УДК 519.6

В.А. СТОЯН

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНО ПРЕОБРАЗУЮЩИХ СИСТЕМ. I. МУЛЬТИПЛИКАТИВНО НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Аннотация. Рассмотрены идеи и методы псевдообращения линейных алгебраических систем для задач построения наилучшего среднеквадратического приближения к решению нелинейных дискретно преобразующих систем. Описаны случаи, когда форма нелинейности определяется декартовым произведением или итерационным уточнением линейно преобразованного входа. Построены псевдорешения квадратически нелинейных систем, а также систем произвольного порядка нелинейности и исследованы их точность и однозначность.

Ключевые слова: псевдообращение, нелинейные дискретно преобразующие системы, нелинейные алгебраические системы, мультипликативно нелинейные системы.

ВВЕДЕНИЕ

Псевдоинверсный подход к среднеквадратическому обращению линейных алгебраических преобразований, предложенный Н.Ф. Кириченко [1, 2], обобщенный в [3] на линейные интегральные и функциональные системы, позволил успешно по среднеквадратическому критерию решить [4, 5] ряд прямых и обратных задач динамики неполно наблюдаемых линейных пространственно распределенных процессов и явлений. При применении идей из [4, 5] для исследования квазилинейных и нелинейных систем [6, 7] дальнейшее развитие получили и основополагающие результаты [1, 2] по псевдообращению линейных алгебраических преобразований. В настоящей работе с использованием идей и методов [7] строятся среднеквадратические приближения к решению некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем с векторными входами-выходами и исследуются их точность и однозначность. Рассматриваются случаи мультипликативных и итерационно уточняющихся квадратических нелинейностей без линейно преобразующей части. Обобщаются полученные результаты и для систем с произвольным порядком нелинейности. Представленные исследования рассматриваемых нелинейно преобразующих систем можно использовать [6] для решения задач математического моделирования состояния некоторых классов нелинейных пространственно распределенных систем и управления ими.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ПСЕВДООБРАЩЕНИЮ ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗУЮЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Не станем перечислять математические проблемы и задачи, решение которых строится с использованием аппарата классической линейной алгебры для решения линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b, \tag{1}$$

где A, b — заданные $(L \times M)$- и L-мерные матрица и вектор, а $x \in R^M$ необходимо определить. Количество таких проблем и задач велико и умение работать с системой (1) неоценимо. Будем исходить из того, что система (1) может иметь решение (одно или множество), а может и не иметь его. Последний случай в классической алгебре не рассматривается. Однако в работах Н.Ф. Кириченко [1, 2] для любых A и b строится множество

$$\Omega_x = \{x : || Ax - b||^2 \to \min_x\}, \tag{2}$$

исследуются вопросы его однозначности и точности вектора $x \in \Omega_x$ по отношению к (1). Тогда построенное согласно (2) множество

$$\Omega_x = \{x : x = A^+ b + v - A^+ Av \ \ \forall v \in R^M\} \tag{3}$$

при A^+ таком, что

$$A^+ b = \arg \min_{x \in \Omega_x} ||x||^2, \tag{4}$$

где A^+ — матрица псевдообратная к A, для которой среди прочих соотношений имеют место следующие:

$$A^+ = A^{\mathrm{T}} (AA^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}}.$$

Точность элементов множества Ω_x по отношению к (1) определяется величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{x \in \Omega_x} || Ax - b||^2 = b^{\mathrm{T}} b - b^{\mathrm{T}} AA^+ b, \tag{5}$$

а его однозначность $(v \equiv 0)$ — условием $\det A^{\mathrm{T}} A > 0$.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ МУЛЬТИКАТИВНО НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НЕЛИНЕЙНОСТИ

Изложенные результаты по псевдообращению системы (1) используем для решения проблемы построения [6] и исследования точности и однозначности множеств

$$\Omega_x = \{x : || Ax \otimes Bx - y||^2 \to \min_x\},$$

$$\Omega_x = \{x : || (A_1 x, \ldots, A_N x)x - y||^2 \to \min_x\}$$

псевдообращений систем

$$Ax \otimes Bx = y, \tag{6}$$

$$(A_1 x, \ldots, A_N x)x = y, \tag{7}$$

в которых A, B, A_i $(i = \overline{1, N})$ — прямоугольные матрицы размера $L \times M$, $x \in R^M$, $y \in R^L$, а знак $\otimes$ обозначает операцию декартового умножения.

Система (6), как и системы

$$Ax = y_1, \tag{8}$$

$$Bx = y_2, \tag{9}$$

где $y_1 \in R^L$, $y_2 \in R^L$ такие, что

$$y_1 \otimes y_2 = y, \tag{10}$$

может иметь решение (одно или множество) или не иметь его. В последнем случае построим

$$x = \arg \min_{\xi \in R^M} || A\xi \otimes B\xi - y||^2. \tag{11}$$

Будем исходить из того, что

$$x_1 = \arg \min_{x \in R^M} || Ax - y_1||^2 \in \Omega_1 =$$

$$= \{x_1 : x_1 = A^{\mathrm{T}} P_1^+ y_1 + v_1 - A^{\mathrm{T}} P_1^+ Av_1 \ \ \forall v_1 \in R^M\}, \tag{12}$$

$$x_2 = \arg\min_{x \in R^M} ||Bx - y_2||^2 \in \Omega_2 =$$

$$= \{x_2 : x_2 = B^{\mathrm{T}} P_2^+ y_2 + v_2 - B^{\mathrm{T}} P_2^+ B v_2 \quad \forall v_2 \in R^M\}, \tag{13}$$

$$\min_{x_1 \in \Omega_1} || Ax_1 - y_1||^2 = y_1^{\mathrm{T}} y_1 - y_1^{\mathrm{T}} P_1 P_1^+ y_1 = \varepsilon_1^2,$$

$$\min_{x_2 \in \Omega_2} ||Bx_2 - y_2||^2 = y_2^{\mathrm{T}} y_2 - y_2^{\mathrm{T}} P_2 P_2^+ y_2 = \varepsilon_2^2,$$

$$A^+ y_1 = \arg\min_{x_1 \in \Omega_1} ||x_1||^2, \; B^+ y_2 = \arg\min_{x_2 \in \Omega_2} ||x_2||^2,$$

где, как и ранее, знак + обозначает операцию псевдообращения матрицы, $P_1 = AA^{\mathrm{T}}$, $P_2 = BB^{\mathrm{T}}$, а $v_1 \equiv 0$, $v_2 \equiv 0$ при $\det A^{\mathrm{T}} A > 0$ и $\det B^{\mathrm{T}} B > 0$ соответственно. При этом

$$y_1 \otimes BA^+ y_1 = y, \tag{14}$$

$$y_2 \otimes AB^+ y_2 = y. \tag{15}$$

Проблемы решения уравнений (14), (15) рассматриваем, полагая

$$y = (c_1, c_2, \ldots, c_L)^{\mathrm{T}},$$

$$y_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L)^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

$$y_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_L)^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

и учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{M} [BA^+]_{ij} \alpha_i \alpha_j = c_i \quad (i = \overline{1, L}), \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{M} [AB^+]_{ij} \beta_i \beta_j = c_i \quad (i = \overline{1, L}), \tag{19}$$

где $[\,\cdot\,]_{ij}$ — ij-й элемент соответствующей матрицы.

Несложно видеть, что уравнения (18), (19) можно свести соответственно к виду

$$\bar{A}\alpha = y, \tag{20}$$

$$\bar{B}\beta = y, \tag{21}$$

где

$$\alpha = \operatorname{col}(((\alpha_i \alpha_j), \; j = \overline{1, L}), \; i = \overline{1, L}), \tag{22}$$

$$\beta = \operatorname{col}(((\beta_i \beta_j), \; j = \overline{1, L}), \; i = \overline{1, L}), \tag{23}$$

$$\bar{A} = \operatorname{col}((\underbrace{0, \ldots, 0}_{L(i-1)}, \operatorname{str}([BA^+]_{ij}, \; j = \overline{1, L}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{L^2 - iL}), \; i = \overline{1, L}), \tag{24}$$

$$\bar{B} = \operatorname{col}((\underbrace{0, \ldots, 0}_{L(i-1)}, \operatorname{str}([AB^+]_{ij}, \; j = \overline{1, L}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{L^2 - iL}), \; i = \overline{1, L}). \tag{25}$$

Отсюда согласно (2), (3) находим

$$\Omega_\alpha = \{\alpha : ||\bar{A}\alpha - y||^2 \to \min_\alpha\} = \{\alpha : \alpha = \bar{A}^+ y + v_\alpha - \bar{A}^+ \bar{A} v_\alpha\}, \tag{26}$$

$$\Omega_\beta = \{\beta : ||\bar{B}\beta - y||^2 \to \min_\beta\} = \{\beta : \beta = \bar{B}^+ y + v_\beta - \bar{B}^+ \bar{B} v_\beta\}. \tag{27}$$

При этом, как и в (4),

$$\min_{\alpha\in\Omega_\alpha} || y_1 \otimes BA^+ y_1 - y||^2 = \min_{\alpha\in\Omega_\alpha} ||\overline{A}\alpha - y||^2 = y^{\mathrm{T}} y - y^{\mathrm{T}} \overline{A}\,\overline{A}^+ y = \delta_1^2,$$

$$\min_{\beta\in\Omega_\beta} || y_2 \otimes AB^+ y_2 - y||^2 = \min_{\beta\in\Omega_\beta} ||\overline{B}\beta - y||^2 = y^{\mathrm{T}} y - y^{\mathrm{T}} \overline{B}\,\overline{B}^+ y = \delta_2^2.$$

Здесь v_α и v_β такие, что $\alpha^2_{(i-1)L+j} = \alpha_{(i-1)L+i}\,\alpha_{(i-1)L+j}$, $\beta^2_{(i-1)L+j} = \beta_{(i-1)L+i}\,\beta_{(i-1)L+j}$ при $j=\overline{1,M}$, $i=\overline{1,M}$.

При $\det \overline{A}^{\mathrm{T}} \overline{A} > 0$ и $\det \overline{B}^{\mathrm{T}} \overline{B} > 0$ множества Ω_α и Ω_β однозначные $(v_\alpha = v_\beta \equiv 0)$, а

$$\overline{A}^+ y = \arg\min_{\alpha\in\Omega_\alpha} ||\alpha||^2, \tag{28}$$

$$\overline{B}^+ y = \arg\min_{\beta\in\Omega_\beta} ||\beta||^2. \tag{29}$$

Найденные согласно (26)–(29) псевдорешения уравнений (20), (21) с учетом определения (22), (23) последних позволяют найти компоненты α_i $(i=\overline{1,L})$ и β_i $(i=\overline{1,L})$ векторов y_1 и y_2.

При этом

$$\alpha_i^2 = q_{Ai}^{\mathrm{T}} y + [v_\alpha]_{(i-1)L+i} - q_{Ai}^{\mathrm{T}} \overline{A} v_\alpha, \tag{30}$$

$$\beta_i^2 = q_{Bi}^{\mathrm{T}} y + [v_\beta]_{(i-1)L+i} - q_{Bi}^{\mathrm{T}} \overline{B} v_\beta, \tag{31}$$

где q_{Ai}^{T} и q_{Bi}^{T} — $(L(i-1)+i)$-строки матриц $\overline{A}^+$ и $\overline{B}^+$ соответственно. Использовав формулу Гревиля [6] обращения прямоугольных матриц, расширенных строкой, к определенным согласно (24), (25) матрицам $\overline{A}$ и $\overline{B}$, получим следующие соотношения для нахождения q_{Ai}^{T} и q_{Bi}^{T} для $i=\overline{1,L}$:

$$(\overline{A}_i \vdots \overline{a}_i)^+ = \begin{pmatrix} Q_A \\ q_{Ai}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \ (\overline{B}_i \vdots \overline{b}_i)^+ = \begin{pmatrix} Q_B \\ q_{Bi}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Здесь $Q_A \in R^{(L^2-1)\times L}$, $Q_B \in R^{(L^2-1)\times L}$, $\overline{A}_i$ и $\overline{B}_i$ — матрицы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ без $(L(i-1)+i)$-х столбцов, $\overline{a}_i$ и $\overline{b}_i$ — эти столбцы.

Исходя из общности решений (12), (13), (26), (27) уравнений (8), (9), (20), (21) с учетом точностей $\varepsilon_i^2, \delta_i^2$ этих решений, находим, что искомое согласно (6), (11)

$$x = \left\{ \begin{matrix} x_1, \text{ если } & \delta_1^2 + \varepsilon_1^2 \succ \delta_2^2 + \varepsilon_2^2 \\ x_1, \text{ если } & \delta_1^2 + \varepsilon_1^2 \prec \delta_2^2 + \varepsilon_2^2 \end{matrix} \right\}.$$

Векторы x_1 и x_2 при этом определяются соотношениями (12), (16), (30) и (13), (17), (31) соответственно.

Рассмотрим задачу построения и исследования точности и однозначности решения $x = \arg\min_\xi ||(A_1\xi, \ldots, A_M\xi)\xi - y||^2$ системы (7), которую для удобства запишем в виде (20), где

$$\alpha = \mathrm{col}(((x_i x_j), j=\overline{1,M}), i=\overline{1,M}), \tag{33}$$

$$\overline{A} = \mathrm{col}(\mathrm{str}((a_{(i)}^{(k)})^{\mathrm{T}}, k=\overline{1,M}), i=\overline{1,M}) \tag{34}$$

при $(x_1, \ldots, x_M) = x^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{str}(a_{(i)}^{(k)}, i=\overline{1,M}) = A_k^{\mathrm{T}}$ $(k=\overline{1,M})$.

Для уравнения (20), вектор α и матрица $\overline{A}$ которого определены согласно (33), (34), аналогично (26) находим

$$\Omega_{\alpha} = \{\alpha \in R^{M^2} : || \overline{A}\alpha - y ||^2 \to \min_{\alpha}\} = \overline{\alpha} + \overline{v} - \overline{A}^{\mathrm{T}} \overline{P}_1^{+} \overline{A}\,\overline{v} \tag{35}$$

$$\forall\, \overline{v} \in \{v : \alpha^2_{(i-1)M+j} = \alpha_{(i-1)M+i}, \alpha_{(j-1)M+j}\},$$

где

$$\hat{\alpha} = \arg\min_{\alpha \in \Omega_{\alpha}} || \overline{A}\alpha - y ||^2 = \overline{A}^{\mathrm{T}} \overline{P}_1^{+} y, \tag{36}$$

а $\overline{P}_1 = \overline{A}\,\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

С учетом определения (33) вектора α из (35) находим компоненты x_i $(i = \overline{1, M})$ вектора x, который является решением (или среднеквадратическим приближением к нему) уравнения (20), а следовательно, и уравнения (7). При этом

$$x \in \Omega_x = \{x = (x_i, i = \overline{1, M})^{\mathrm{T}} : x_i \in \Omega_i \ \ (i = \overline{1, M})\}, \tag{37}$$

где

$$\Omega_i = \{x_i : x_i^2 = \alpha_{(i-1)M+2} \ (i = \overline{1, M})\}. \tag{38}$$

Согласно (5) точность, с которой найденный с учетом (37), (38) вектор x будет удовлетворять (7), определяется величиной

$$\varepsilon^2 = \min_{x \in \Omega} || (A_1 x, A_2 x, \ldots, A_M x) x - y ||^2 = y^{\mathrm{T}} y - y^{\mathrm{T}} \overline{P}_1 \overline{P}_1^{+} y.$$

Множество Ω_x найденных таким образом векторов x будет однозначным $(v \equiv 0)$ при условии, что $\det(\overline{A}^{\mathrm{T}} \overline{A}) > 0$.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Полученные результаты обобщим для задач среднеквадратического обращения системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$A_1 x \otimes A_2 x \otimes \ldots \otimes A_N x = y, \tag{39}$$

$$((\ldots((A_{i_1 i_2 \ldots i_N} x, i_1 = \overline{1, M}) x, i_2 = \overline{1, M}) x, \ldots) x, i_N = \overline{1, M}) x = y. \tag{40}$$

По аналогии с (8)–(10) заключаем, что задача нахождения вектора

$$x = \arg\min_{\xi \in R^L} || A_1 \xi \otimes A_2 \xi \otimes \ldots \otimes A_N \xi - y ||^2 \tag{41}$$

при заданных $A_i \in R^{L \times M}$ и $y \in R^L$ эквивалентна среднеквадратическому обращению уравнения

$$y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_N = y, \tag{42}$$

где

$$y_i = A_i x \ \ (i = \overline{1, N}). \tag{43}$$

Решение x_i i-го уравнения системы (43) такое, что $x_i = \arg\min_{x \in R^M} || A_i x - y_i ||^2$, определим соотношением

$$x_i \in \Omega_i = \{x_i : x_i = P_i^{+} A_i^{\mathrm{T}} y_i + v_i - P_i^{+} P_i v_i \ \ \forall v_i \in R^M\},$$

где знаком +, как и раньше, обозначена операция псевдообращения, $P_i = A_i^{\mathrm{T}} A_i$, $v_i \equiv 0$ при $\det P_i > 0$, а $\min_{x_i \in \Omega_i} || A_i x_i - y_i ||^2 = y_i^{\mathrm{T}} y_i - y_i^{\mathrm{T}} A_i P_i^{+} A_i^{\mathrm{T}} y_i = \varepsilon_i^2$.

Для нахождения векторов $y_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_L^{(i)})^{\mathrm{T}}$ $(i = \overline{1, N})$ через компоненты вектора $y = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{L0})^{\mathrm{T}}$ будем исходить из того, что уравнение (42) может иметь одно из следующих N представлений:

$$[A_1 A_i^+ y_i]_j [A_2 A_i^+ y_i]_j \ldots [A_{i-1} A_i^+ y_i]_j \, y_j^{(i)} [A_{i+1} A_i^+ y_i]_j \ldots [A_N A_i^+ y_i]_j =$$

$$= y_{j_0} \quad (j = \overline{1, L}, \; i = \overline{1, N})$$

или, что эквивалентно,

$$\bar{A}_i \alpha_i = y \quad (i = \overline{1, N}). \tag{44}$$

Здесь $[\cdot]_j$ — j-й элемент вектора $[\cdot]$,

$$\bar{A}_i = \mathrm{col}\left(\underbrace{(0, \ldots, 0}_{L^{N-1}(j-1)}, A_j^{(i)}, \underbrace{0, \ldots, 0)}_{L^N - jL^{N-1}}, \; j = \overline{1, L} \right),$$

$$A_j^{(i)} = \mathrm{str}((\ldots(((\ldots([A_1 A_i^+]_{jk_1} [A_2 A_i^+]_{jk_2} \ldots [A_{i-1} A_i^+]_{jk_{i-1}} \times$$

$$\times [A_{i+1} A_i^+]_{jk_{i+1}} \ldots [A_N A_i^+]_{jk_N}, k_N = \overline{1, L}), \ldots)), \; k_{i-1} = \overline{1, L}), \ldots), \; k_1 = \overline{1, L}),$$

$$\alpha_i = \mathrm{col}((\ldots((y_{k_1}^{(i)} y_{k_2}^{(i)} \ldots y_{k_N}^{(i)}, \; k_N = \overline{1, L}), \; k_{N-1} = \overline{1, L}), \ldots), \; k_1 = \overline{1, L}).$$

Из (44) находим, что

$$\alpha_i = \arg \min_{\alpha \in R^{M^N}} \| \bar{A}_i \alpha - y \|^2 \in \Omega_i = \{ \alpha_i : \alpha_i = \bar{A}_i^+ y + v_i - \bar{A}_i^+ \bar{A}_i v_i \},$$

где v_i такие, что

$$[\alpha_i]^N_{(i_1 - 1)L^{N-1} + (i_2 - 1)L^{N-2} + \ldots + (i_{N-1} - 1)L + i_N} =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} [\alpha_i]_{(i_k - 1)L^{N-1} + \ldots + (i_k - 1)L + i_k} \quad (i = \overline{1, N}) \tag{45}$$

при $i_1 = \overline{1, L}, \ldots, i_N = \overline{1, L}$ (при $\det \bar{A}_i^{\mathrm{T}} \bar{A}_i > 0$ $v_i \equiv 0$). Отсюда с учетом (45) имеем

$$(y_j^{(i)})^N = q_{A_i j}^{\mathrm{T}} y + [v_i]_{j*} - q_{A_i j}^{\mathrm{T}} \bar{A}_i v_i \quad (j = \overline{1, L}),$$

где $q_{A_i j}^{\mathrm{T}}$ — строка матрицы $\bar{A}_i^+$ с номером $j* = ((j-1)(L^{N-1} + L^{N-2} + \ldots + 1) + 1)$. Эту строку по аналогии с (32) определим соотношением

$$(\bar{A}_{ij} \,\vdots\, \bar{y}_j)^+ = \begin{pmatrix} Q_{ij} \\ q_{A_i j}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

в котором $\bar{A}_{ij}$ — матрица $\bar{A}_i$ без $j*$-го столбца, а $\bar{y}_j$ — этот столбец. При этом $\delta_i^2 = \arg \min_{\alpha_i \in \Omega_i} \| \bar{A}_i \alpha_i - y \|^2 = y^{\mathrm{T}} y - y^{\mathrm{T}} \bar{A}_i \bar{P}_i^+ \bar{A}_i^{\mathrm{T}} y$ $(i = \overline{1, N})$, где $\bar{P}_i = \bar{A}_i^{\mathrm{T}} \bar{A}_i$.

Решением или определенным согласно (41) псевдорешением уравнения (39) будем считать $x = x_{i_0}$, где $i_0 = \arg \min_{i \in \{1, \ldots, N\}} (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2)$.

Аналогично рассмотренному ранее решим задачу построения решения (или среднеквадратического приближения к нему) нелинейной алгебраической системы (40), которую для удобства запишем в виде

$$A(x) x = y, \tag{46}$$

где

$$A(x)=((\dots((A_{i_1 i_2 \dots i_N}x,\ i_N=\overline{1,M})x,\ i_{N-1}=\overline{1,M})x,\dots)x,\ \ i_1=\overline{1,M}).$$

Как и ранее,

$$x=\arg\min_{\xi\in R^M}\|A(\xi)\xi-y\|^2 \tag{47}$$

построим среднеквадратически, обратив линейную алгебраическую систему (20), в которой теперь

$$\alpha=\operatorname{col}((\dots(((x_{i_1}\dots x_{i_{N-1}}x_{i_N}),\ i_N=\overline{1,M}),\ i_{N-1}=\overline{1,M}),\dots),\ i_1=\overline{1,M}), \tag{48}$$

$$\overline{A}=\operatorname{str}((\dots((A_{i_1\dots i_{N-1}i_N},\ i_N=\overline{1,M}),\ i_{N-1}=\overline{1,M}),\dots),\ i_1=\overline{1,M}). \tag{49}$$

Аналогично (35) для рассматриваемого случая запишем и множество Ω_α, в котором теперь вектор $\bar{v}\in R^{M^N}$ определим из условия

$$\alpha^N_{(i_1-1)M^{N-1}+\dots+(i_{N-1}-1)M+i_N}=\prod_{k=1}^N \alpha_{(i_k-1)M^{N-1}+\dots+(i_k-1)M+i_k}$$

при $i_1=\overline{1,M},\dots,i_N=\overline{1,M}$.

Из определенного соотношениями (35), (36), (48), (49) общего решения уравнения (20) находим и компоненты x_i $(i=\overline{1,L})$ вектора x, который согласно (47) будет удовлетворять (46):

$$x_i^N=\alpha_{(i-1)M^{N-1}+\dots+(i-1)M+i}\ \ (i=\overline{1,M}). \tag{50}$$

Среднеквадратическая точность $\varepsilon^2=\min\limits_{x\in\Omega_x}\|A(x)x-y\|^2$, с которой найденный с учетом (50) вектор $x=(x_i,\ i=1,M)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет уравнению (40), будет определяться величиной

$$\varepsilon^2=y^{\mathrm{T}}y-y^{\mathrm{T}}\overline{P}_1\overline{P}_1^{+}y,$$

в которой, как и ранее, $\overline{P_1}=\overline{A}\,\overline{A}^{\mathrm{T}}$. Однозначность этого вектора определяется условием $\det(\overline{A}^{\mathrm{T}}\overline{A})>0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дано решение сложной математической задачи построения псевдорешений некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем, не всегда имеющей точное и однозначное решение. Описаны случаи, когда нелинейности строятся декартовым умножением линейно преобразованных входных векторов или после двух- и N-кратного их итерационного уточнения. Построены аналитические выражения для входного вектора по среднеквадратическому критерию согласованного с математической моделью нелинейного преобразователя. Даны оценки точности полученных решений, сформулированы условия их однозначности, что позволяет записать (однозначно или в виде множества) решение, если оно существует, или среднеквадратическое приближение к нему для случая, когда конкретное нелинейное преобразование решения не имеет. Форма конечного результата несложная и приемлема для практической реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 2. С. 98–107.
2. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления. *Проблемы управления и информатики*. 1995. № 1. С. 114–127.

3. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 3. С. 90–104.

4. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ: Наук. думка, 2002. 361 с.

5. Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. Київ: Вид-во «Сталь», 2008. 316 с.

6. Стоян В.А. Псевдоінверсний підхід до розв'язання одного класу нелінійних алгебраїчних рівнянь. *Доп. НАН України*. 2008. № 3. С. 45–49.

7. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.

Надійшла до редакції 14.02.2018

В.А. Стоян

МЕТОДИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНО ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ. I. МУЛЬТИПЛІКАТИВНО НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

Анотація. Розглянуто ідеї і методи псевдообернення лінійних алгебраїчних систем для задач побудови найкращого середньоквадратичного наближення до розв'язків нелінійних дискретно перетворювальних систем. Наведено випадки, коли форму нелінійності визначають декартовим добутком або ітераційним уточненням лінійно перетвореного входу. Побудовано псевдорозв'язки квадратично нелінійних систем і систем довільного порядку нелінійності та досліджено їхню точність і однозначність.

Ключові слова: псевдообернення, нелінійні дискретно перетворювальні системи, нелінійні алгебраїчні системи, мультиплікативно нелінійні системи.

V.A. Stoyan

METHODS OF LINEAR ALGEBRA IN PROBLEMS OF THE ANALYSIS OF CERTAIN CLASSES OF NONLINEAR DISCRETELY TRANSFORMATIVE SYSTEMS. I. MULTIPLICATIVELY NON-LINEAR SYSTEMS

Abstract. The ideas and methods of pseudo-inversion of linear algebraic systems are propagated to problems of constructing the best root-mean square approximation to solutions of nonlinear discretely transformative systems. The cases are considered where the form of nonlinearity is defined by a Cartesian product or iterative specification of linearly transformed input. Pseudo-solutions of quadratic nonlinear systems and systems of arbitrary order of nonlinearity are constructed and analyzed for accuracy and uniqueness.

Keywords: pseudo-inversion, nonlinear discretely transformative systems, nonlinear algebraic systems, multiplicatively nonlinear systems.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: v_a_stoyan@ukr.net.