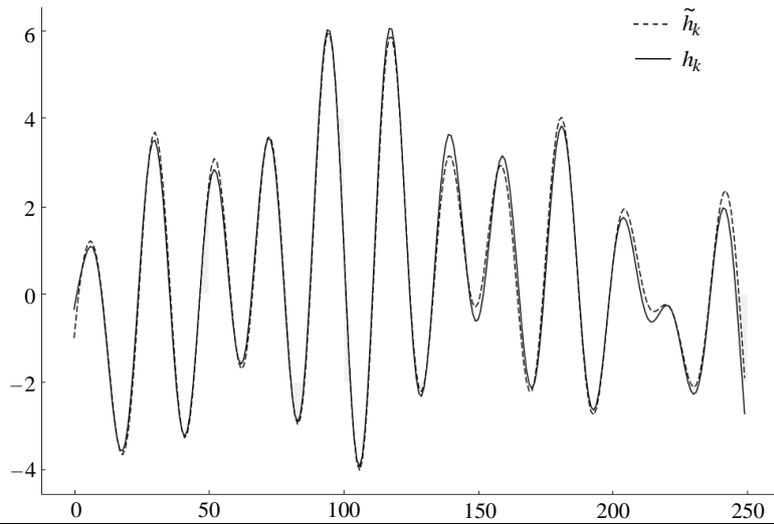


Рис. 7

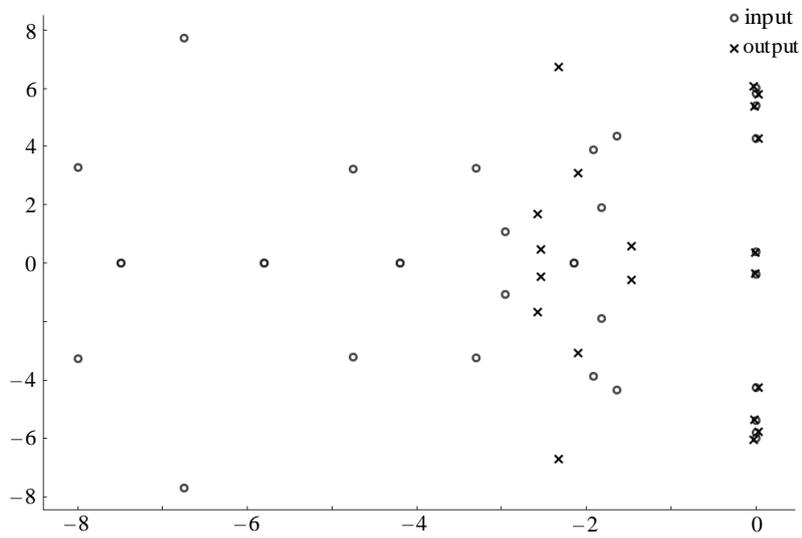


Рис. 8

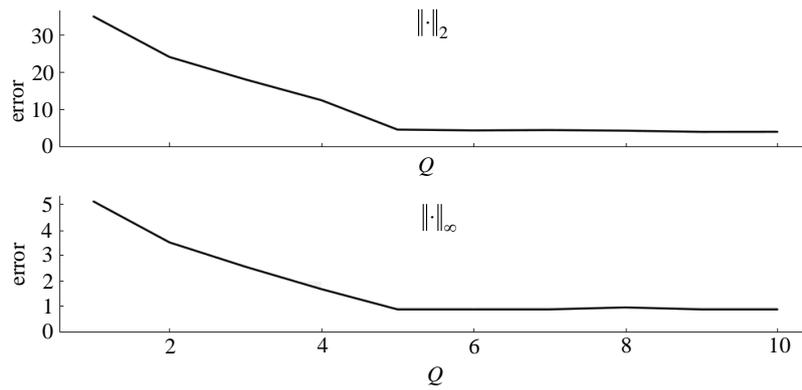


Рис. 9

Сравнительный анализ

По результатам моделирования данными методами проведен их сравнительный анализ. Методы сравнивались по следующим показателям:

- коэффициент детерминации $R^2 = 1 - \frac{\sum_i (h_i - \hat{h}_i)^2}{\sum_i (h_i - \bar{h})^2}$, где $\hat{h} = \frac{1}{n} \sum_i h_i$; h_i —

отклики исходной системы (1) в дискретные моменты времени; \hat{h}_i — отклики редуцированной системы (2) в тех же точках. Эталонное значение — 1;

- средняя абсолютная ошибка $MAE = \frac{1}{n} \sum_i |h_i - \hat{h}_i|$;
- средняя квадратичная ошибка $MSE = \frac{1}{n} \sum_i (h_i - \hat{h}_i)^2$;
- среднее время работы на тестирующей машине.

Каждый метод на вход принимал отклик исходной системы на первых 250 шагах дискретизации. Исходная система имела 30 корней, из которых 26 были комплексно-сопряженными и четыре действительными. Редукторы строили системы порядка 14.

Таблица 1

Алгоритм	R^2	MAE	MSE	Время работы, С
Дифференциальной эволюции	0,93494	0,45676	0,34086	18,0544
Перебора	0,43323	1,45995	2,96958	98,9153
Basin-hopping	0,98600	0,20591	0,07335	79,1869

Нетрудно заметить (табл. 1), что метод перебора, несмотря на комбинацию с локальной оптимизацией, оказался наименее эффективным. Методы дифференциальной эволюции и «basin-hopping» имеют приблизительно одинаковые результаты, причем метод дифференциальной эволюции оказался более быстродействующим, в то время как «basin-hopping» гарантировал лучшую сходимость.

Метод, основанный на сингулярном разложении. Рассмотрим решение задачи построения редуцированной модели методом, основанным на сингулярном разложении.

Для практической реализации подхода разработан алгоритм, который использует SVD, метод наименьших квадратов для решения системы (20), алгоритм нахождения собственных чисел и соответствующих собственных векторов и переход к жордановой реализации.

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 10 (аппроксимация отклика) и рис. 11 (расположение собственных значений). На рис. 12 представлена зависимость точности воспроизведения отклика редуцированной системы в зависимости от ее размерности.

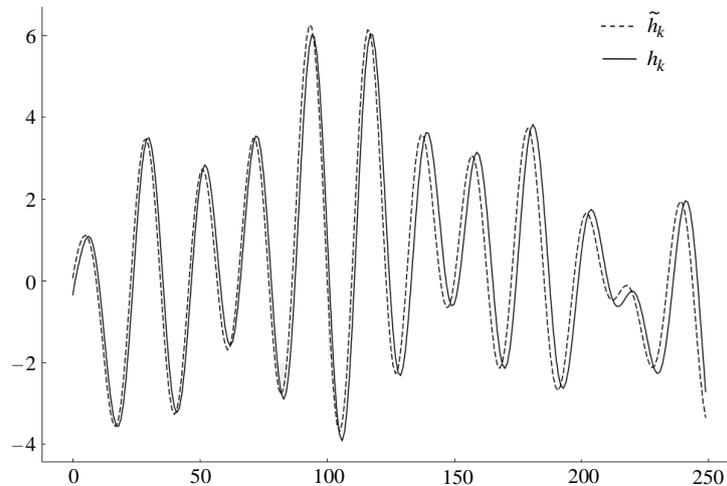


Рис. 10

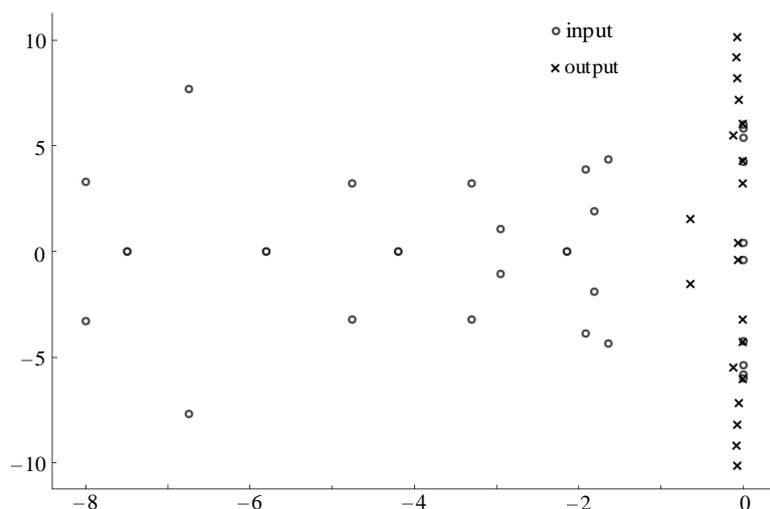


Рис. 11

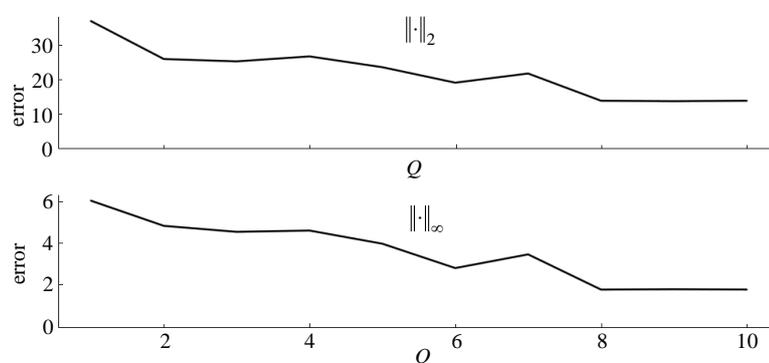


Рис. 12

Для оценки свойств метода в качестве критериев качества аппроксимации использовались те же показатели, что и в случае с вариационным методом. Отклик исходной системы рассматривался на первых 250 шагах дискретизации размерности 30, а редуцированная модель имела порядок 14.

Таблица 2

Алгоритм	R^2	MAE	MSE	Время работы, с
SVD	0,85201	0,71528	0,76917	0,0222

Несмотря на то что внешне отклик редуцированной системы практически идеально накладывается на отклик исходной, во второй половине симуляции появляется расхождение в виде смещения, что влечет за собой понижение соответствующих метрик.

С другой стороны, последний метод (табл. 1, 2) отработал гораздо быстрее алгоритмов, основанных на вариационном методе.

Заключение

Как следует из рис. 3, 6, 9 и 11, рассмотренные методы дают схожую оценку сходимости итераций. Заметное улучшение качества аппроксимации происходит до значений $Q = 4 \div 6$. Дальнейшее увеличение Q не имеет смысла, поскольку погрешность оценивания практически не уменьшается. Многочисленные эксперименты с разнообразным распределением собственных значений в устойчивой области комплексной плоскости показывают, что такое свойство сходимости со-

храняется практически в каждом из них. Более того, проиллюстрированные результаты соответствуют системам, у которых достаточно много чисто колебательных мод. Поэтому большинство собственных значений редуцированной модели сосредоточено вблизи мнимой оси, и только в случае более эффективного метода *basinhopping* соответственные значения представлены и в других частях комплексной области. Когда же собственные значения только действительные или комплексные, но с существенным коэффициентом затухания, вполне качественные модели получаются при меньших размерностях.

Теперь рассмотрим инварианты f_p^c и f_p^s . Опишем ситуацию, когда $f_p^c, f_p^s \in [-1, 1]$. Если их значения по модулю больше единицы, в силу линейности они сводятся к рассмотренному случаю. Это достигается с помощью нормирующего множителя $\max[f_p^c, f_p^s]$, на который надо поделить соотношение (7). При заданных собственных значениях наиболее неблагоприятная ситуация для редукции возникает, когда все f_p^c и f_p^s равны $+1$ или -1 , поскольку вклад каждой моды в выход определяется весовыми коэффициентами f_p^c и f_p^s . Именно этот неблагоприятный для редукции случай представлен полученными результатами моделирования.

Из результатов и анализа непосредственно следует упрощенный способ редукции порядка модели очень большой или бесконечной размерности. На комплексной плоскости задаются собственные значения исходной системы и анализируется их расположение. Если оно имеет вырожденную кластерную структуру, то с учетом весовых коэффициентов f_p^c и f_p^s вычисляется центр тяжести каждого кластера, который возьмем в качестве собственного значения редуцированной системы. Количество кластеров будет определять размерность усеченной модели, а центры тяжести — соответствующие ей собственные значения. На основе МНК или его различных модификаций решается задача о наилучшей аппроксимации исходной импульсной функции с помощью коэффициентов f_q^c и f_q^s при известных базисных функциях усеченной модели. При расположении собственных значений, близком к равномерному, кластеры, их количество и соответствующие им усредненные собственные значения определяются по весовым коэффициентам f_p^c и f_p^s . Возможны также и другие способы обоснованные результатами моделированного задания собственных значений редуцированной системы.

Одним из результатов проведенного анализа можно считать определение соотношения между ε и ε_M . Наиболее адекватно связь ε и ε_M выражается соотношением

$$\varepsilon_M \cong \chi \frac{\varepsilon}{U_0}, \quad (23)$$

где U_0 — максимально допустимое по величине входное воздействие, а χ — некоторая нормирующая константа. Именно из (23) должна определяться подходящая размерность редуцированной модели. Неотрицательная величина χ меньше единицы; ее значение зависит от распределения погрешности $h_i - \bar{h}_i$, $i \in \overline{1, n}$, на интервале наблюдения.

В.Ф. Губарев, В.В. Фатенко

ГЕОМЕТРИЧНИЙ ТА ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ РЕДУКЦІЇ ПОРЯДКУ МОДЕЛІ. ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Розглянуто та досліджено чисельні методи вирішення задачі редукції порядку моделі складної системи великої розмірності на основі геометричного та варіаційних підходів. Здійснено порівняльний аналіз методів та надано рекомендації щодо їх практичного застосування.

V.F. Gubarev, V.V. Fatenko

GEOMETRIC AND VARIATIONAL MODEL ORDER REDUCTION METHODS. COMPARATIVE ANALYSIS

Numerical methods for solving model order reduction problem of complex system having large-scale dimension on the base of geometric and variational approaches are considered and studied. Methods comparative analysis and recommendation according to practical application are delivered.

1. *Губарев В.Ф.* Проблема редукции порядка модели линейной стационарной системы большой размерности // Кибернетика и вычислительная техника. — 2016. — Вып. 186. — С. 30–45.
2. *Wales D.J., Doye J.P.K.* Global optimization by basin-hopping and the lowest energy structures of Lennard–Jones clusters containing up to 110 atoms // Journal of Physical Chemistry A. — 1997. — **101**, N 28. — P. 5111–5116.
3. *Портал искусственного интеллекта: теоретические основы метода дифференциальной эволюции.* — <http://neuronus.com/em/19-theory/33>
4. *Viberg M.* Subspace methods in system identification // Proc. 10th IFAC Symposium on System Identification. — Denmark : Copenhagen. — 1994. — **1**. — P. 1–12.
5. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

Получено 11.07.2017