УДК 517.9

СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

І. М. Грод

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: grod@mail.tnpu.edu.ua

We find sufficient conditions for existence of solutions bounded on $\mathbb{R}$ *for the equations* $\dfrac{dx}{dt} = F(t,x)x + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *on a finite dimensional Banach space* $\mathbb{E}$.

Установлены достаточные условия существования огрниченных на $\mathbb{R}$ *решений уравнения* $\dfrac{dx}{dt} = F(t,x)x + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *в конечномерном банаховом пространстве* $\mathbb{E}$.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{E}$ — скінченновимірний банахів простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$, $\mathbb{C}^0$ — банахів простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями у просторі $\mathbb{E}$ з нормою $\|x\|_{\mathbb{C}^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathbb{E}}$ і $\mathbb{C}^1$ — банахів простір усіх тих функцій $x \in \mathbb{C}^0$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt} \in \mathbb{C}^0$, з нормою $\|x\|_{\mathbb{C}^1} = \max\left\{\|x\|_{\mathbb{C}^0}, \left\|\dfrac{dx}{dt}\right\|_{\mathbb{C}^0}\right\}$.

Позначимо через $F(t,x)$ визначену і неперервну на $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ функцію зі значеннями в $L(\mathbb{E},\mathbb{E})$ ($L(\mathbb{E},\mathbb{E})$ — банахів простір усіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathbb{E}$).

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \in \mathbb{C}^0. \tag{1}$$

Для рівняння (1) важливою є задача про існування у просторі $\mathbb{C}^1$ розв'язків для кожної функції $f \in \mathbb{C}^0$.

Наведемо достатні умови існування хоча б одного розв'язку $x \in \mathbb{C}^1$ рівняння (1), якщо $f \in \mathbb{C}^0$.

2. Основний результат. Припустимо, що рівняння (1) таке, що:

1) $F(t,x)$ неперервно залежить від $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ і

$$\lim_{u-v\to 0} \sup_{t\in\mathbb{R},\ \|u\|_{\mathbb{E}}\leqslant r,\ \|v\|_{\mathbb{E}}\leqslant r} \big\|F(t,u) - F(t,v)\big\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})} = 0$$

для кожного $r > 0$;

2) для кожного $r > 0$

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times B[0,r]} \|F(t,x)\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})} < \infty,$$

де $B[0,r] = \big\{x \in \mathbb{E}\colon \|x\|_{\mathbb{E}} \leq r\big\}$ — замкнена куля з радіусом r.

Для подальших досліджень уведемо до розгляду оператори $L\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ і $L_y\colon \mathbb{C}^1 \to \to \mathbb{C}^0$, $y \in \mathbb{C}^0$, що визначаються рівностями

$$(Lx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - F\left(t, x(t)\right) x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(L_y x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - F\left(t, y(t)\right) x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}^1$.

Зауважимо, що завдяки неперервності $F(t,x)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$ задані оператори L, L_y є неперервними і обмеженими на $\mathbb{C}^1$. Крім цього, оператор L_y є лінійним оператором при кожному фіксованому $y \in \mathbb{C}^0$. Позначимо через $R(L)$, $R(L_y)$ відповідно множини значень операторів L, L_y. Зрозуміло, що рівняння (1) для кожного $f \in \mathbb{C}^0$ має хоча б один розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$R(L) = \mathbb{C}^0. \tag{2}$$

Вимагатимемо, щоб для оператора $(L_y x)$ виконувались умови:

3) для кожного $y \in \mathbb{C}^0$ оператор $L_y\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ має обернений неперервний $(L_y)^{-1} : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$;

4) $\sup_{y \in \mathbb{C}^0} \left\|(L_y)^{-1}\right\|_{L(\mathbb{C}^0, \mathbb{C}^1)} < +\infty$.

Сформулюємо основну теорему.

Теорема 1. *Нехай функція $F(t,x)$ така, що виконуються умови 1 – 4.*

Тоді для кожної функції $f \in \mathbb{C}^0$ диференціальне рівняння (1) має хоча б один розв'язок $x \in \mathbb{C}^1$.

3. Допоміжні твердження. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = F(t, y(t))x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

де $y = y(t)$ — довільний елемент простору $\mathbb{C}^0$. Оскільки це рівняння є лінійним, до нього можна застосовувати теорію, викладену, наприклад, у роботах [1 – 3]. Завдяки припущенню 3 єдиний розв'язок $x \in \mathbb{C}^1$ рівняння (3), що відповідає функції $f \in \mathbb{C}^0$, зображується за допомогою оператора $(L_y)^{-1}$ у вигляді

$$x = (L_y)^{-1} f. \tag{4}$$

Далі, вважаючи, що функцію $f \in \mathbb{C}^0$ зафіксовано, розглянемо відображення $\mathcal{U}_f\colon \mathbb{C}^0 \to \to \mathbb{C}^0$, яке кожному елементу $y \in \mathbb{C}^0$ ставить у відповідність елемент $(L_y)^{-1} f$ цього ж простору. Це відображення, очевидно, визначається рівністю

$$\mathcal{U}_f = (L_y)^{-1} f, \tag{5}$$

де $y \in \mathbb{C}^0$.

Наведемо деякі властивості відображення $\mathcal{U}_f$, $f \in \mathbb{C}^0$.

Лема 1. *Оператор* $\mathcal{U}_f\colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ *є неперервним для кожного* $f \in \mathbb{C}^0$.

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи $y = y(t)$ і $z = z(t)$ простору $\mathbb{C}^0$ і розглянемо диференціальні рівняння

$$\frac{dx}{dt} = F\big(t, y(t)\big)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dx}{dt} = F\big(t, z(t)\big)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Нехай $x_y = x_y(t)$ і $x_z = x_z(t)$ — відповідні розв'язки цих рівнянь, тобто

$$\frac{dx_y(t)}{dt} \equiv F\big(t, y(t)\big)x_y(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dx_z(t)}{dt} \equiv F\big(t, z(t)\big)x_z(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Тоді

$$x_y = (L_y)^{-1} f = \mathcal{U}_f y \tag{7}$$

і

$$x_z = (L_z)^{-1} f = \mathcal{U}_f z. \tag{8}$$

Подамо (6) у вигляді

$$\frac{dx_z(t)}{dt} - F\big(t, y(t)\big)x_z(t) \equiv \Big[F\left(t, z(t)\right) - F\left(t, y(t)\right)\Big]x_z(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси отримуємо

$$x_z = (L_y)^{-1}\left(B_{z,y}x_z + f\right) = (L_y)^{-1} f + (L_y)^{-1} B_{z,y} x_z = (L_y)^{-1} f + (L_y)^{-1} B_{z,y} (L_z)^{-1} f,$$

де $B_{z,y}x_z$ визначається рівністю

$$\left(B_{z,y}w\right)(t) = \left[F\left(t, z(t)\right) - F\left(t, y(t)\right)\right] w(t).$$

Отже, на підставі (7) та (8) має місце рівність

$$\mathcal{U}_f z - \mathcal{U}_f y = (L_y)^{-1} B_{z,y} \mathcal{U}_f z. \tag{9}$$

Далі, розглянемо довільну послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$ елементів y_n, $n \geq 1$, простору $\mathbb{C}^0$, для якої

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_{\mathbb{C}^0} = 0. \tag{10}$$

Використовуючи рівність (9), отримуємо

$$\mathcal{U}_f y_n - \mathcal{U}_f y = (L_y)^{-1} B_{y_n,y} \mathcal{U}_f y_n \tag{11}$$

для всіх $n \geq 1$.

Тоді, згідно з (10), враховуючи припущення 4 та рівність (5), можемо стверджувати, що існує число $a > 0$ таке, що

$$\sup_{n \geqslant 0} \|\mathcal{U}_f y_n\|_{\mathbb{C}^0} \leqslant a.$$

Оскільки, до того ж,

$$\begin{aligned}\|[F(t,y_n) - F(t,y)]\,\mathcal{U}_f y_n\|_{\mathbb{C}^0} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|[F(t,y_n(t)) - F(t,y(t))]\,(\mathcal{U}_f y_n)(t)\|_{\mathbb{E}} \leqslant \\ &\leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t,y_n(t)) - F(t,y(t))\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})} \|\mathcal{U}_f y_n\|_{\mathbb{C}^0} \leqslant \\ &\leqslant a \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t,y_n(t)) - F(t,y(t))\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})}, \quad n \geqslant 1,\end{aligned}$$

операторна функція $F(t,x)$ є неперервною на $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, а банахів простір $\mathbb{E}$ — скінченновимірним, то завдяки (10)

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t,y_n(t)) - F(t,y(t))\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})} = 0.$$

Таким чином, на підставі умови 4

$$\lim_{n \to \infty} \|B_{y_n,y} \mathcal{U}_f y_n\|_{\mathbb{C}^0} = 0$$

і

$$\lim_{n \to \infty} \left\|(L_y)^{-1} B_{y_n,y} \mathcal{U}_f y_n\right\|_{\mathbb{C}^0} = 0.$$

Звідси та з (11) отримуємо

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathcal{U}_f y_n - \mathcal{U}_f y\|_{\mathbb{C}^0} = 0 \tag{12}$$

Отже, якщо виконується співвідношення (10), то має місце також рівність (12). Це означає, що відображення $\mathcal{U}_f \colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ є неперервним у точці $y \in \mathbb{C}^0$. Оскільки точку $y \in \mathbb{C}^0$ було вибрано довільно, то $\mathcal{U}_f$ є неперервним на $\mathbb{C}^0$ для кожного $f \in \mathbb{C}^0$.

Лему 1 доведено.

Далі зауважимо, що за припущенням 4 існує деяке скінченне число d таке, що

$$d = \sup_{y \in \mathbb{C}^0} \left\|(L_y)^{-1}\right\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)}.$$

Завдяки цьому запишемо співвідношення

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{\mathbb{C}^0} = \left\|(Ly)^{-1} f\right\|_{\mathbb{C}^0} \leqslant \left\|(Ly)^{-1}\right\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)} \|f\|_{\mathbb{C}^0} \leqslant d\,\|f\|_{\mathbb{C}^0},$$

яке справджується для всіх $y \in \mathbb{C}^0$ та $f \in \mathbb{C}^0$ на підставі рівності (5).

Має місце наступне твердження.

Лема 2. *Замкнена куля* $\mathbb{B}\big[0, d\|f\|_{\mathbb{C}^0}\big]$ *($d\|f\|_{\mathbb{C}^0}$ — радіус цієї кулі) є інваріантною по відношенню до оператора* $\mathcal{U}_f$, *тобто*

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{\mathbb{C}^0} \leq d\|f\|_{\mathbb{C}^0},$$

якщо $y \leq d\|f\|_{\mathbb{C}^0}$.

Зауваження. Оператору $\mathcal{U}_f$, як показують приклади [4], може не бути на замкненій кулі $\mathbb{B}\big[0, d\|f\|_{\mathbb{C}^0}\big]$ цілком неперервним, а тому до цього оператора не можна застосувати теорему Шаудера про нерухому точку [5].

Тепер наведемо деякі необхідні нам означення.

Означення 1. *Послідовність* $x_k \in \mathbb{C}^1$, $k \in \mathbb{N}$, *називають локально збіжною до елемента* $x \in \mathbb{C}^1$ *при* $k \to \infty$, *якщо ця послідовність обмежена і*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|t|\leqslant p} \big|x_k(t) - x(t)\big| = 0$$

для кожного $p \in \mathbb{N}$.

Означення 2. *Оператор* $G\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ *називають с-неперервним, якщо для довільних функцій* $y \in \mathbb{C}^1$ *і* $y_k \in \mathbb{C}^1$, $k \in \mathbb{N}$, *для яких*

$$y_k \xrightarrow{\textit{лок.},\ \mathbb{C}^0} y \quad \textit{при} \quad k \to \infty,$$

$$Gy_k \xrightarrow{\textit{лок.},\ \mathbb{C}^0} Gy$$

при $k \to \infty$.

Відмітимо, що поняття c-неперервності оператора у просторі $\mathbb{C}^0$ на мові „ϵ, δ" було введено Е. Мухамадієвим [6], а розглянуте вище означення дано в роботі [7].

Лема 3. *Відображення* $\mathcal{U}_f\colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$, $f \in \mathbb{C}^0$, *є с-неперервним.*

Доведення. Зауважимо, що завдяки c-неперервності оператора L_y та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$ оператор $(L_y)^{-1}\colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$ є c-неперервним [6–9].

Далі розглянемо довільні $y \in \mathbb{C}^0$ і послідовність $y_k \in \mathbb{C}^0$, $k \in \mathbb{N}$, для якої

$$y_k \xrightarrow{\text{лок.},\ \mathbb{C}^0} y \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{13}$$

Нехай $x_y \in \mathbb{C}^1$ і $x_{y_k} \in \mathbb{C}^1$, $k \in \mathbb{N}$, — такі функції, що

$$\frac{dx_y}{dt} \equiv F\big(t, y(t)\big)x_y(t) + f(t) \tag{14}$$

і

$$\frac{dx_{y_k}}{dt} \equiv F\big(t, y_k(t)\big)x_{y_k}(t) + f(t).$$

Подамо друге з цих співвідношень у вигляді

$$\frac{dx_{y_k}}{dt} \equiv F\big(t, y(t)\big)x_{y_k}(t) + \big[F(t, y_k(t)) - F(t, y(t))\big]x_{y_k}(t) + f(t). \tag{15}$$

Згідно з припущеннями 3 і 4, а також (18), (19) отримуємо

$$x_y = (L_y)^{-1}f$$

і

$$x_{y_k} = (L_y)^{-1}(f + B_{y_k,y}x_{y_k}), \quad k \geq 1.$$

На підставі (5) та леми 2 послідовність $(x_{y_k})_{k\geq 1}$ є обмеженою. Тому завдяки (15), умові неперервності $F(t, x)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$

$$B_{y_k,y}x_{y_k} \xrightarrow{\text{лок., } \mathbb{C}^0} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тому

$$f + B_{y_k,y}x_{y_k} \xrightarrow{\text{лок., } \mathbb{C}^0} f \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Звідси з урахуванням c-неперервності оператора $(L_y)^{-1} \colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$ отримуємо

$$x_{y_k} \xrightarrow{\text{лок., } \mathbb{C}^0} x_y \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Оскільки на підставі (5)

$$x_y = \mathcal{U}_f y = (L_y)^{-1}f$$

і

$$x_{y_k} = \mathcal{U}_f y_k = (L_{y_k})^{-1}f, \quad r \geq 1,$$

то

$$\mathcal{U}_f y_k \xrightarrow{\text{лок., } \mathbb{C}^0} \mathcal{U}_f y \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

що й доводить лему 3.

Лема 4. *Відображення* $\mathcal{U}_f \colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$, $f \in \mathbb{C}^0$, *є c-цілком неперервним.*

Справді, завдяки умові 3 та рівності (5) виконується не тільки нерівність

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{\mathbb{C}^0} \leq d\|f\|_{\mathbb{C}^0}$$

для всіх $y \in \mathbb{C}^0$ та $f \in \mathbb{C}^0$, а й нерівність

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{\mathbb{C}^1} \leq d\|f\|_{\mathbb{C}^0}, \quad y, f \in \mathbb{C}^0.$$

Тому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \frac{d(\mathcal{U}_f y)(t)}{dt} \right\| \leqslant d\,\|f\|_{\mathbb{C}^0}$$

для довільної функції $y \in \mathbb{C}^0$.

Аналіз останніх нерівностей показує, що множина

$$\left\{(\mathcal{U}_f y)|_{[a,b]} \colon y \in \mathbb{C}^0\right\}$$

є обмеженою й одностайно неперервною в $\mathbb{C}^0[a,b]$ для довільних $a, b \in \mathbb{R}$. А це означає, що дана множина є передкомпактною в $\mathbb{C}^0[a,b]$ (теорема Арцела [5]). Тут $z|_{[a,b]}$ — звуження функції $z = z(t)$ на відрізок $[a,b]$, $a < b$.

Звідси, з урахуванням c-неперервності відображення $\mathcal{U}_f \colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$, $f \in \mathbb{C}^0$, випливає, що ці відображення є c-цілком неперервними.

Лему 4 доведено.

4. Доведення основної теореми. Завдяки (4) і (5) зрозуміло, що кожна нерухома точка відображення $\mathcal{U}$ є обмеженим розв'язком рівняння (1).

З іншого боку, беручи до уваги доведені леми, можна переконатися в тому, що з того, що куля $B[0,r]$ є інваріантною по відношенню до c-цілком неперервного оператора $\mathcal{U}_f \colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$, тобто $\mathcal{U}_f B[0,r] \subset B[0,r]$, випливає існування непорожньої множини нерухомих точок відображення $\mathcal{U}_f$ в $B[0,r]$, тобто має місце теорема 1.

5. Стійкість розв'язків у просторі $\mathbb{C}^0$ рівняння (1) до малих збурень. Розглянемо збурене диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \big(F(t,x) + B(t,x)\big)x + f(t), \tag{16}$$

де $B(t,x)$ — деяка достатньо мала за нормою функція, визначена і неперервна на $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ зі значеннями в $L(\mathbb{R} \times \mathbb{E})$.

Тоді має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай у рівнянні (16) функція $F(t,x)$ така, що виконуються умови теореми 1. Тоді існує достатньо мале $\varepsilon_0 > 0$ таке, що диференціальне рівняння (16) має хоча б один розв'язок $x \in \mathbb{C}^1$ для кожної функції $f \in \mathbb{C}^0$, якщо $\|B(t,x)\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})} \leq \varepsilon_0$.*

Доведення. Введемо до розгляду допоміжний оператор

$$(L_{y,B})x = \frac{dx}{dt} - F\big(t, y(t)\big)x - B\big(t, y(t)\big)x.$$

Для кожного $y \in \mathbb{C}^0$, позначивши $(Bx)(t) = B\big(t, x(t)\big)x(t)$, отримаємо

$$(L_y)^{-1} L_{y,B} = (L_y)^{-1}(L_y - B) = I - (L_y)^{-1}B. \tag{17}$$

Зрозуміло, що якщо ε_0 — досить мале число, то можемо вважати, що знайдеться таке число $\alpha < 1$, для якого

$$\big\|(L_y)^{-1}B\big\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)} \leq \alpha. \tag{18}$$

А тому для оператора $I-(L_y)^{-1}B$ існує обернений неперервний оператор. Це дає можливість з урахуванням (17) записати

$$(L_{y,B})^{-1}L_y = \big(I-(L_y)^{-1}B\big)^{-1},$$

або

$$(L_{y,B})^{-1} = \big(I-(L_y)^{-1}B\big)^{-1}(L_y)^{-1}.$$

Далі, враховуючи нерівність (18), маємо

$$\big\|(L_{y,B})^{-1}\big\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)} \le \sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Таким чином, має місце оцінка

$$\big\|(L_{y,B})^{-1}\big\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)} \le \frac{1}{1-\alpha}\big\|(L_y)^{-1}\big\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)} \le b,$$

де b — деяке скінченне число.

Виконання останньої нерівності, з урахуванням доведення основної теореми, дає підстави стверджувати, що теорема 2 є справедливою.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 535 с.
3. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.
4. *Грод І. М.* Умови існування обмежених розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 3. — С. 317 – 325.
5. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1997. — 232 с.
6. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних операторів. — Рівне: Вид-во Рівн. техн. ун-ту, 2002. — 240 с.
8. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 2. — С. 201 – 205.
9. *Слюсарчук В. Е.* $\mathcal{P}$-непрерывные операторы и их применение к решению задач математической физики // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. — Вип. 15. — С. 188 – 226.

Одержано 23.08.06,
після доопрацювання — 20.04.07