Ю. И. Жихарева,
аспирант, г. Киев

МОДЕЛЬ МЕЖВРЕМЕННОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЫНКА АКЦИЙ

Цель данной статьи заключается в изучении принципиальной возможности использования модели межвременного равновесия для описания переходных процессов в экономике, а также оценивания параметров линейной регрессии при нечеткой априорной информации и использования теории расплывчатых множеств для оценки крупномасштабных инвестиционных проектов. Рассматривается модель экономики, в которой действуют два агента: фирма-производитель и собственник-потребитель, которые агрегированно представляют производственную и непроизводственную сферы экономики. Предлагается полное решение задачи при любых начальных условиях.

Как известно, основой большинства подходов к описанию рыночной экономики служит понятие *экономического равновесия.* Среди различных описаний динамического равновесия [1] полной согласованностью выделяется модель *межвременного равновесия.* Эта модель предполагает, что экономические агенты в процессе взаимодействия согласуют не только текущие, но и все будущие значения информационных переменных — цен, курсов, процентов и т. п.

Детерминированная модель межвременного равновесия строится по следующей схеме:

• Выделяется некоторый набор экономических агентов, каждый из которых определяет текущие и будущие спрос и предложение на материальные блага и финансовые инструменты так, чтобы максимизировать свой функционал полезности при присущих агенту технологических и институциональных ограничениях и при известных текущих и будущих значениях информационных переменных, заданных как произвольные функции времени.

• Фактическое производство и распределение благ, а также фактические значения информационных переменных определяются из условия равенства спроса и предложения в текущий и все будущие моменты времени.

Таким образом, для исследования модели межвременного равновесия требуется решить несколько задач оптимального управления с неопределенными переменными параметрами (информационными переменными), а потом найти эти информационные переменные из условий равновесия для решений указанных оптимизационных задач.

Подобного рода модели систематически применялись для изучения различных макроэкономических явлений, например [2; 3]. Однако поиск межвременного равновесия — трудная, с математической точки зрения, задача, и примеров исследованных до конца моделей межвременного равновесия известно немного, например в [2; 3] рассматриваются только стационарные равновесия. Поскольку мы планируем в дальнейшем использовать подобные модели для описания переходных процессов, здесь находим полное решение задачи, пусть и на упрощенной модели.

Итак, рассматривается замкнутая рыночная экономика без участия государства, в которой производится *единственный однородный продукт,* который в равной мере может быть использован на потребление и накопление. Единственным фактором производства служат капитальные затраты того же продукта. Для простоты производственная функция считается линейной, а капитальные затраты — обратимыми. Функционирование экономики описывается в непрерывном времени, причем временное равновесие рассматривается на *конечном,* но достаточно большом периоде времени [0,T*].

В описанных предположениях основной макроэкономический баланс приобретает вид

$$Y(t) = C(t) + b\frac{\partial}{\partial t}Y(t), \tag{1.1}$$

где *Y(t)* — чистый выпуск (реальный), *C(t)* — реальное потребление, $b\frac{\partial}{\partial t}Y(t)$ — капитальные затраты, пропорциональные приросту выпуска $\frac{\partial}{\partial t}Y(t)$ — с постоянным коэффициентом *приростной фондоёмкости — b* .

Обратимость капиталовложений означает, что мы допускаем отрицательные значения $\frac{\partial}{\partial t}Y(t)$, т.е. считаем, что производственные мощности, созданные за счет капитальных затрат, могут быть мгновенно и без потерь превращены обратно в продукт, из которого были созданы.

Объем производства потребления и накопления определяется двумя агентами: *потребителем-собственником* и *фирмой-производителем.* Агенты взаимодействуют на двух рынках: *товарном рынке,* на котором произведенный фирмой продукт делится на потребление и накопление, и *фондовом рынке,* где определяются сбережения и инвестиции, а также доходы потребителя.

Производство и капитальные затраты осуществляются *фирмой.* Фирма располагает неотрицательным запасом денег *W{t)* и имеет обязательства перед собственниками – акции в объеме *A{t),* по которым она выплачивает дивиденды в сумме *Z(t)* в единицу времени. Средства на инвестиции и выплату дивидендов приносит продажа произведенного продукта *Y(t)* по цене *p(t)* на товарном рынке, а также продажа выпущенных акций $\frac{\partial}{\partial t}A(t)$ на фондовом рынке по курсу *s(t).* В результате запас денег фирмы изменяется со временем, в соответствии с уравнением финансового баланса (cash flow):

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t) = p(t)Y(t) - Z(t) + s(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}A(t)\right) - p(t)b\left(\frac{\partial}{\partial t}Y(t)\right). \quad (1.2)$$

Собственник-потребитель, который в модели представляет всю совокупность домашних хозяйств в экономике, располагает неотрицательными запасами денег *M(t)* и акций *S(t).* Каждая акция приносит в единицу времени доход *r(t).* На полученные доходы собственник приобретает на товарном рынке потребительский продукт *C(t)* по цене *p(t),* а на фондовом рынке — новые акции $\frac{\partial}{\partial t}S(t)$ по курсу *s(t).*

Поэтому изменение запаса денег у собственника описывается уравнением финансового баланса

$$\frac{\partial}{\partial t}M(t) = r(t)S(t) - s(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}S(t)\right) - p(t)C(t). \quad (1.3)$$

Поскольку, кроме собственника, других держателей акций в рассматриваемой экономике нет, собственник должен скупить все выпущенные фирмой акции, т.е.

$$S(t) = A(t), \quad (1.4)$$

а все выплаченные фирмой дивиденды должны быть распределены по этим акциям

$$r(t)S(t) = Z(t). \quad (1.5)$$

Легко видеть, что из финансовых балансов (1.2), (1.3), в силу (1.1), (1.4), (1.5) следует тождество (закон Вальраса):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}M(t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}W(t)\right) = 0, \quad (1.6)$$

которое означает, что суммарный запас денег у агентов не меняется.

Запасы денег агентам в модели, по существу, не нужны (деньги вполне ликвидны). Поэтому естественно считать начальные запасы А/(0) и *W(0)* равными 0. Тогда из тождества (1.6) и требования неотрицательности *M(t)* и *W{t)* получится, что

$$M(t) = 0,\ W(t) = 0 \text{ при всех } t \in [0,T]. \quad (1.7)$$

Тем не менее при анализе задач межвременного равновесия, в которых агенты планируют свои запасы независимо друг от друга, удобнее использовать балансы в общей форме (1.2), (1.3), а соотношение (1.7) рассматривать как одно из условий согласования планов агентов.

Предполагается, что фирма действует в интересах акционеров, стремясь максимизировать полезность их *будущих реальных доходов R(t).*

$$\int_0^T V(R(t))e^{-\Delta t}dt \to \max \quad (1.8)$$

где Δ — предпочтение времени, а

$$R(t) = \frac{Z(t)}{p(t)}. \quad (1.9)$$

В качестве функции полезности $V(.)$ рассматриваем функцию с постоянным относительным отвращением к риску (CRRA):

$$V(R) = \frac{R^{1-B}}{1-B}, \text{ при } B \neq 1; V(R) = \ln R \text{ при } B = 1; \quad (1.10)$$

где B > 0 — относительное отвращением к риску по Эрроу — Пратту.

Функционал ожидаемой полезности (1.8) обычно вводится аксиоматически, как выражение субъективных интересов агента [4]. Однако фирма все же не вполне самостоятельный агент. Цель в той или иной степени ставят ей собственники. Поэтому одним из вопросов, который исследуется в данной работе, является вопрос о том, как зависит результирующее равновесие от параметров функционала фирмы Δ и B.

Величины

$A(t) \geq 0, W(t) \geq 0,\ Y(t) \geq 0,\ Z(t) \geq 0$

при заданных начальных значениях

$W(0) = 0,\ A(0) \geq 0,\ Y(0) \geq 0,$

фирма может планировать по своему усмотрению в рамках баланса (1.2) на интервале [0, T]. В частности, мы не накладываем ограничений на целевое использование средств от продажи акций и, таким образом, не исключаем возможности организации «пирамиды»: выплаты дивидендов по старым акциям за счет продажи новых. Кроме того, допускается скупка фирмой собственных акций $\left(\frac{\partial}{\partial t}A(t) < 0\right)$.

Величины цены *p(t)* и курса акций *s(t)* представляют собой прогнозы и при решении задачи фирмы считаются *заданными.*

Что происходит после момента *T,* нас не интересует, поскольку мы в конечном итоге будем рассматривать равновесие при $T \to \infty$. Однако будем требовать, чтобы фазовые переменные в конце процесса удовлетворяли линейному терминальному ограничению:

$$W(T) + a_A A(T) + a_Y Y(T) \geq 0 \qquad (1.12)$$

Как мы увидим ниже, коэффициенты a_A , a_Y в этом ограничении однозначно определяются требованием разрешимости задачи, а само это ограничение приобретает смысл неотрицательности собственных средств фирмы. Если же совсем не накладывать терминальных ограничений, задача фирмы не будет иметь решений с «хорошими» двойственными переменными.

Итак, задача фирмы — это задача оптимального управления (1.8) при ограничениях (1.9), (1.2), (1.11), (1.12). Ее решение задает:

• предложение продукта $Y(t)$ и спрос на фондообразующий продукт $b\dfrac{\partial}{\partial t}Y(t)$ на товарном рынке;

• предложение акций *A(t)* на фондовом рынке;

• план выплаты дивидендов *Z(t)*;

• спрос фирмы на деньги *W(t)*

в каждый момент времени $t \in [0,T]$ в зависимости от прогноза цены *p{t)* и курса акций *s(t)* на весь период $[0,T]$.

Предполагается, что собственник ведет себя рационально. Он стремится максимизировать полезность своего *будущего реального потребления C(t).*

$$\int_0^T U(C(t))e^{-\partial t}dt \to \max \qquad (1.13)$$

$$U(R) = \frac{C^{1-\beta}}{1-\beta}, \text{ при } \beta \neq 1; \;\; U(C) = \ln C \text{ при } \beta = 1,$$

где ∂ — предпочтение времени, а β — отвращение к риску собственника. Собственник решает задачу (1.13) за счет выбора величин

$$M(t) \geq 0,\, S(t) \geq 0,\; C(t) \geq 0, \qquad (1.14)$$

в рамках баланса (1.3) при заданных начальных условиях

$$M(0) = 0,\, S(0) \geq 0 \qquad (1.15)$$

и заданных прогнозах цены *p{t),* доходности *r(t)* и курса акций *s(t).*

Как и в задачу фирмы, в задачу собственника мы включаем линейное терминальное условие общего вида:

$$M(T) + a_S S(T) \geq 0. \qquad (1.16)$$

Задача собственника — это, по сути, стандартная задача выбора оптимального разделения дохода на потребление и накопление [5, 4]. Именно это — задача оптимального управления (1.13) при ограничениях (1.14), (1.3), (1.16). Ее решение задает:

• спрос на потребительский продукт *C(t)* на товарном рынке;

• спрос на акции *S(t)* на фондовом рынке;

• спрос собственника на деньги *M(t)*

в каждый момент времени $t \in [0,T]$, в зависимости от прогноза цены *p(t),* доходности *r(t)* и курса акций *s(t)* на весь период $[0,T]$.

Главное предположение модели межвременного равновесия состоит в том, что прогнозы и планы агентов оправдываются. Это означает, во-первых, что цену и курс агенты прогнозируют *одинаково.* Это предположение мы уже использовали выше неявно, когда одинаково обозначали цену и курс в задачах фирмы и собственника. Во-вторых, оправдание планов означает, что планы агентов удовлетворяют соотношениям балансов (1.1), (1.4), (1.5).

Содержательно эти балансы описывают результаты взаимодействия агентов в рамках определенных институтов.

Баланс (1.1) означает выравнивание предложения продукта фирмой *Y(t)* и спроса на потребительский продукт со стороны собственника *C(t)*, а также спроса на фондообразующий продукт $b\left(\dfrac{\partial}{\partial t}Y(t)\right)$ со стороны фирмы в процессе обмена продукта на деньги на товарном рынке. Аналогично баланс (1.4) описывает результат выравнивания спроса собственника на акции *S(t)* и предложения акций фирмой *A(t)* в процессе обмена акций на деньги на фондовом рынке.

Особо следует остановиться на балансе (1.5). Он тоже описывает результат взаимодействия агентов, но уже не обмена, а *передачи доходов по праву собственности.* Если бы собственник у фирмы был фактически один, то естественнее было бы предполагать, что он знает не доходность *r(t)*, а сам поток дивидендов *Z(t).* Для таких условий информированности собственника тоже можно построить модель равновесия, но результат будет иной, нежели тот, что излагается ниже. Таким образом, несмотря на предельную агрегированность рассматриваемой модели, записывая соотношение (1.5), мы все же учитываем фактическую множественность собственников и возможность торговать правами собственности.

С формальной точки зрения, решение задачи равновесия состоит в определении траекторий *информационных переменных:* цены *p(t),* доходности *r(t)* и курса акций *s(t),* таких, что

• задачи оптимального управления фирмы и собственника разрешимы (возможно неоднозначно);

• из множества оптимальных траекторий *A(t), W{t), Y(t), Z{t), M(t), S(t), C(t)* этих задач можно выбрать траектории, удовлетворяющие условиям равновесия (1.1), (1.4), (1.5).

Формально балансы (1.1), (1.4), (1.5) дают три уравнения на три неизвестных *p(t)*, *r(t), s(t)*, но, как обычно бывает в задачах равновесия, эти уравнения зависимы (см. тождество (1.6)), поэтому информационные переменные в равновесии определятся неоднозначно. Насколько именно – рассмотрим позднее, а сейчас обратимся к требованию разрешимости задач агентов.

Несмотря на внешнюю простоту формулировок, задачи агентов относятся к классу весьма сложных задач оптимального управления. Если исключить величину *Z(t)* с помощью равенства (1.9), то обе задачи можно записать в единой форме:

$$\int_0^T f(C(t))e^{-\chi t}dt \to \max \text{ по } Q(t), P(t), \mathrm{X}(t), \mathrm{Y}(t) \quad (1.17)$$

при заданных начальных условиях $\mathrm{X}(0) \geq 0$, $Q(0) = 0$ и ограничениях

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t) = \mathrm{r}(t)\,\mathrm{X}(t) - \mathrm{s}(t)\,\mathrm{Y}(t) - p(t)P(t); \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{X}(t) = \mathrm{Y}(t);$$

$$Q(t) \geq 0, P(t) \geq 0, \mathrm{X}(t) \geq 0, \quad (1.19)$$

$$Q(T) + \mathrm{a}\,\mathrm{X}(T) \geq 0; \quad (1.20)$$

где*Q{t)* — запас денег, $\mathrm{X}(t)$ — *вектор* прочих запасов, *P(t)* ~ «полезное потребление», $\mathrm{Y}(t)$ — *вектор* прочих потоков, r(/) — *вектор* «доходностей», *s(t) — вектор* «курсов»,*p{t)* — цена продукта, а в более общем плане, дефлятор «полезных расходов» - потребительских расходов для собственника и дивидендов для фирмы, а — вектор коэффициентов терминального условия, χ — предпочтение времени, $f(.)$ — функция полезности типа CRRA. Расшифровку этих обозначений для фирмы и собственника см. в опр. 2.

Решение задачи (1.17) — (1.20) будем искать в классе кусочно-непрерывных функций*P(t)* > 0 , *Y(t)* и соответственно кусочно-дифференцируемых функций $Q(t)$, $\mathrm{X}(t)$

Задача (1.17) — (1.20) — это неавтономная задача оптимального управления с фазовыми ограничениями. Для такой задачи нелегко даже просто выписать полную систему необходимых условий оптимальности [6].

Однако любая система условий оптимальности для задачи с ограничениями обычно включает требование максимизации *функционала Лагранжа:*

$$£_{\psi,\tilde{\varphi},\xi,\Phi}[Q(t),\mathrm{X}(t), P(t),\mathrm{Y}(t)] = \int_0^T \psi(t)\left(Y(t) - \frac{\partial}{\partial t}X(t)\right)dt +$$

$$+\int_0^T f(P(t))e^{-\chi t} + \xi(t)\left(r(t)X(t) - s(t)Y(t) - p(t)P(t) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t)\right)dt +$$
$$+\int_0^T (\tilde{\varphi}(t)X(t) + \tilde{\rho}(t)Q(t))dt + \tilde{\Phi}(Q(T) + aX(T)) \to \max_{Q(.),X(.),Y(.),P(.)\geq 0} \quad (1.21)$$

без ограничений, при некоторых значениях *двойственных переменных* $\psi(t), \tilde{\varphi}(t), \xi(t), \tilde{\rho}(t), \tilde{\Phi}$, которые надо выбрать так, чтобы в точке максимума функционала Лагранжа выполнялись *условия дополняющей нежёсткости.*

$$\mathrm{r}(t)\,\mathrm{X}(t) - \mathrm{s}(t)\,\mathrm{Y}(t) - p(t)P(t) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t) = 0;$$

$$\mathrm{Y}(t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{X}(t) = 0;$$

$$\tilde{\varphi}(t)\,\mathrm{X}(t) = 0,\ \tilde{\varphi}(t) \geq 0,\ \mathrm{X}(t) \geq 0, \quad (1.22)$$

$$\tilde{\rho}(t)Q(t) = 0,\ \tilde{\rho}(t) \geq 0,\ Q(t) \geq 0,$$

$$\tilde{\Phi}\,(Q(T) + \mathrm{a}\,\mathrm{X}(T)) \geq 0,\ \tilde{\Phi} \geq 0,\ Q(T) + \mathrm{a}\,\mathrm{X}(T) \geq 0;$$

С другой стороны, выполнение условий (1.21), (1.22) всегда *достаточно* для оптимальности траектории. На этот простой факт редко обращают внимание, поэтому ниже приведем его доказательство (см. утв. 1).

Вся проблема состоит в том, в каком классе объектов следует искать двойственные переменные. Если мы хотим решить задачу (1.17) — (1.20) для произвольных (интегрируемых) функций *p(t), r(t)* и *s(t)*, то в качестве двойственных переменных $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\rho}(t)$ придется рассматривать обобщённые функции (плотности неотрицательных мер общего вида, [6]), т.е. объекты чрезвычайно сложные для анализа.

Нам, однако, в конечном счёте нужны решения задач (1.17) — (1.20) не при произвольных, а при равновесных, т.е. естественно согласованных с задачами агентов функциях *p(t), r(t)* и *s(t)*. Опыт изучения задач оптимизации, связанных с экономической проблематикой, показывает, что в равновесии двойственные переменные обычно имеют самостоятельный содержательный смысл денежных оценок факторов производства или платы за возможность нарушать ограничения. Эти величины, как и цены, должны меняться со временем достаточно регулярно.

В связи с этим мы предлагаем с самого начала искать только такие решения задач агентов, которым соответствуют достаточно регулярные двойственные переменные, а именно обычные функции, достаточно гладкие для того, чтобы в функционале Лагранжа можно было выполнить интегрирование по частям. Точнее это выражается следующими определениями.

Определение 1. *Регулярным решением* задачи агента называется набор *прямых* $[Q(t), \mathrm{X}(t), P(t), \mathrm{Y}(t)]$ и *двойственных* $[\psi(t), \tilde{\varphi}(t), \xi(t), \tilde{\rho}(t), \tilde{\Phi}]$ переменных такой, что

1) функции $Q(t), \mathrm{X}(t), P(t), \mathrm{Y}(t)$ доставляют максимум функционалу Лагранжа по множеству всех кусочно-дифференцируемых функций $Q(t), \mathrm{X}(t)$, удовлетворяющих заданным начальным условиям, и множеству кусочно-непрерывных функций $P(t) > 0$, $Y(t)$;

2) функции $\psi(t), \xi(t)$ абсолютно непрерывны, а функции $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\rho}(t)$ — измеримы;

3) почти всюду на $[0,T]$ выполнены условия дополняющей нежёсткости.

Утверждение 1. Регулярное решение является решением задачи (1.17) — (1.20) и в обычном смысле.

Доказательство. В силу неравенств на прямые переменные, включённых в условия (1.22), набор прямых переменных $[Q(t), \mathrm{X}(t), P(t), \mathrm{Y}(t)]$ из регулярного решения является *допустимым* для задачи (1.17) — (1-20), причём в силу тех же условий (1.22)

$$\text{£}_{\psi,\ddot{\varphi},\xi,\Phi}[Q(t), \mathrm{X}(t), P(t), \mathrm{Y}(t)] = \int_0^T \left(f(P(t))e^{-\chi t} \right) dt$$

Пусть теперь $[\tilde{Q}(t), \mathrm{X}(t), \tilde{P}(t), \mathrm{Y}(t)]$ — какой-нибудь другой набор функций, допустимый для задачи (1.17) — (1.20). Тогда, в силу неотрицательности двойственных переменных $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\rho}(t), \tilde{\Phi}$,

$$\text{£}_{\psi,\ddot{\varphi},\xi,\Phi}[\tilde{Q}(t), \mathrm{X}(t), \tilde{P}(t), \mathrm{Y}(t)] \geq \int_0^T \left(f(\tilde{P}(t))e^{-\chi t} \right) dt$$

Но поскольку функционал Лагранжа достигает максимума при $[Q(t), \mathrm{X}(t), P(t), \mathrm{Y}(t)]$,

$$\text{£}_{\psi,\ddot{\varphi},\xi,\Phi}[Q(t), \mathrm{X}(t), P(t), \mathrm{Y}(t)] \geq \text{£}_{\psi,\ddot{\varphi},\xi,\Phi}[\tilde{Q}(t), \mathrm{X}(t), \tilde{P}(t), \mathrm{Y}(t)]$$

Таким образом, $\int_0^T \left(f(P(t))e^{-\chi t} \right) dt \geq \int_0^T \left(f(\tilde{P}(t))e^{-\chi t} \right) dt$ для любого допустимого набора $[\tilde{Q}(t), \mathrm{X}(t), \tilde{P}(t), \mathrm{Y}(t)]$, что и требовалось доказать.

Это утверждение, собственно, и означает, что, как говорилось выше, условия (1.21), (1.22) всегда достаточны для оптимальности: не требуется даже вогнутости задачи. В дальнейшем, рассматривая межвременные равновесия, мы будем требовать не просто разрешимости, а существования регулярных решений задач агентов. В связи с этим вводим следующее определение.

Определение 2. *Регулярным равновесием* называется набор *прямых* $[W(t), Y(t), A(t), Z(t), M(t), S(t), C(t)]$, информационных $[p(t), s(t), r(t)]$ и двойственных $[\xi_W(t), \tilde{\rho}_W(t), \tilde{\varphi}_Y(t), \tilde{\varphi}_A(t), \psi_A(t), \psi_Y(t), \tilde{\Phi}_W, \xi_M(t), \tilde{\rho}_M(t)], \tilde{\varphi}_S(t), \psi_S(t), \tilde{\Phi}_M]$ переменных такой, что

1) функции *p(t), s(t), r(t)* ограничены и интегрируемы на $[0,T]$.

2) наборы

$$Q(t) = W(t),\ X(t) = (Y(t), A(t)),$$

$$P(t) = \frac{Z(t)}{p(t)},\ \mathrm{Y}(t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} Y(t), \frac{\partial}{\partial t} A(t) \right\rangle; \qquad (1.23)$$

$$\xi(t) = \xi_W(t), \tilde{\varphi}(t) = \langle \tilde{\varphi}_Y(t), \tilde{\varphi}_A(t) \rangle, \tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_W(t), \tilde{\Phi} = \Phi_W$$

при $\mathrm{r}(t) = \langle 0, p(t) \rangle$, $\mathrm{s}(t) = \langle -s(t), bp(t) \rangle$, образуют регулярное решение задачи фирмы (1.8);

3) наборы

$$Q(t) = M(t), X(t) = (S(t)), P(t) = C(t),\ \mathrm{Y}(t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} S(t) \right\rangle; \qquad (1.24)$$

$$\xi(t) = \xi_W(t), \tilde{\varphi}(t) = \langle \tilde{\varphi}_S(t) \rangle, \tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}_W(t), \tilde{\Phi} = \Phi_W \qquad (1.25)$$

при $\mathrm{r}(t) = \langle r(t) \rangle$, $\mathrm{s}(t) = \langle s(t) \rangle$, образуют регулярное решение задачи собственника (1.13);

4) почти всюду на *[0,T]* выполняются условия равновесия (1.1), (1.4), (1.5).

Утв. 1 показывает, что, рассматривая регулярные равновесия, мы не выходим за рамки исходного интуитивного понимания межвременного равновесия. Однако, требуя регулярности, мы рискуем вовсе потерять решения, поэтому здесь следует проявлять определенную осторожность.

В частности, как будет видно ниже, если исключить из задач агентов терминальные условия, эти задачи не будут иметь регулярных решений в равновесии.

Общее обсуждение и исследование регулярных равновесий и происхождения терминальных условий в задачах межвременного равновесия приводится в [7], однако задача, рассматриваемая здесь, несколько выходит за рамки этих обсуждений.

Литература

1. **Lucas R. E.** Rational Expectations and Econometric Practice / R. E. Lucas, T. J. Sargent. — London : Allen & Unwin, 1981. — P. 103—118. 2. **Brock W. A.** The Analysis of Macroeconomic Policies in Perfect Foresight Equilibrium / W. A. Brock, S. J. Turnovsky // International Economic Review. — Vol. 22. — Is. 1 (Feb., 1981). — P. 179—209. 3. **Turnovsky S. J.** Monetary Growth, Inflation and Economic Activity in a Dynamic Macro Model / S. J. Turnovsky // NBER Working Pap. — P. 68—91. 4. **Фишберн П. С.** Теория полезности для принятия решений / П. С. Фишберн. — М. : Наука, 1978. — С. 47—63. 5. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. — М. : Мир, 1972. — С. 35—40. 6. **Афанасьев А. П.** Необходимое условие в оптимальном управлении / А. П. Афанасьев, В. В. Дикусар, А. А. Милютин, С. А. Чуканов. — М. : Наука, 1990. — С. 81—87. 7. **Поспелов И. Г.** Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов / И. Г. Поспелов. — М. : ВЦ РАН, 2003. — С. 125—132.