Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2007

МАТЕМАТИКА

УДК 514.763.624

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Борисенко, Е. А. Олин**

Связь между объемом и площадью для шаров в многообразиях Финслера–Адамара

We give upper and lower estimates for the ratio between the volume of a metric ball and the area of its surface in Finsler–Hadamard manifolds with pinched S-curvature. We apply these estimates to get the limit at infinity for this ratio. The derived estimates are a generalization of the well-known result in the Riemannian geometry.

Финслерова геометрия является важным и естественным обобщением римановой геометрии, где метрика не должна быть квадратичной по направлению в касательных пространствах.

В [1, 2] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусь M^{n+1} — риманово $(n+1)$-мерное многообразие Адамара с защемленной секционной кривизной $-k_2^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2$, $k_1, k_2 > 0$. Пусть Ω — компактное λ-выпуклое множество в M^{n+1} (множество, границей которого является регулярная гиперповерхность с нормальными кривизнами не меньше λ) с $\lambda \leqslant k_2$. Тогда найдутся функции $\alpha(r)$ от радиуса вписанной гиперсферы и $\beta(R)$ от радиуса описанной гиперсферы такие, что $\alpha(r) \to 1/(nk_1)$ и $\beta(R) \to 1/(nk_2)$ при r и R, стремящихся к бесконечности, и*

$$\alpha(r)\frac{\lambda}{k_2} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(\partial\Omega)} \leqslant \beta(R).$$

Для семейства $\{\Omega(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ компактных λ-выпуклых множеств с $\lambda \leqslant k_2$, расширяющихся на все пространство, как следствие, получаем

$$\frac{\lambda}{nk_2^2} \leqslant \lim_{t\to\infty}\inf\frac{\mathrm{Vol}(\Omega(t))}{\mathrm{Vol}(\partial\Omega(t))} \leqslant \lim_{t\to\infty}\sup\frac{\mathrm{Vol}(\Omega(t))}{\mathrm{Vol}(\partial\Omega(t))} \leqslant \frac{1}{nk_1}.$$

Нашей целью являлось получить аналогичные результаты в финслеровой геометрии. В качестве семейства $\{\Omega(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ мы рассматривали геодезические шары. В силу сложности финслеровых метрик пришлось также ограничить одну из неримановых кривизн, S-кривизну.

Перед формулировкой основных результатов работы, дадим некоторые определения из финслеровой геометрии. Более подробно эти вопросы изложены в [3–5].

Основные понятия. Пусть M^n — n-мерное связное C^∞-многообразие. Обозначим через $TM^n = \bigsqcup\limits_{x\in M^n} T_xM^n$ касательное расслоение M^n. Тогда *финслеровой метрикой* на M называется функция $F\colon TM^n \to [0,\infty)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $F \in C^\infty(TM^n \setminus \{0\})$;

2) F положительно однородна первой степени, т. е. для любой пары $(x,y) \in TM^n$ и любого $\lambda > 0$, $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$;

3) для любой пары $(x,y) \in TM^n$ билинейная симметричная форма $g_y\colon T_xM^n \times T_xM^n \to \mathbb{R}$ положительно определена,

$$g_y(u,v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}[F^2(x,y+su+tv)]\Big|_{s=t=0}.$$

Пара (M^n,F) называется *финслеровым многообразием.*

Рассмотрим финслерову метрику F на многообразии M^n. Для гладкой кривой $c\colon [a,b] \to M^n$ длина определяется интегралом

$$L_F(c) = \int\limits_a^b F(c(t),\dot{c}(t))\,dt.$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — произвольний базис T_xM^n, $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ — дуальный ему базис T_x^*M. Рассмотрим подмножество $B_x^n = \{(y^i) \in \mathbb{R}^n\colon F(x,y^ie_i) < 1\} \subset T_xM^n$. Пусть $\underset{E}{\mathrm{Vol}}(A)$ — эвклидовый объем множества A. Тогда определим форму

$$dV_F = \sigma_F(x)\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n,$$

где

$$\sigma_F(x) := \frac{\mathrm{Vol}_E(\mathbb{B}^n)}{\mathrm{Vol}_E(B_x^n)}.$$

Здесь $\mathbb{B}^n$ — единичный шар $\mathbb{R}^n$.

Форма dV_F определяет меру $\underset{F}{\mathrm{Vol}} = \int dV_F$ и называется *формой объема Буземана–Хаусдорфа*. Для любой римановой метрики форма Буземана–Хаусдорфа превращается в стандартную форму объема. На гиперповерхностях в финслеровых многообразиях специальным образом вводится *внешне индуцированная* форма объема.

Как и в римановой геометрии, в финслеровой геометии вводятся геодезические как локально кратчайшие. Они обладают всеми необходимыми свойствами. Также обобщается секционная кривизна, здесь она называется *флаговой кривизной*. Тогда, по аналогии, *пространствами Финслера–Адамара* называются односвязные пространства неположительной флаговой кривизны. В таких пространствах выполняется обобщение теоремы Картана–Адамара [6]. Но, в отличие от риманова случая, флаговая кривизна не описывает до конца все свойства финслеровой метрики. Поэтому в рассмотрение вводятся так называемые неримановы кривизны. Для римановых метрик они обращаются в ноль.

Пусть (M^n,F) — финслерово пространство. Рассмотрим форму объема Буземана–Хаусдорфа dV_F с плотностью σ_F. Определим

$$S(x,y) = \frac{d}{dt}\left[\ln\frac{\sqrt{\det(g_{ij}(c(t),\dot{c}(t)))}}{\sigma_F(c(t))}\right]\Big|_{t=0},$$

где $c(t)$ — геодезическая с $\dot{c}(0) = y$. S называется S-кривизной.

Оценки для отношения объема шара к площади гиперсферы. Была получена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* (M^{n+1}, F) — $(n+1)$*-мерное многообразие Финслера–Адамара, удовлетворяющее условиям:*

1) флаговая кривизна K *удовлетворяет неравенству* $-k_2^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2$, $k_1, k_2 > 0$;

2) S*-кривизна удовлетворяет неравенству* $n\delta_1 \leqslant S \leqslant n\delta_2$ *и* $\delta_i < k_i$. *Пусть* $B_r^{n+1}(p)$ — *метрический шар в* M^{n+1} *с центром в точке* $p \in M^{n+1}$, $S_r^n(p) = \partial B_r^{n+1}(p)$ — *метрическая сфера.* $\mathrm{Vol} = \int dV_F$ *обозначает меру Буземана–Хаусдорфа,* $\mathrm{Area} = \int dA_F$ — *мера, внешне индуцированная на* $S_r^n(p)$. *Тогда найдутся функции* $f(r)$ *и* $F(r)$ *такие, что* $f(r) \to 1/(n(k_2-\delta_2))$ *и* $F(r) \to 1/(n(k_1-\delta_1))$ *при* r*, стремящемся к бесконечности, и*

$$f(r) \leqslant \frac{\mathrm{Vol}(B_r^{n+1}(p))}{\mathrm{Area}(S_r^n(p))} \leqslant F(r).$$

Здесь

$$f(r) = \frac{1}{(1-e^{-2k_2 r})^n}\left(\frac{1}{n(k_2-\delta_2)} - \frac{n}{n(k_2-2)-\delta_2}(e^{-2k_2 r} - e^{-nr(k_2-\delta_2)})\right),$$

$$F(r) = \frac{1}{n(k_1-\delta_1)}(1-e^{-nr(k_1-\delta_1)}).$$

Для семейства шаров $B_r^{n+1}(p)$*, как следствие, получаем*

$$\frac{1}{n(k_2-\delta_2)} \leqslant \lim_{r\to\infty}\inf \frac{\mathrm{Vol}(B_r^{n+1}(p))}{\mathrm{Area}(S_r^n(p))} \leqslant \lim_{r\to\infty}\sup \frac{\mathrm{Vol}(B_r^{n+1}(p))}{\mathrm{Area}(S_r^n(p))} \leqslant \frac{1}{n(k_1-\delta_1)}.$$

Если (M^{n+1}, F) — *пространство постоянной флаговой кривизны* $K = -k^2$ *и* S*-кривизны* $S = n\delta$, $\delta < k$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B_r^{n+1}(p))}{\mathrm{Area}(S_r^n(p))} = \frac{1}{n(k-\delta)}.$$

Доказательство теоремы основано на вычислении и оценке средней кривизны для гиперсфер.

Существенность ограничений на S-кривизну показывает пример с метрикой Функа.

Пример 1. Пусть U — открытое множество $\mathbb{R}^n$ с положительными нормальными кривизнами границы. Тогда *метрикой Функа* называется финслерова метрика следующего вида. Для точки $x \in U$ и направления $y \in T_xU \setminus \{0\} \simeq U \setminus \{0\}$ метрика Функа $F(x,y)$ должна удовлетворять условию

$$x + \frac{y}{F(x,y)} \in \partial U.$$

Для таких метрик $\delta > k$, и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B_r^{n+1}(p))}{\mathrm{Area}(S_r^n(p))} = \infty.$$

Оценки на энтропию многообразия. Также получены оценки на энтропию многообразия (скорость роста объема шаров), т. е. на величину

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{Vol}(B_t^{n+1}(p))}{t}.$$

В [7] было показано, что скорость роста объема шаров в $(n+1)$-мерных пространствах Гильберта равна n, т. е. в точности как в $\mathbb{H}^{n+1}$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* (M^{n+1}, F) — $(n+1)$-*мерное многообразие Финслера–Адамара удовлетворяющее условиям:*

1) флаговая кривизна K *удовлетворяет неравенству* $-k_2^2 \leqslant K \leqslant -k_1^2$, $k_1, k_2 > 0$*;*

2) S*-кривизна удовлетворяет неравенству* $n\delta_1 \leqslant S \leqslant n\delta_2$ *и* $\delta_i < k_i$*. Тогда*

$$n(k_1 - \delta_1) \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{Vol}(B_t^{n+1}(p))}{t} \leqslant n(k_2 - \delta_2).$$

Если (M^{n+1}, F) — пространство постоянной кривизны $K = -k^2$ и $S = n\delta$, $\delta < k$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\mathrm{Vol}(B_t^{n+1}(p))}{t} = n(k - \delta).$$

Также показывается существенность наложенных ограничений.

1. *Borisenko A. A., Gallego E., Reventos A.* Relation between area and volume for convex sets in Hadamard manifolds // Diff. geometry and its application. – 2001. – **14**. – P. 267–280.
2. *Борисенко А. А.* Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. – Москва: Экзамен, 2003. – 672 с.
3. *Shen Z.* Volume comparison and its application in Riemann–Finsler geometry // Adv. Math. – 1997. – **128**. – P. 306–328.
4. *Shen Z.* Lectures on Finsler geometry. – Singapore: World Scientific, 2001. – 306 p.
5. *Shen Z.* Landsberg curvature, S-curvature and Riemann curvature. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 53 p.
6. *Egloff D.* Uniform Finsler Hadamard manifolds // Ann. Inst. H. Poincare. – 1997. – **66**, No 3. – P. 323–357.
7. *Colbois B., Verovic P.* Hilbert geometries for strictly convex domains // Ann. Global Analysis and Geometry. – 2004. – **21**. – P. 29–41.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 10.11.2006