УДК 517 . 925

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

Муса Джабер Абу эль-шаур

Ал ал-байт ун-т, Мафрак, Иордания
e-mail: drmousa67@yahoo.com

We find asymptotic representations for a certain class of solutions of second order nonautonomous differential equations that are close, in a certain sense, to linear equations.

Встановлено асимптотичні зображення для деяких класів розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку, що у деякому сенсі є близькими до лінійних рівнянь.

1. Постановка задачи и формулировка основных теорем. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) y |\ln|y||^\sigma, \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0 < +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq \leq +\infty$.

В работах [1 – 4] для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка более общего вида

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y),$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, — непрерывная функция, $\varphi : \Delta_Y \to]0, +\infty[$ (Δ_Y — односторонняя окрестность Y, Y — либо нуль, либо $\pm\infty$) — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y \to \Delta_Y \\ Y \in \Delta_Y}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \mu,$$

исследовался вопрос о существовании и асимптотике при $t \uparrow \omega$ так называемых $P_\omega(\lambda_0)$-решений. При этом были рассмотрены все возможные случаи, кроме $\mu = 0$. Особенность этого случая состоит в том, что уравнение является в некотором смысле близким к линейному дифференциальному уравнению и требует разработки новых подходов для его изучения. Именно к этому классу и относится уравнение (1.1).

Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, будем называть $P_\omega(\lambda_0)$-решением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \qquad k = 0, 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{1.2}$$

Целью работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(\lambda_0)$-решений уравнения (1.1), для которых $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а также асимптотических представлений при $t \uparrow \omega$ для всех таких решений.

Введем вспомогательные обозначения, положив

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad I_A(t) = \int\limits_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau, \quad J_B(t) = \int\limits_B^t p^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau,$$

$$A = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|p(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|p(\tau)\,d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Для уравнения (1.1) имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть $\sigma \neq 1$. Тогда для существования $P_\omega(\lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, уравнения (1.1) необходимо, а если $(\lambda_0 + 1)(\sigma - \lambda_1 - 1) \neq 0$, то и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\alpha_0\lambda_0 > 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p(t)\pi_\omega^2(t)}{|(1-\sigma)(1-\lambda_0)I_A(t)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} = \frac{|\lambda_0|}{(1-\lambda_0)^2}. \tag{1.3}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \nu\,|(1-\sigma)(1-\lambda_0)I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\,[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \tag{1.4}$$

где

$$\nu = \operatorname{sign}\left[\alpha_0(\lambda_0-1)(1-\sigma)I_A(t)\right]. \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. *Пусть $\sigma \neq 2$. Тогда для существования $P_\omega(1)$-решений уравнения (1.1) необходимо, а если функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема и такая, что существует конечный или равный $\pm\infty$ предел*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(p^{\frac{1}{2}}(t)\,|J_B(t)|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}\right)'}{p(t)\,|J_B(t)|^{\frac{2\sigma}{2-\sigma}}}, \tag{1.6}$$

то и достаточно, чтобы

$$\alpha_0 > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)p^{\frac{1}{2}}(t)\,|J_B(t)|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}} = \infty. \tag{1.7}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \pm\,\mu\left|\frac{2-\sigma}{2}\,J_B(t)\right|^{\frac{2}{2-\sigma}}[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \pm p^{\frac{1}{2}}(t)\left|\frac{2-\sigma}{2}\,J_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}[1+o(1)], \tag{1.8}$$

где

$$\mu = \operatorname{sign}\left(\frac{2-\sigma}{2}\,J_B(t)\right). \tag{1.9}$$

Из этих теорем при $\sigma = 0$ непосредственно вытекают два следствия для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \alpha_0 p(t) y, \tag{1.10}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0 < +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$.

Следствие 1.1. *Для существования $P_\omega(\lambda_0)$-решений, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, уравнения (1.10) необходимо, а если $\lambda_0 \neq -1$, то и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\alpha_0\lambda_0 > 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^2(t) = \frac{|\lambda_0|}{(1-\lambda_0)^2}.$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \alpha_0(\lambda_0 - 1)I_A(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)].$$

Следствие 1.2. *Для существования $P_\omega(1)$-решений уравнения (1.10) необходимо, а если функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема и такая, что существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} p'(t)p^{-\frac{3}{2}}(t)$, то и достаточно, чтобы*

$$\alpha_0 > 0 \quad \textit{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega^2(t)p(t) = +\infty.$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \pm\,J_B(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \pm p^{\frac{1}{2}}(t)[1+o(1)].$$

Данные следствия дополняют известные результаты (см., например, [5, 6]) об асимптотических свойствах решений линейных дифференциальных уравнений (1.10).

Замечание 1.1. В определении $P_\omega(\lambda_0)$-решения наиболее жестким является требование существования конечного или равного $\pm\infty$ предела при $t \uparrow \omega$ отношения $\dfrac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}$. В случае, когда функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема и $\lim\limits_{t\uparrow\omega} p'(t)p^{-\frac{3}{2}}(t)$ конечен либо равен $\pm\infty$, нетрудно доказать, что каждое неколеблющееся решение y линейного дифференциального уравнения (1.10), отличное от решений, которые допускают одно из асимптотических представлений $y(t) \sim c$ или $y(t) \sim c\pi_\omega(t)$, $c \neq 0$, при $t \uparrow \omega$, заведомо является $P_\omega(\lambda_0)$-решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$.

2. Доказательства основных теорем. Для установления приведенных выше теорем нам потребуется одно вспомогательное утверждение о существовании исчезающих на бесконечности решений системы дифференциальных уравнений

$$z_i' = f_i(\tau) + p_{i1}(\tau)z_1 + p_{i2}(\tau)z_2 + q_i(\tau)Z_i(\tau, z_1, z_2), \quad i = 1, 2, \tag{2.1}$$

в которой функции f_i, p_{i1}, p_{i2}, $q_i : [\tau_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, непрерывны, а функции Z_i : $[\tau_0, +\infty[\times \mathbb{R}_b^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}_b^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : |z_i| \leq b, \ i = 1, 2\}$, непрерывны, имеют непрерывные частные производные по переменным z_1, z_2 и таковы, что

$$\lim_{(z_1,z_2)\to(0,0)} \frac{\partial Z_i(\tau, z_1, z_2)}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad \tau \in [\tau_0, +\infty[. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Пусть функции* p_{ii}, $i = 1, 2$, *отличны от нуля в некоторой окрестности* $+\infty$ *и таковы, что*

$$\int\limits_{\tau_0}^{+\infty} p_{ii}(\tau)\, d\tau = \pm\infty, \quad i = 1, 2. \tag{2.3}$$

Пусть, кроме того, выполняются условия

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{f_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = 0, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{q_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{12}(\tau)}{p_{11}(\tau)} = \text{const}, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{21}(\tau)}{p_{22}(\tau)} = 0. \tag{2.5}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2.1) имеет хотя бы одно решение (z_1, z_2) : $[\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_1 \geq \tau_0$, *стремящееся к нулю при* $\tau \to +\infty$, *причем таких решений существует целое однопараметрическое семейство в случае, когда одна из функций* p_{ii} *отрицательна в указанной окрестности* $+\infty$, *и двупараметрическое, если они обе в ней отрицательны.*

Справедливость этой леммы непосредственно следует из теоремы 1.3 и замечаний 1.4, 1.5 из работы [7].

Доказательство теоремы 1.1. *Необходимость.* Пусть $y : [t_y, \omega[\to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ — $P_\omega(\lambda_0)$-решение уравнения (1.1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Тогда в силу третьего из условий (1.2) и тождества

$$\frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2} + 1 \tag{2.6}$$

имеем

$$\frac{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2} = \frac{1-\lambda_0}{\lambda_0} + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом первых двух условий (1.2) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{2.7}$$

Поэтому из (1.1) следует, что

$$y'(t) = \alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p(t)y(t)|\ln|y(t)||^\sigma[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

или

$$\frac{y'(t)}{y(t)|\ln|y(t)||^\sigma} = \alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_0 до t, $t_y \le t_0 \le t < \omega$, и учитывая определение $P_\omega(\lambda_0)$-решения, получаем

$$\frac{|\ln|y(t)||^{1-\sigma}\mathrm{sign}\,(\ln|y(t)|)}{1-\sigma} = \alpha_0(\lambda_0 - 1)I_A(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Значит,

$$\mathrm{sign}\,(\ln|y(t)|) = \nu \quad \text{и} \quad \ln|y(t)| = \nu\,|(1-\sigma)(\lambda_0 - 1)I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\,[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.8}$$

где ν определяется формулой (1.5). Подставляя найденное значение $\ln|y(t)|$ в правую часть (1.1) и учитывая тождество

$$\frac{y''(t)}{y(t)} = \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2}\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2,$$

а также предельные соотношения (2.7), имеем

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right)^2 \frac{1}{\pi_\omega^2(t)} = \alpha_0\lambda_0 p(t)\,|(1-\sigma)(\lambda_0 - 1)I_A(t)|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}\,[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из этого асимптотического соотношения непосредственно вытекают условия (1.3). Справедливость асимптотических представлений (1.4) следует из (2.8) и предельных соотношений (2.7).

Достаточность. Предположим, что при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ выполняются условия (1.3). В этом случае уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\ln |y(t)| = \nu \, |(1-\sigma)(\lambda_0 - 1) I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} \, [1 + v_1(\tau)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + v_2(\tau)], \tag{2.9}$$

где

$$\tau = \beta \ln |\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma} \left[\frac{1 + v_2}{h(\tau)} - 1 - v_1 \right], \\ v_2' &= \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} \left[h(\tau) |1 + v_1|^\sigma - \lambda_0 (1 + v_2)^2 + (\lambda_0 - 1)(1 + v_2) \right], \end{aligned} \tag{2.10}$$

в которой

$$q(\tau) = q(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) I_A'(t)}{I_A(t)}, \quad h(\tau) = h(\tau(t)) = \frac{(\lambda_0 - 1)^2}{\alpha_0 \lambda_0} \pi_\omega^2(t) p(t) \, |(1-\sigma)(\lambda_0 - 1) I_A(t)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Выберем произвольным образом число $a_0 \in \,]a, \omega[$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.10) на множестве $[\tau_0, +\infty[\, \times \, \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$, где

$$\tau_0 = \beta \ln |\pi_\omega(a_0)|, \quad \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}} = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |v_i| \le \frac{1}{2}, \; i = 1, 2 \right\}.$$

На этом множестве правые части системы (2.10) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по v_1, v_2. Кроме того, в силу условий (1.3) и вида функций $I_A(t)$, $\tau(t)$

$$\lim_{\tau \to +\infty} h(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h(\tau(t)) = 1, \tag{2.11}$$

$$\int\limits_{\tau_0}^{+\infty} \beta q(\tau) \, d\tau = \int\limits_{a_0}^{\omega} \frac{I_A'(t)}{I_A(t)} \, dt = \ln |I_A(t)| \big|_{a_0}^{\omega} = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad A = a, \\ -\infty, & \text{если} \quad A = \omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

причем функция q сохраняет знак на промежутке $[\tau_0, +\infty[$.

Выделяя в правых частях системы (2.10) линейные части, переписываем ее в виде

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}\left[h(\tau)-1-v_1+h(\tau)v_2\right],\\
v_2' &= \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[h(\tau)-1+\sigma h(\tau)v_1-(\lambda_0+1)v_2+V(\tau,v_1,v_2)\right],
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

где

$$V(\tau,v_1,v_2) = -\lambda_0 v_2^2 + h(\tau)[(1+v_1)^\sigma - 1 - \sigma v_1]. \tag{2.14}$$

Теперь с помощью дополнительного преобразования приведем эту систему к „почти треугольному” виду, допускающему применение леммы 2.1. При этом обратим внимание на то, что

$$q(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t)I_A'(t)}{I_A(t)} = \frac{\nu\lambda_0(1-\sigma)h(\tau(t))}{|(1-\sigma)(\lambda_0-1)I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}},$$

и поэтому в силу условия (2.11) и вида функций $I_A(t), \tau(t)$

$$\lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} q(\tau(t)) = \begin{cases} \infty, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} = 0,\\ 0, & \text{если} \quad \lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} = +\infty. \end{cases} \tag{2.15}$$

Далее, с учетом того, что

$$\sigma \neq 1, \quad \lambda_0 \neq 1, \quad \text{и} \quad (\lambda_0+1)(\sigma-\lambda_0-1) \neq 0, \tag{2.16}$$

рассмотрим каждый из двух возможных случаев.

1. В случае, когда $\lim\limits_{t\uparrow\omega}|I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} = +\infty$, систему уравнений (2.13) с помощью преобразования

$$v_1(\tau) = z_1(\tau), \quad v_2(\tau) = z_2(\tau) + \frac{\sigma z_1(\tau)}{\lambda_0+1} \tag{2.17}$$

приведем к системе дифференциальных уравнений (2.1), где

$$f_1(\tau) = \frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}[h(\tau)-1], \quad f_2(\tau) = \beta\left[\frac{1}{\lambda_0-1} - \frac{\sigma q(\tau)}{(\lambda_0+1)(1-\sigma)}\right][h(\tau)-1],$$

$$q_1(\tau) = 0, \quad q_2(\tau) = \frac{\beta}{\lambda_0-1}, \quad p_{11}(\tau) = \frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}\left[-1+\frac{\sigma h(\tau)}{\lambda_0+1}\right], \quad p_{12}(\tau) = \frac{\beta q(\tau)h(\tau)}{1-\sigma},$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\beta\sigma}{\lambda_0-1}[h(\tau)-1] - \frac{\sigma p_{11}(\tau)}{\lambda_0+1}, \quad p_{22}(\tau) = -\frac{\beta(\lambda_0+1)}{\lambda_0-1} - \frac{\sigma p_{12}(\tau)}{\lambda_0+1},$$

$$Z_1(\tau,z_1,z_2) = 0, \quad Z_2(\tau,z_1,z_2) = V\left(\tau, z_1, z_2 + \frac{\sigma z_1}{\lambda_0+1}\right).$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\lim\limits_{\tau\to+\infty} q(\tau) = 0$, в силу (2.11), (2.12) и (2.14) выполняются условия (2.2) – (2.5). Поэтому на основании леммы 2.1 полученная система дифференциальных уравнений (2.1) имеет хотя бы одно решение $(z_1, z_2) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_1 \geq \tau_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем нетрудно заметить, что при выполнении неравенства $(\sigma - 1 - \lambda_0)(\lambda_0 + 1) < 0$ таких решений будет однопараметрическое семейство. Каждому из них в силу замен переменных (2.17) и (2.9) соответствует решение y дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее при $t \uparrow \omega$ асимптотическим соотношениям (1.4).

2. В случае, когда $\lim\limits_{t\uparrow\omega} |I_A(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}} = 0$, к системе дифференциальных уравнений (2.13) применим преобразование

$$v_1(\tau) = z_2(\tau) + z_1(\tau), \quad v_2(\tau) = z_1(\tau). \tag{2.18}$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений вида (2.1), в которой

$$f_1(\tau) = \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}[h(\tau) - 1], \quad f_2(\tau) = \frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}[h(\tau) - 1] - f_1(\tau), \quad q_1(\tau) = \frac{\beta}{\lambda_0 - 1},$$

$$q_2(\tau) = -q_1(\tau), \quad p_{11}(\tau) = \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}[\sigma h(\tau) - \lambda_0 - 1], \quad p_{12}(\tau) = \frac{\beta\sigma h(\tau)}{\lambda_0 - 1},$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma}[h(\tau) - 1] - p_{11}(\tau), \quad p_{22}(\tau) = -\frac{\beta q(\tau)}{1-\sigma} - p_{12}(\tau),$$

$$Z_1(\tau, z_1, z_2) = \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} V(\tau, z_2 + z_1, z_1), \quad Z_2(\tau, z_1, z_2) = -\frac{\beta}{1-\lambda_0} V(\tau, z_2 + z_1, z_1).$$

Поскольку в данном случае $\lim\limits_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \infty$, в силу (2.11), (2.12) и (2.14) выполняются условия (2.2) – (2.5). Значит, для полученной системы дифференциальных уравнений (2.1) выполнены все условия леммы 2.1. Согласно этой лемме система имеет хотя бы одно решение $(z_1, z_2) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_1 \geq \tau_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем таких решений будет однопараметрическое семейство, если $\operatorname{sign}[(\sigma - 1 - \lambda_0)(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)] < 0$. Каждому такому решению вследствие замен переменных (2.18) и (2.9) соответствует решение y дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее при $t \uparrow \omega$ асимптотическим соотношениям (1.4).

Установив существование решений уравнения (1.1), допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.4), нетрудно проверить, с учетом условий (1.3), что каждое из них является $P_\omega(\lambda_0)$-решением.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. *Необходимость.* Пусть $y : [t_y, \omega[\to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ — $P_\omega(1)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда в силу условий (1.2), где $\lambda_0 = 1$, с учетом тождества (2.6) получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \infty. \tag{2.19}$$

Кроме того, из (1.2) следует, что $y''(t) \sim \dfrac{[y'(t)]^2}{y(t)}$ при $t \uparrow \omega$, и поэтому согласно (1.1)

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 = \alpha_0 p(t) |\ln|y(t)||^\sigma [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда вытекают первое из условий (1.7) и асимптотическое соотношение

$$\frac{y'(t)}{y(t)|\ln|y(t)||^{\frac{\sigma}{2}}} = \pm p^{\frac{1}{2}}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.20}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_y до t, $t \in \,]t_y, \omega[$, и учитывая, что $\sigma \neq 2$ и выполняется первое из условий (1.2), получаем

$$|\ln|y(t)||^{\frac{2-\sigma}{2}} \operatorname{sign}(\ln|y(t)|) = \pm\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sign}(\ln|y(t)|) = \pm\mu,$$

где μ определяется формулой (1.9), и

$$\ln|y(t)| = \pm\mu \left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{2}{2-\sigma}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

т. е. имеет место первое из асимптотических соотношений (1.8). Учитывая его, из (2.20) получаем второе из асимптотических представлений (1.8). В силу этого представления и первого из условий (2.19) выполняется второе из условий (1.7).

Достаточность. Предположим, что функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ непрерывно дифференцируема, существует конечный или равный $\pm\infty$ предел (1.6) и выполняются условия (1.7). В этом случае, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\ln|y(t)| = \pm\mu \left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{2}{2-\sigma}} [1 + v_1(\tau)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \pm p^{\frac{1}{2}}(t) \left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}} [1 + v_2(\tau)], \tag{2.21}$$

$$\tau = \beta \ln|J_B(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad B = a, \\ -1, & \text{если} \quad B = \omega, \end{cases}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{2\beta}{2-\sigma}(v_2 - v_1), \\ v_2' &= \pm\frac{2\beta\mu q(\tau)}{2-\sigma} \left[|1 + v_1|^\sigma - (1 + v_2)^2 \mp h(\tau)(1 + v_2)\right], \end{aligned} \tag{2.22}$$

в которой

$$q(\tau) = q(\tau(t)) = \left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{2}{2-\sigma}}, \quad h(\tau) = h(\tau(t)) = \frac{\left(p^{\frac{1}{2}}(t)\left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}\right)'}{p(t)\left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{2\sigma}{2-\sigma}}}.$$

Выберем произвольным образом число $a_0 \in]a, \omega[$. Поскольку выполняется второе из условий (1.7), то

$$\int_{a_0}^{\omega} p^{\frac{1}{2}}(t)\,|J_B(t)|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}\, dt = +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} |J_B(t)|^{\frac{2}{2-\sigma}} = +\infty.$$

Поэтому с учетом вида функции $\tau(t)$ имеем

$$\lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} q(\tau(t)) = +\infty. \tag{2.23}$$

Далее, покажем, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} h(\tau(t)) = 0$.

В силу условий теоремы $\lim\limits_{t\uparrow\omega} h(\tau(t))$ существует (конечный или равный $\pm\infty$). Допустим, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} h(\tau(t)) = \begin{cases} \text{либо } \mathrm{const} \neq 0, \\ \text{либо } \pm\infty. \end{cases} \tag{2.24}$$

Интегрируя функцию $h(\tau(t))$ на промежутке от a_0 до t, $t \in]a_0, \omega[$, получаем

$$\int_{a_0}^{t} h(\tau(t))\, dt = -\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}(t)\left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}} + C, \tag{2.25}$$

где C — некоторая постоянная.

Если $\omega = +\infty$, то $\pi_\omega(t) = t$, и в этом случае в силу второго из условий (1.7)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{a_0}^{t} h(\tau(t))\, dt}{t} = 0.$$

Однако это невозможно, поскольку в силу правила Лопиталя и (2.24)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_{a_0}^{t} h(\tau(t))\, dt}{t} = \lim_{t\to+\infty} h(\tau(t)) \neq 0.$$

Если же $\omega < \infty$, то $\pi_\omega(t) = t - \omega$, и в силу второго из условий (1.7)

$$\lim_{t\uparrow\omega} p^{\frac{1}{2}}(t)\left|\frac{2-\sigma}{2} J_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}} = +\infty.$$

Поэтому из (2.25) следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\int\limits_{a_0}^{t} h(\tau(t))\,dt = C.$$

В силу этого условия равенство (2.25) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\omega}^{t} h(\tau(t))\,dt = -\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}(t)\left|\frac{2-\sigma}{2}J_B(t)\right|^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}}.$$

Разделив это соотношение на $\pi_\omega(t)$ и перейдя к пределу при $t\uparrow\omega$, с учетом второго из условий (1.7) получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\int_\omega^t h(\tau(t))\,dt}{t-\omega} = 0.$$

Однако это также невозможно, поскольку предел, стоящий слева, в силу правила Лопиталя и (2.24) отличен от нуля.

Следовательно, предположение о том, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} h(\tau(t)) \neq 0$, было неверным. Значит,

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega} h(\tau(t)) = 0. \tag{2.26}$$

Установив условия (2.23) и (2.26), рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.22) на множестве

$$[\tau_0,+\infty[\times\mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad \tau_0 = \beta\ln|J_B(a_0)|, \quad \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |v_i|\le\frac{1}{2},\ i=1,2\right\}.$$

На этом множестве правые части данной системы непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным v_1, v_2.

Выделив во втором уравнении системы (2.22) линейную часть, перепишем ее в виде

$$v_1' = \frac{2\beta}{2-\sigma}(v_2-v_1),$$

$$v_2' = \pm\frac{2\beta\mu q(\tau)}{2-\sigma}\left[\mp h(\tau)+\sigma v_1+(-2\mp h(\tau))v_2+V(v_1,v_2)\right],$$

где

$$V(v_1,v_2) = (1+v_1)^\sigma - 1 - \sigma v_1 - v_2^2. \tag{2.27}$$

Теперь, применив к этой системе дополнительное преобразование

$$v_1(\tau) = z_1(\tau), \quad v_2(\tau) = z_2(\tau)+\frac{\sigma z_1(\tau)}{2}, \tag{2.28}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида (2.1), где

$$f_1(\tau) = 0, \quad f_2(\tau) = -\frac{2\beta\mu q(\tau)}{2-\sigma}h(\tau), \quad q_1(\tau) = 0, \quad q_2(\tau) = \pm\frac{2\beta\mu}{2-\sigma}q(\tau),$$

$$p_{11}(\tau) = -\beta, \quad p_{12}(\tau) = \frac{2\beta}{2-\sigma}, \quad p_{21}(\tau) = -\frac{\beta\mu\sigma q(\tau)}{2-\sigma} + \frac{\beta\sigma}{2},$$

$$p_{22}(\tau) = \pm\frac{2\beta\mu q(\tau)}{2-\sigma}[\sigma-2\mp h(\tau)] - \frac{\beta\sigma}{2-\sigma}, \quad Z_1(\tau, z_1, z_2) = 0, \quad Z_2(\tau, z_1, z_2) = V\left(z_1, z_2 + \frac{\sigma}{2}z_1\right).$$

Для этой системы дифференциальных уравнений в силу (2.23), (2.26) и (2.27) выполняются условия (2.2) – (2.5). Поэтому согласно лемме 2.1 данная система имеет хотя бы одно решение $(z_1, z_2) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_1 \geq \tau_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, которому в силу замен (2.28) и (2.21) соответствует решение $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in [a_0, \omega[$, дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.8). Учитывая эти представления, убеждаемся в том, что данное решение уравнения (1.1) является $P_\omega(1)$-решением.

Теорема доказана.

1. *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* Asymptotic representations of solutions of non-linear second order differential equations // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. — 2003. — **30**. — P. 153 – 158.
2. *Кирилова Л. О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена – Фаулера // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 228. — С. 30 – 35.
3. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 8. — С. 1053 – 1061.
4. *Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 1. — С. 18 – 28.
5. *Hartman P.* Ordinary differential equations. — New York; London; Sydney, 1964. — 612 p.
6. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
7. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 433 – 444.

Получено 26.04.07