ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.01.003
УДК 519.6

В.Л. Макаров[1], **І.П. Гаврилюк**[2], **В.Б. Василик**[1]

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] Дуальна вища школа Гера–Айзенах, Німеччина
E-mail: makarov@imath.kiev.ua, iwan.gawriljuk@dhge.de, vasylyk@imath.kiev.ua

Експоненціально збіжний метод для розв'язування абстрактного інтегро-диференціального рівняння з дробовим інтегралом Харді—Тітчмарша

Представлено академіком НАН України В.Л. Макаровим

Розглянуто однорідне дробово-диференціальне рівняння з дробовим інтегралом Харді—Тітчмарша та необмеженим операторним коефіцієнтом в банаховому просторі. Встановлено умови для зображення розв'язку у вигляді інтеграла Данфорда—Коші та розроблено експоненціально збіжний наближений метод.

Ключові слова: *диференціальне рівняння з дробовими похідними, необмежений оператор, експоненціально збіжний метод.*

За останні роки значно зріс інтерес до диференціальних рівнянь із дробовими похідними. Пов'язано це з тим, що дробовий аналіз знайшов широке застосування в моделюванні багатьох природних і соціальних явищ, про що свідчить величезна кількість публікацій та наукових конференцій. Найчастіше такі задачі виникають під час моделювання явищ лінійної в'язкопружності. Ефективним є також використання дробових похідних у моделях аномальної дифузії, теорії керування, електродинаміки, нелінійної гідроакустики тощо.

Для аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь із дробовими похідними використовують методи інтегральних перетворень (Фур'є, Лапласа, Мелліна), метод функції Гріна та ін., однак лише в небагатьох (деяких лінійних) випадках їх розв'язки можна знайти в замкнутій формі. Тому актуальним питанням є розробка ефективних і надійних наближених методів розв'язування таких рівнянь.

У даній роботі розглядається диференціальне рівняння з дробовою похідною і необмеженим операторним коефіцієнтом

Цитування: Макаров В.Л., Гаврилюк І.П., Василик В.Б. Експоненціально збіжний метод для розв'язування абстрактного інтегро-диференціального рівняння з дробовим інтегралом Харді—Тітчмарша. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 1. С. 3—8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.01.003

$$
\begin{aligned}
&-{}_tD_\infty^{\alpha+1}u(t)+Au(t)=0,\ t\in(0,\infty),\ \alpha\in(-1,1),\\
&u(0)=u_0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де ${}_tD_\infty^{1+\alpha}$ — права похідна Рімана—Ліувілля

$$
{}_tD_\infty^{\nu}f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\nu)}\displaystyle\int_t^\infty(s-t)^{-\nu-1}f(s)ds, & \nu<0,\\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})}\left(-\dfrac{d}{dt}\right)^{[\nu]+1}\displaystyle\int_t^\infty\dfrac{f(s)}{(s-t)^{\{\nu\}}}ds, & \nu\geqslant 0,\end{cases}
$$

A — сильно позитивний оператор із всюди щільною областю визначення $D(A)$ у банаховому просторі X. Його спектр лежить у секторі $\Sigma(A)$

$$
\Sigma(A)=\left\{z=a_0+r\,\mathrm{e}^{i\phi}:r\in[0,\infty),\quad |\phi|\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right\},
$$

а на його границі Γ_Σ та зовні неї виконується оцінка

$$
\left\|(zI-A)^{-1}\right\|\leqslant\frac{M}{1+|z|}
$$

з деякою додатною сталою M. Зазначимо, що випадок задачі (1) з лівою похідною Рімана—Ліувілля на скінченному інтервалі розглянуто в [1].

Має місце

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1) *за виконання умов*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to\infty}[(s-t)^{\alpha+1}\,{}_sD_\infty^{\alpha}\,u(s)]=0,\\
&\lim_{s\to\infty}[(s-t)^{\alpha}\,{}_sD_\infty^{\alpha-1}\,u(s)]=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

зображується через операторну експоненту і має вигляд

$$
u(t)=\exp(-A^{1/(1+\alpha)}\,t)u(0). \tag{3}
$$

Доведення. Дійсно, застосовуючи оператор ${}_tD_\infty^{-(\alpha+1)}$ до рівняння (1) та враховуючи умову (2), отримаємо рівняння

$$
-u(t)+A\,{}_tD_\infty^{-(\alpha+1)}u(t)=0,\quad t\in(0,\infty),\quad \alpha\in(-1,1),
$$

яке збігається з інтегральним рівнянням Харді—Тітчмарша, якщо в ньому замінити α на $\alpha+1$ (див. [2]). Звідси випливає, що розв'язок задачі (1) можна записати у вигляді (3).

За допомогою інтеграла Данфорда—Коші, з деякою його модифікацією резольвенти (див. [3]), формулу (3) можна зобразити у такий спосіб:

$$
u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathrm{e}^{-t\,z^{1/(1+\alpha)}}\left[(zI-A)^{-1}-\frac{1}{z}I\right]u(0)dz, \tag{4}
$$

де Γ — гладка крива, що охоплює спектральний контур, і якщо обходити її проти годинникової стрілки, цей контур залишиться зліва.

За контур інтегрування у (4) візьмемо криву Γ_I

$$\Gamma_I = \{z(\xi) = a_I \cosh\xi - \mathrm{i} b_I \sinh\xi, \quad \xi \in (-\infty, \infty)\},$$

яка охоплює спектральну параболу з параметрами a_I, b_I, що будуть визначені нижче та залежать від параметра α, і коли $\alpha \to 0$, то виконуються граничні співвідношення

$$a_I \underset{\alpha\to 0}{\to} a_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}, \quad b_I \underset{\alpha\to 0}{\to} a_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}.$$

Тоді (4) набуває вигляду

$$u(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} F_A(t,\xi) u(0) d\xi, \tag{5}$$

$$F_A(t,\xi) = \mathrm{e}^{-z(\xi)^{1/(1+\alpha)} t} (a_I \sinh\xi - \mathrm{i} b_I \cosh\xi) \left[(z(\xi) I - A)^{-1} - \frac{1}{z(\xi)} I \right],$$

$$z(\xi) = a_I \cosh\xi - \mathrm{i} b_I \sinh\xi = \rho(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi(\xi)}.$$

Для існування інтеграла (5) необхідно, щоб дійсна частина показника експоненти була від'ємною, тобто

$$\operatorname{Re}\left(z(\xi)^{1/(1+\alpha)}\right) > 0 .$$

У результаті одержуємо $\cos\left(\frac{\psi(\xi)}{1+\alpha}\right) > 0$, тобто

$$\cos(\psi(\xi)) = \frac{a_I \cosh(\xi)}{\sqrt{a_I^2 \cosh^2\xi + b_I^2 \sinh^2\xi}} > \cos\left(\frac{1+\alpha}{2}\pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b_I}{a_I}\tanh\xi\right)^2}} \geqslant \cos\left(\frac{1+\alpha}{2}\pi\right), \quad \alpha \in (-1,1).$$

Звідси видно, що для випадку додатного α дійсна частина контуру інтегрування буде додатною, тому Γ_I можна вибрати таким, як у [3], тобто коли $\alpha = 0$. У випадку від'ємного α з останньої нерівності отримуємо умови

$$\frac{b_I}{a_I} \leqslant \tan\left(\frac{1+\alpha}{2}\pi\right), \quad \alpha \in (-1,0).$$

Для можливості застосування експоненціально збіжної квадратурної формули, треба підібрати параметри a_I, b_I таким чином, щоб підінтегральна функція $F_A(t,\xi)$ мала аналітичне продовження відносно ξ у смугу

$$D_{d_1} = \left\{ z = (\xi + i\nu) : \xi \in (-\infty, \infty), \nu \in \left[-\frac{d_1}{2}, \frac{d_1}{2} \right], d_1 > 0 \right\}.$$

Зробимо заміну ξ на $(\xi + i\nu)$ у функції $F_A(t,\xi)$. Тоді для того щоб існувало аналітичне продовження в смугу D_{d_1} та інтеграл залишався збіжним, необхідно, щоб

$$\mathrm{Re}\left(z(\xi + i\nu)^{1/(1+\alpha)} \right) > 0, \quad z(\xi + i\nu) = a(\nu)\cosh(\xi) - ib(\nu)\sinh(\xi),$$

$$a(\nu) = \sqrt{a_I^2 + b_I^2}\sin(\nu + \psi), \; b(\nu) = \sqrt{a_I^2 + b_I^2}\cos(\nu + \psi).$$

Дана умова буде виконуватись, якщо

$$|\nu + \psi| < \left| \frac{\alpha}{2}\pi \right|, \tag{6}$$

де $\cos(\psi) = \dfrac{b_I}{\sqrt{a_I{}^2 + b_I{}^2}}, \quad \sin(\psi) = \dfrac{a_I}{\sqrt{a_I{}^2 + b_I{}^2}}.$

Крім того, аналогічно до [3] необхідно застосувати вимогу, щоб гіпербола

$$\{z(\xi + i\nu) = [a(\nu)\cosh(\xi) - ib(\nu)\sinh(\xi)] : \xi \in (-\infty, \infty)\}$$

для $\nu \in \left(-\dfrac{d_1}{2}, \dfrac{d_1}{2} \right)$ залишалась у правій півплощині. Ця вимога буде виконуватись, якщо будуть вірними співвідношення

$$\begin{gathered} a(-d_1/2) = c_0, \; b(-d_1/2) = c_0 \tan(\theta(\nu + \psi, \xi)), \\ a(d_1/2) = a_0, \; b(d_1/2) = a_0 \tan(\varphi), \\ 0 < c_0 < a_0, \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{7}$$

Тут $\theta = \theta(\nu + \psi, \xi)$ визначається у такий спосіб:

$$z(\xi + i\nu)^{1/(1+\alpha)} = [a(\nu)\cosh(\xi) - i\, b(\nu)\sinh(\xi)]^{1/(1+\alpha)} =$$

$$= \left[\sqrt{a_I^2 + b_I^2}\, r(\nu, \xi) \right]^{1/(1+\alpha)} \exp\left(i \frac{\theta(\nu + \psi, \xi)}{1 + \alpha} \right),$$

$$r(\nu, \xi) = \sqrt{\sin^2(\nu + \psi)\cosh^2(\xi) + \cos^2(\nu + \psi)\sinh^2(\xi)},$$

$$\cos(\theta(\nu + \psi, \xi)) = \frac{\sin(\nu + \psi)\cosh(\xi)}{r(\nu, \xi)},$$

$$\sin(\theta(\nu + \psi, \xi)) = \frac{\cos(\nu + \psi)\sinh(\xi)}{r(\nu, \xi)}.$$

Розв'язуючи систему (7) , отримуємо

$$a_I = a_0 \frac{\cos((\theta+\varphi)/2)}{\cos(\varphi)},\ b_I = a_0 \frac{\sin((\theta+\varphi)/2)}{\cos(\varphi)},\ c_0 = a_0 \frac{\cos(\theta)}{\cos(\varphi)}, \tag{8}$$

$$d_1 = \theta - \varphi. \tag{9}$$

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 2. *За виконання умов* (6), (8) *функція* $F_A(t,\xi)$ *має аналітичне продовження в смугу* D_{d_1}, *ширина якої визначається з* (9).

Справедливою є теорема:

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2 *і* $u(0) \in D(A^{\beta})$, $\beta > 0$. *Тоді для функції* $F_A(t,\xi)$ *у просторі* $H^1(D_{d_1})$ *вірною є оцінка*

$$\left\| F_A(t,w)u(0) \right\|_{\mathrm{H}^1(D_{d_1})} \leqslant \frac{C_3(\alpha,\theta)}{\beta} \left\| A^{\beta} u(0) \right\|,$$

де C_3 *залежить від* (α,θ) *таким чином (згідно з лемою* 3.1 *із* [3]*), що справджується нерівність* $0 < \varphi < \theta < (\pi(1+\alpha))/2$.

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (1) за допомогою операторної експоненти (3) використаємо Sinc-квадратурну формулу (див. [3, 4]) до інтегрального зображення (5). Виберемо

$$\xi_k = kh,\ h = \sqrt{2\pi d_1/(N+1)},$$

та покладемо

$$u_N(t) = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{k=-N}^{N} F_A(t,\xi_k) u(0). \tag{10}$$

Справедливою є така теорема:

Теорема 4. *Нехай* A *— сильно позитивний оператор із всюди щільною областю визначення* $D(A)$ *у банаховому просторі* X *і спектром у секторі* $\Sigma(A)$. *Тоді за виконання умов теореми* 3 *для наближеного розв'язку* $u_N(t)$ *задачі* (1), *який знайдено за формулою* (10), *вірною є оцінка похибки*

$$\left\| u(t) - u_N(t) \right\| \leqslant c \exp\left\{ -\sqrt{\frac{\pi d_1}{2}(N+1)} \right\} \left\| A^{\beta} u_0 \right\|, \tag{11}$$

де c — невід'ємна стала.

Для ілюстрації розробленого наближеного методу розглянемо задачу (1) з $\alpha = 1/2$ і оператором A вигляду

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D(A) = \{v(x) \in \mathrm{W}_2^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\},$$

де $\mathrm{W}_2^1(0,1)$ — стандартний простір Соболєва. За початкову умову візьмемо

$$u_0 = \sin(\pi x).$$

Похибка обчислень

Кількість вузлів N	Похибка	Кількість вузлів N	Похибка	Кількість вузлів N	Похибка
4	0,00225	32	$3{,}72857 \cdot 10^{-7}$	256	$1{,}03171 \cdot 10^{-17}$
8	0,00017	64	$2{,}29011 \cdot 10^{-9}$	512	$2{,}94399 \cdot 10^{-23}$
16	$7{,}48280 \cdot 10^{-6}$	128	$1{,}28593 \cdot 10^{-12}$	1024	$1{,}25671 \cdot 10^{-30}$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що точним розв'язком є

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\pi^4 t}\sin(\pi x).$$

Похибку обчислення наближеного розв'язку задачі (1) за допомогою формули (10) для $t = 1/\pi^2$, $x = 1/2$ наведено в таблиці. З результатів обчислень видно, що похибка зменшується згідно з апріорною оцінкою (11).

Робота частково підтримана Національним фондом досліджень України, проєкт № 2020.02-0089.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. McLean W., Thomée V. Numerical solution via Laplace transforms of a fractional order evolution equation. *J. Integral Equations Applications*. 2010. **22**, № 1. P. 57—94. https://doi.org/10.1216/JIE-2010-22-1-57
2. Hardy G.H., Titchmarsh E.C. An integral equation. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc*. 1932. **28**, Iss. 2. P. 165—173. https://doi.org/10.1017.SO305004100010847
3. Gavrilyuk I., Makarov V., Vasylyk V. Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, 2011. VIII+180 p. (Frontiers in Mathematics).
4. Stenger F. Numerical methods based on sinc and analytic functions. New York: Springer, 1993. XV+565 p.

Надійшло до редакції 17.11.2020

REFERENCES

1. McLean, W. & Thomée, V. (2010). Numerical solution via Laplace transforms of a fractional order evolution equation. J. Integral Equations Applications, 22, No 1, pp. 57-94. https://doi.org/10.1216/JIE-2010-22-1-57
2. Hardy, G. H. & Titchmarsh, E. C. (1932). An integral equation. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 28, Iss. 2, pp. 165-173. https://doi.org/10.1017.SO305004100010847
3. Gavrilyuk, I., Makarov, V. & Vasylyk, V. (2011). Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations. Frontiers in Mathematics. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG.
4. Stenger, F. (1993). Numerical methods based on sinc and analytic functions. New York: Springer.

Received 17.11.2020

V.L. Makarov[1], *I.P. Gawriljuk*[2], *V.B. Vasylyk*[1],
[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] Duale Hochschule Gera-Eisenach, Germany
E-mail: makarov@imath.kiev.ua, iwan.gawriljuk@dhge.de, vasylyk@imath.kiev.ua

EXPONENTIALLY CONVERGENT METHOD FOR AN ABSTRACT INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL HARDY—TITCHMARSH INTEGRAL

A homogeneous fractional-differential equation with a fractional Hardy—Titchmarsh integral and an unbounded operator coefficient in a Banach space is considered. The conditions for the representation of the solution in the form of a Danford—Cauchy integral are established, and an exponentially convergent approximation method is developed.

Keywords: *differential equation with fractional derivatives, unbounded operator, exponentially convergent method.*