УДК 517 . 929

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЧИСТЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д. Я. Хусаинов*

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 01033, Киев, ул. Владимирская, 64

Й. Диблик, М. Ружичкова**, Я. Лукачева*****

Žilina Univ.
Hurbanova 15, Žilina, 01026, Slovak Republic
e-mail: josef.diblik@fpv.utc.sk
miroslava.ruzickova@fpv.uniza.sk
jana.lukacova@fpv.uniza.sk

We obtain a representation of a solution for the Cauchy problem for a linear inhomogeneous differential equation with constant coefficients and pure delay. To find the relations, we use special matrix-valued functions, called a matrix-valued sine delay, and a matrix-valued cosine delay. They have the form of matrix-valued polynomials of the degree dependent on the value of the delay.

Отримано зображення розв'язку задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами з чистим запізненням. При цьому використано спеціальні матричні функції, що названі матричними запізнілими синусом та косинусом. Вони мають вигляд матричних поліномів степеня, залежного від запізнення.

Введение. Многие процессы в механических и технических системах описываются дифференциальными уравнениями второго порядка [1 – 4]. При использовании этих моделей в биологии и динамике популяций возникает необходимость введения эффекта последействия. Дифференциальные уравнения с запаздыванием более адекватно описывают эти процессы [5]. Поэтому возникла необходимость изучения систем уравнений второго порядка с запаздыванием [6, 7]. В ряде работ для уравнений такого типа решалась краевая задача [8, 9]. В настоящей статье получено представление задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с чистым запаздыванием. Для получения зависимостей используются специальные матричные функции, названные матричными запаздывающими синусом и косинусом. Они имеют вид матричных полиномов степени, зависящей от величины запаздывания. Полученная зависимость достаточно удобна для решения задач управления.

Основные результаты. Как известно, решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0',$$

* Поддержан Словацко-Украинским проектом № SK-UA-0028-07.

** Поддержаны Словацко-Украинским проектом № SK-UA-0028-07 и грантом № 1/3238/06 Грантового агентства Словацкой Республики (VEGA).

*** Поддержана грантом № 1/3238/06 Грантового агентства Словацкой Республики (VEGA).

имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_0'}{\omega} \sin \omega t,$$

где функции $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ могут быть представлены в виде рядов

$$\sin \omega t = \omega \frac{t}{1!} - \omega^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \omega^{2k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,$$

$$\cos \omega t = 1 - \omega^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \omega^{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \ldots.$$

В работе [10] были рассмотрены системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = 0, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0'.$$

Было показано, что решение задачи Коши для систем такого вида можно записать в аналогичной форме с использованием матричных функций (названных матричными косинусом и синусом), которые представляли собой формальные матричные ряды

$$\operatorname{Sin} \Omega t = \Omega \frac{t}{1!} - \Omega^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \Omega^{2k+1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{Cos} \Omega t = 1 - \Omega^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \Omega^{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \ldots.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с чистым запаздыванием

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t-\tau) = 0, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad x(t) \equiv \varphi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая векторная функция, определяющая начальные условия. Покажем, что решение задачи Коши для системы с чистым запаздыванием (1) может быть записано в аналогичном интегральном виде с использованием матричных функций, похожих на матричные синус и косинус [11].

Предварительно рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\ddot{X}(t) + \Omega^2 X(t-\tau) = 0 \tag{2}$$

и исследуем свойства его решений.

Определение 1. *Запаздывающим матричным косинусом назовем матричную функцию, имеющую вид*

$$\operatorname{Cos}_\tau \Omega t := \begin{cases} \Theta, & -\infty < t < -\tau, \\ I, & -\tau \leq t < 0, \\ I - \Omega^2 \dfrac{t^2}{2!}, & 0 \leq t < \tau, \\ \ldots & \ldots \\ I - \Omega^2 \dfrac{t^2}{2!} + \Omega^4 \dfrac{(t-\tau)^4}{4!} + \ldots + (-1)^k \Omega^{2k} \dfrac{[t-(k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau, \end{cases} \tag{3}$$

полинома степени $2k$ на промежутках $(k-1)\tau \le t < k\tau$, склеенного в узлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2 \dots$, I — единичная, Θ — нулевая матрицы.

Определение 2. *Запаздывающим матричным синусом назовем матричную функцию, имеющую вид*

$$\operatorname{Sin}_\tau \Omega t := \begin{cases} \Theta, & -\infty < t < -\tau, \\ \Omega(t+\tau), & -\tau \le t < 0, \\ \Omega(t+\tau) - \Omega^3 \dfrac{t^3}{3!}, & 0 \le t < \tau, \\ \dots & \dots \\ \Omega(t+\tau) - \Omega^3 \dfrac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^k \Omega^{2k+1} \dfrac{[t-(k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}, & (k-1)\tau \le t < k\tau, \end{cases} \tag{4}$$

полинома степени $2k+1$ на промежутках $(k-1)\tau \le t < k\tau$, склеенного в узлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Приведем ряд утверждений, которые характеризуют свойства функций $\operatorname{Sin}_\tau \Omega t$, $\operatorname{Cos}_\tau \Omega t$.

Лемма 1. *Для матричного косинуса справедливо следующее правило дифференцирования:*

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Cos}_\tau \Omega t = -\Omega \operatorname{Sin}_\tau \Omega (t-\tau), \quad \frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Cos}_\tau \Omega t = -\Omega^2 \operatorname{Cos}_\tau \Omega (t-\tau), \tag{5}$$

т. е. запаздывающий косинус является решением линейного матричного дифференциального уравнения второго порядка с чистым запаздыванием (2), удовлетворяющим единичному начальному условию $X(t) \equiv I$, $-\tau \le t \le 0$.

Доказательство. Пусть величины Ω и τ фиксированы. Для произвольного момента времени t, $(k-1)\tau \le t < k\tau$, выполняется соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Cos}_\tau \Omega t = \frac{d^2}{dt^2} \left[I - \Omega^2 \frac{t^2}{2!} + \Omega^4 \frac{(t-\tau)^4}{4!} + \dots + (-1)^k \, \Omega^{2k} \frac{[t-(k-1)\,\tau]^{2k}}{(2k)!} \right].$$

Последовательно дифференцируя выражение в скобках, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Cos}_\tau \Omega t = \frac{d}{dt} \left[-\Omega^2 \frac{t}{1!} + \Omega^4 \frac{(t-\tau)^3}{3!} + \dots + (-1)^k \, \Omega^{2k} \frac{[t-(k-1)\tau]^{2k-1}}{(2k-1)!} \right] =$$

$$= -\Omega^2 + \Omega^4 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + (-1)^k \Omega^{2k} \frac{[t-(k-1)\tau]^{2k-2}}{(2k-2)!},$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Cos}_\tau \Omega t = -\Omega^2 \left[I - \Omega^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + (-1)^{k-1} \Omega^{2(k-1)} \frac{[(t-\tau) - ((k-1)-1)\tau]^{2(k-1)}}{(2(k-1))!} \right] =$$

$$= -\Omega^2 \operatorname{Cos}_\tau \Omega \, (t-\tau),$$

что и необходимо было доказать.

Лемма 2. *Для матричного синуса справедливо следующее правило дифференцирования:*

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Sin}_\tau \Omega t = \Omega \operatorname{Cos}_\tau \Omega t, \quad \frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Sin}_\tau \Omega t = -\Omega^2 \operatorname{Sin}_\tau \Omega\,(t-\tau), \tag{6}$$

т. е. запаздывающий синус является решением матричного дифференциального уравнения с чистым запаздыванием (2), удовлетворяющим начальному условию $X(t) \equiv \equiv \Omega(t+\tau), -\tau \le t \le 0$.

Доказательство. Пусть величины Ω и τ фиксированы. Тогда для произвольного момента времени t, $(k-1)\tau \le t < k\tau$, выполняется соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Sin}_\tau \Omega t = \frac{d^2}{dt^2}\left[\Omega\,(t+\tau) - \Omega^3\,\frac{t^3}{3!} + \Omega^5\,\frac{(t-\tau)^5}{5!} + \ldots + (-1)^k\,\Omega^{2k+1}\,\frac{[t-(k-1)\,\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}\right].$$

Дифференцируя выражение в скобках, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Sin}_\tau \Omega t = \frac{d}{dt}\left[\Omega - \Omega^3\,\frac{t^2}{2!} + \Omega^5 \frac{(t-\tau)^4}{4!} + \ldots + (-1)^k\,\Omega^{2k+1}\,\frac{[t-(k-1)\tau]^2 k}{(2k)!}\right] =$$

$$= -\Omega^3\,\frac{t}{1!} + \Omega^5\,\frac{(t-\tau)^3}{3!} + \ldots + (-1)^k\,\Omega^{2k+1}\,\frac{[t-(k-1)\tau]^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{Sin}_\tau \Omega t =$$

$$= -\Omega^2\left[\Omega[(t-\tau)+\tau] - \Omega^3\,\frac{(t-\tau)^3}{3!} + \ldots + (-1)^{(k-1)}\Omega^{2(k-1)+1}\,\frac{[(t-\tau)-(k-2)\tau]^{2(k-1)+1}}{[2(k-1)+1]!}\right] =$$

$$= -\Omega^2 \operatorname{Sin}_\tau \Omega(t-\tau),$$

что и необходимо было доказать.

Лемма 3. *Если матрица* Ω *не особая, то для запаздывающего матричного косинуса справедливо правило интегрирования*

$$\int_0^t \operatorname{Cos}_\tau \Omega\xi d\xi = \Omega^{-1}\left\{\operatorname{Sin}_\tau \Omega t - \operatorname{Sin}_\tau(\Omega \bullet 0)\right\}, \tag{7}$$

где $\operatorname{Sin}_\tau(\Omega \bullet 0) = \operatorname{Sin}_\tau \Omega t\big|_{t=0}$.

Доказательство. Пусть Ω и τ — фиксированные величины. Тогда для произвольного момента времени t, $(k-1)\tau \le t < k\tau$, выполняется следующее:

$$\int\limits_0^t \mathrm{Cos}_\tau\,\Omega\xi d\xi = \int\limits_0^\tau \left[I - \Omega^2\,\frac{\xi^2}{2!}\right] d\xi + \int\limits_\tau^{2\tau} \left[I - \Omega^2\,\frac{\xi^2}{2!} + \Omega^4\,\frac{(\xi-\tau)^4}{4!}\right] d\xi + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(k-2)\tau}^{(k-1)\tau} \left[I - \Omega^2\,\frac{\xi^2}{2!} + \Omega^4\,\frac{(\xi-\tau)^4}{4!} + \ldots + (-1)^{k-1}\Omega^{2(k-1)}\,\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{2(k-1)}}{(2(k-1))!}\right] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(k-1)\tau}^{t} \left[I - \Omega^2\,\frac{\xi^2}{2!} + \Omega^4\,\frac{(\xi-\tau)^4}{4!} + \ldots + (-1)^k\,\Omega^{2k}\,\frac{[\xi-(k-1)\tau]^{2k}}{(2k)!}\right] d\xi.$$

Интегрируя каждый из членов, получаем

$$\int\limits_0^t \mathrm{Cos}_\tau\,a\xi d\xi = \left[I\xi - \Omega^2\,\frac{\xi^3}{3!}\right]_{\xi=0}^{\xi=\tau} + \left[I\xi - \Omega^2\,\frac{\xi}{3!} + \Omega^4\,\frac{(\xi-\tau)^5}{5!}\right]_{\xi=\tau}^{\xi=2\tau} + \ldots$$

$$\ldots + \left[I\xi - \Omega^2\frac{\xi^3}{3!} + \Omega^4\,\frac{(\xi-\tau)^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k-1}\Omega^{2(k-1)}\,\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{2(k-1)+1}}{[2(k-1)+1]!}\right]_{\xi=(k-2)\tau}^{\xi=(k-1)\tau} +$$

$$+ \left[I\xi - \Omega^2\,\frac{\xi^3}{3!} + \Omega^4\,\frac{(\xi-\tau)^5}{5!} + \ldots + (-1)^k\,\Omega^{2k}\,\frac{[\xi-(k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]_{\xi=(k-1)\tau}^{\xi=t}.$$

Выполняя соответствующие преобразования, имеем

$$\int\limits_0^t \mathrm{Cos}_\tau\,\Omega\xi d\xi =$$

$$= \Omega^{-1}\left\{\Omega(t+\tau) - \Omega^3\frac{t^3}{3!} + \Omega^5\,\frac{(t-\tau)^5}{5!} - \ldots + (-1)^k\Omega^{2k+1}\,\frac{[t-(k-1)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!} - \Omega\tau\right\} =$$

$$= \Omega^{-1}\,\left\{\mathrm{Sin}_\tau\,\Omega t - \mathrm{Sin}_\tau\,(\Omega \bullet 0)\right\},$$

т. е. получаем зависимость (7).

Лемма 4. *Если матрица Ω не особая, то для запаздывающего синуса справедливо правило интегрирования*

$$\int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau a\xi d\xi = -\Omega^{-1}\left\{\mathrm{Cos}_\tau\,\Omega(t+\tau) - \mathrm{Cos}_\tau\Omega(0+\tau)\right\}, \qquad (8)$$

где $\mathrm{Cos}_\tau\,\Omega(0+\tau) = \mathrm{Cos}_\tau\,\Omega(t+\tau)|_{t=0}$.

Доказательство. Пусть Ω и τ — фиксированные величины. Тогда для произвольного момента времени t, $(k-1)\tau \le t < k\tau$, выполняется следующее:

$$\int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau \Omega\xi d\xi = \int\limits_0^\tau \left[\Omega(\xi+\tau) - \Omega^3\frac{\xi^3}{3!}\right] d\xi + \int\limits_\tau^{2\tau} \left[\Omega(\xi+\tau) - \Omega^3\,\frac{\xi^3}{3!} + \Omega^5\,\frac{(\xi-\tau)^5}{5!}\right] d\xi + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(k-2)\tau}^{(k-1)\tau} \left[\Omega(\xi+\tau) - \Omega^3\frac{\xi^3}{3!} + \Omega^5\frac{(\xi-\tau)^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k-1}\Omega^{2(k-1)+1}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{2(k-1)+1}}{[2(k-1)+1]!}\right] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{(k-1)\tau}^{t} \left[\Omega(\xi+\tau) - \Omega^3\frac{\xi^3}{3!} + \Omega^5\frac{(\xi-\tau)^5}{5!} + \ldots + (-1)^{k}\Omega^{2k+1}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] d\xi.$$

Вычисляя интеграл от каждого из членов, получаем

$$\int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega\xi d\xi = \left[\Omega\frac{(\xi+\tau)^2}{2!} - \Omega^3\frac{\xi^4}{4!}\right]_{\xi=0}^{\xi=\tau} + \left[\Omega\frac{(\xi+\tau)^2}{2!} - \Omega^3\frac{\xi^4}{4!} + \Omega^5\frac{(\xi-\tau)^6}{6!}\right]_{\xi=\tau}^{\xi=2\tau} + \ldots$$

$$\ldots + \left[\Omega\frac{(\xi+\tau)^2}{2!} - \Omega^3\frac{\xi^4}{4!} + \Omega^5\frac{(\xi-\tau)^6}{6!} + \ldots + (-1)^{k-1}\Omega^{2(k-1)+1}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{2k}}{(2k)!}\right]_{\xi=(k-2)\tau}^{\xi=(k-1)\tau} +$$

$$+ \left[\Omega\frac{(\xi+\tau)^2}{2!} - \Omega^3\frac{\xi^4}{4!} + \Omega^5\frac{(\xi-\tau)^6}{6!} + \ldots + (-1)^{k}\Omega^{2k+1}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}\right]_{\xi=(k-1)\tau}^{\xi=t}.$$

Выполняя соответствующие преобразования, имеем

$$\int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega\xi d\xi =$$

$$= -\Omega\frac{\tau^2}{2!} + \Omega\frac{(t+\tau)^2}{2!} - \Omega^3\frac{t^4}{4!} + \Omega^5\frac{(t-\tau)^6}{6!} + \ldots + (-1)^k\Omega^{2k+1}\frac{[t-(k-1)\tau]^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}.$$

Пусть матрица Ω не особая. Тогда

$$\int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega\xi d\xi =$$

$$= -\Omega^{-1}\left\{\left[I - \Omega^2\frac{(t+\tau)^2}{2!} + \Omega^4\frac{t^4}{4!} - \Omega^6\frac{(t-\tau)^6}{6!} + \ldots + (-1)^{k+1}\Omega^{2(k+1)}\frac{[(t+\tau)-k\tau]^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}\right] - \right.$$

$$\left. - \left(I - \Omega^2\frac{\tau^2}{2!}\right)\right\} = -\Omega^{-1}\left\{\mathrm{Cos}_\tau\,\Omega(t+\tau) - \mathrm{Cos}_\tau\,\Omega(0+\tau)\right\},$$

т. е. получаем зависимость (18).

Лемма 5. *Запаздывающий косинус* $\cos_\tau\, \Omega t$, $t > 0$, *является почти всюду бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой функцией. В узлах* $t = k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$, *происходит разрыв* $(2k+1)$*-й производной*

$$\frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \operatorname{Cos}_\tau \Omega t|_{t=k\tau-0} = 0, \quad \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} \operatorname{Cos}_\tau \Omega t|_{t=k\tau+0} = (-1)^{k+1}\, \Omega^{2k+3}. \tag{9}$$

Утверждение леммы следует из вида зависимости (3). Аналогичным является следующее утверждение.

Лемма 6. *Запаздывающий синус* $\operatorname{Sin}_\tau \Omega t$, $t > 0$, *является почти всюду бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой функцией. В узлах* $t = k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$, *происходит разрыв* $2(k+1)$*-й производной*

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dt^{2(k+1)}} \operatorname{Sin}_\tau \Omega t|_{t=k\tau-0} = 0, \quad \frac{d^{2(k+1)}}{dt^{2(k+1)}} \operatorname{Sin}_\tau \Omega t|_{t=k\tau+0} = (-1)^{k}\, \Omega^{2k+1}. \tag{10}$$

Утверждение леммы следует из вида зависимости (4).

Использовав приведенные леммы, рассмотрим возможность получения решения задачи Коши в компактном виде.

Теорема 1. *Пусть матрица* Ω *не особая. Тогда решение* $x(t)$ *системы линейных однородных уравнений с чистым запаздыванием (2), удовлетворяющее начальному условию* $x(t) \equiv \varphi(t)$, $x'(t) \equiv \varphi'(t)$, $-\tau \le t \le 0$, *где* $\varphi(t)$ *— произвольная дважды непрерывно дифференцируемая векторная функция, имеет вид*

$$x(t) = (\operatorname{Cos}_\tau \Omega t)\, \varphi(-\tau) + \Omega^{-1} \left\{ (\operatorname{Sin}_\tau \Omega t)\, \dot{\varphi}(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} \operatorname{Sin}_\tau \Omega(t - \tau - \xi)\, \ddot{\varphi}(\xi)\, d\xi \right\}. \tag{11}$$

Доказательство. Решение системы (2), удовлетворяющее условию $x(t) \equiv \varphi(t)$, $-\tau \le$ $\le t \le 0$, будем искать в виде

$$x(t) = (\operatorname{Cos}_\tau \Omega t)\, c_1 + (\operatorname{Sin}_\tau \Omega t)\, c_2 + \int\limits_{-\tau}^{0} \operatorname{Sin}_\tau \Omega(t - \tau - \xi)\, \ddot{y}(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Здесь c_1, c_2 — неизвестные постоянные векторы, $y(t)$ — неизвестная дважды непрерывно дифференцируемая векторная функция. Поскольку $\operatorname{Cos}_\tau \Omega t$, $\operatorname{Sin}_\tau \Omega t$ — решения однородного матричного уравнения (3) с постоянными коэффициентами, при произвольных c_1, c_2 и произвольной векторной функции $y(t)$ векторная функция (12) также будет решением уравнения (2). Найдем постоянные c_1, c_2 и векторную функцию $y(t)$ таким образом, чтобы выполнялись начальные условия

$$x(t) \equiv \varphi(t), \quad x'(t) \equiv \varphi'(t), \quad -\tau \le t \le 0,$$

т. е. при $-\tau \le t \le 0$ имели место соотношения

$$(\mathrm{Cos}_\tau\,\Omega t)\,c_1 + (\mathrm{Sin}_\tau\,\Omega t)\,c_2 + \int\limits_{-\tau}^{0} \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega(t-\tau-\xi)\,\ddot{y}(\xi)\,d\xi = \varphi(t),$$

$$\frac{d}{dt}\left\{(\mathrm{Cos}_\tau\,\Omega t)\,c_1 + (\mathrm{Sin}_\tau\,\Omega t)\,c_2 + \int\limits_{-\tau}^{0} \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega(t-\tau-\xi)\,\ddot{y}(\xi)\,d\xi\right\} = \varphi'(t).$$

Рассмотрим первое условие. Разделим интеграл на сумму двух интегралов, соответствующих $-\tau \le t < 0$:

$$(\mathrm{Cos}_\tau\,\Omega t)\,c_1 + (\mathrm{Sin}_\tau\,\Omega t)\,c_2 + \int\limits_{-\tau}^{t} \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega(t-\tau-\xi)\,\ddot{y}(\xi)d\xi + \int\limits_{t}^{0} \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega(t-\tau-\xi)\,\ddot{y}(\xi)\,d\xi = \varphi(t).$$

Согласно введенным определениям, при произвольной векторной функции $y(t)$ на промежутке $-\tau \le t \le 0$ будет выполняться следующее:

$$\mathrm{Cos}_\tau\,\Omega t = I, \quad \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega t = \Omega(t+\tau), \quad \int\limits_{t}^{0} \mathrm{Sin}_\tau\,\Omega(t-\tau-\xi)\,\ddot{y}(\xi)\,d\xi \equiv 0.$$

Проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_{-\tau}^{t} \mathrm{Sin}_\tau \Omega(t-\tau-\xi)\,\ddot{y}(\xi)\,d\xi = \int\limits_{-\tau}^{t} \mathrm{Sin}_\tau \Omega s \ddot{y}(t-\tau-s)\,ds = \int\limits_{-\tau}^{t} \Omega(s+t)\ddot{y}(t-\tau-s)\,ds =$$

$$= -\Omega(s+\tau)\dot{y}(t-\tau-s)\Big|_{-\tau}^{t} + \Omega\int\limits_{-\tau}^{t} \dot{y}(t-\tau-s)\,ds = -\Omega(t+\tau)\,\dot{y}(-\tau) - \Omega[y(-\tau)-y(t)].$$

Таким образом, выполнение начальных условий приводит к равенству

$$Ic_1 + \Omega(t+\tau)\,c_2 - \Omega(t+\tau)\,\dot{y}(-\tau) - \Omega[y(-\tau)-y(t)] = \varphi(t), \quad -\tau \le t \le 0.$$

Перепишем полученное равенство в виде

$$I\,[c_1 - \Omega\,y(-\tau)] + \Omega\,[c_2 - \dot{y}(-\tau)]\,(t+\tau) + [\Omega\,y(t) - \varphi(t)] = 0.$$

Пусть Ω — не особая матрица. Тогда полученное равенство будет выполняться, если выполняются следующие:

$$y(t) = \Omega^{-1}\varphi(t), \quad c_1 = \varphi(-\tau), \quad c_2 = \Omega^{-1}\varphi(-\tau).$$

Зависимость (12) принимает вид

$$x(t) = (\mathrm{Cos}_\tau \, \Omega t) \, \varphi(-\tau) + \Omega^{-1} \, \mathrm{Sin}_\tau \, \Omega t \dot{\varphi}(-\tau) + \Omega^{-1} \int\limits_{-\tau}^{0} \mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - \tau - s) \ddot{\varphi}(s) \, ds,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка с чистым запаздыванием

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t - \tau) = f(t), \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \tag{13}$$

и нулевыми начальными условиями $x(t) \equiv 0, -\tau \leq t \leq 0.$

Теорема 2. *Пусть матрица Ω не особая. Тогда решение $x_0(t)$ неоднородного уравнения (13), удовлетворяющее нулевому начальному условию $x(t) \equiv 0, -\tau \leq t \leq 0,$ имеет вид*

$$x_0(t) = \Omega^{-1} \left\{ \int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - \tau - \xi) \, f(\xi) \, d\xi \right\}. \tag{14}$$

Доказательство. Решение неоднородного уравнения (13) ищем методом вариации произвольной постоянной в виде

$$x_0(t) = \int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - \tau - \xi) \, C(\xi) \, d\xi,$$

где $C(\xi)$, $0 \leq \xi \leq t$, — неизвестная функция. Дифференцируя функцию $x_0(t)$, получаем

$$\frac{d}{dt} x_0(t) = \mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - \tau - \xi) \, C(\xi) \Big|_{\xi = t} + \int\limits_0^t \frac{d}{dt} \left[\mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - \tau - \xi) \right] C(\xi) \, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{d}{dt} \left[\mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - \tau - \xi) \right] \, C(\xi) \, d\xi,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_0(t) = \frac{d}{dt} \left[\mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - \tau - \xi) \right] \, C(\xi) \Big|_{\xi = t} - \Omega^2 \int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - 2\tau - \xi) \, C(\xi) \, d\xi =$$

$$= \Omega \, C(t) - \Omega^2 \int\limits_0^t \mathrm{Sin}_\tau \, \Omega(t - 2\tau - \xi) \, C(\xi) \, d\xi.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (13) и учитывая, что согласно определению

$$\int_{t-\tau}^{t} \operatorname{Sin}_\tau \Omega(t-2\tau-\xi)\, C(\xi)\, d\xi = \Theta,$$

имеем

$$\Omega\, C(t) - \Omega^2 \int_0^t \operatorname{Sin}_\tau \Omega(t-2\tau-\xi)\, C(\xi)\, d\xi + \Omega^2 \left[\int_0^t \operatorname{Sin}_\tau \Omega(t-2\tau-\xi)\, C(\xi)\, d\xi \right] = f(t).$$

Отсюда находим $C(t) = \Omega^{-1} f(t)$ и, учитывая перестановочность матриц Ω^{-1} и $\operatorname{Sin} \Omega t$, получаем зависимость (14).

1. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
2. *Булгаков Б. В.* Колебания. — М.: Гостехтеориздат, 1954. — 892 с.
3. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1968. — 559 с.
4. *Кононенко В. О.* Нелинейные колебания механических систем: Избр. тр. — Киев: Наук. думка, 1980. — 382 с.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 420 с.
6. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969. — 309 с.
7. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. — Киев: Вища шк., 1979. — 247 с.
8. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
9. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
11. *Коварж И. В., Хусаинов Д. Я.* Одномерное волновое уравнение с запаздыванием // Журн. обчислюв. та прикл. математики. — 2004. — № 2. — С. 99.

Получено 10.10.07