УДК 517.9

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ*

О. А. Бойчук, О. О. Покутний

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua
lenasas@gmail.com

For a weakly nonlinear differential equation in a Banach space, we find necessary and sufficient conditions for existence of solutions that are bounded on the whole real axis with the assumption that the generating equation has bounded solutions and homogeneous equation admits exponential dichotomy on the half-axes.

Получены необходимое и достаточное условия существования ограниченных на всей действительной оси решений слабонелинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в предположении, что порождающее уравнение имеет ограниченные решения, а соответствующее однородное уравнение допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях.

Постановка задачі. У банаховому просторі $\mathbf{B}$ розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + \varepsilon Z(x, t, \varepsilon) + f(t), \tag{1}$$

яке при $\varepsilon = 0$ перетворюється в породжуюче рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{2}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з $\mathbb{R}$ у банахів простір $\mathbf{B}$,

$$f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) := \{f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbf{B}, f(\cdot) \in C(\mathbb{R}),\ |||f||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty\},$$

$BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ — банахів простір неперервних й обмежених на $\mathbb{R}$ функцій, оператор-функція $A(t)$ сильно неперервна [1, с. 141], $|||A||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| < \infty$, а розв'язок $x(t)$ рівняння

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + f(s) + \varepsilon\, Z(x(s,\varepsilon), s, \varepsilon))\, ds$$

неперервно диференційовний у кожній точці $t \in \mathbb{R}$ і задовольняє рівняння (1) скрізь. Обмежений розв'язок $x(t, \varepsilon)$ рівняння (1) будемо шукати у банаховому просторі $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (№ 14.1/007).

неперервно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, обмежених зі своєю похідною. Знайдемо умови існування обмежених на всій осі розв'язків рівняння у припущенні, що відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t) \tag{3}$$

є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}_-$, тобто [1, с. 236] існують проектори $P\,(P^2 = P)$ і $Q\,(Q^2 = Q)$, константи $K_{1,2} \geq 1$, $\alpha_{1,2} > 0$ такі, що мають місце оцінки

$$\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\|U(t)(E-P)U^{-1}(s)\| \leq K_1 e^{\alpha_1(t-s)}, \quad s \geq t, \quad \text{для всіх} \quad t, s \in \mathbb{R}_+,$$

$$\|U(t)QU^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\|U(t)(E-Q)U^{-1}(s)\| \leq K_2 e^{\alpha_2(t-s)}, \quad s \geq t, \quad \text{для всіх} \quad t, s \in \mathbb{R}_-.$$

Тут $U(t) = U(t,0)$ — еволюційний оператор [1, с. 145] диференціального рівняння (3) такий, що

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = E \; - \; \text{одиничний оператор.}$$

У випадку скінченновимірних просторів, коли $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$, цю проблему вирішено в роботі [2]. В роботі [3] анонсовано наступний результат.

Теорема 1. *Нехай однорідне рівняння (3) допускає експоненціальну дихотомію на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P та Q відповідно. Якщо оператор*

$$D = P - (E - Q) : B \to B \tag{4}$$

є узагальнено-оборотним [4], то:

1) для того щоб існували обмежені на всій дійсній осі розв'язки рівняння (2), необхідно і достатньо, щоб вектор-функція $f(t) \in BC(\mathbb{R}, B)$ задовольняла умову

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0; \tag{5}$$

2) при умові (5) обмежені на всій осі розв'язки рівняння (2) мають вигляд

$$x_0(t,c) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t) \quad \forall c \in B, \tag{6}$$

де

$$(G[f])(t) = U(t) \begin{cases} \int_0^t PU^{-1}(s)f(s)\,ds - \int_t^{\infty}(E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds+ \\ \qquad +PD^{-}\Big[\int_0^{\infty}(E-P)U^{-1}(s)f(s)\,ds+ \\ \qquad + \int_{-\infty}^{0} QU^{-1}(s)f(s)ds\Big], \;\; t \geq 0, \\ \int_{-\infty}^{t} QU^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^{0}(E-Q)U^{-1}(s)f(s)\,ds+ \\ \qquad +(E-Q)D^{-}\Big[\int_0^{\infty}(E-P)U^{-1}(s)f(s)ds+ \\ \qquad + \int_{-\infty}^{0} QU^{-1}(s)f(s)ds\Big], \;\; t \leq 0, \end{cases}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі $\mathbb{R}$ розв'язки,

$$H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}QU^{-1}(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}(E-P)U^{-1}(t),$$

D^{-} — узагальнено-обернений оператор до оператора D [4], $\mathcal{P}_{N(D)} = E - D^{-}D$ та $\mathcal{P}_{N(D^*)} = E - DD^{-}$.

Будемо шукати такий розв'язок $x(t,\varepsilon)$ рівняння (1), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків $x(t,0) = x_0(t,c)$ породжуючого рівняння (2).

Основний результат. Знайдемо спочатку необхідну умову існування обмеженого розв'язку рівняння (1). Для того щоб отримати необхідну умову на оператор $Z(x,t,\varepsilon)$, потрібно накласти такі обмеження:

$$Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C[\|x - x_0\| \leq q], \quad Z(x,\cdot,\varepsilon) \in BC(\mathbb{R},\mathbf{B}), \quad Z(x,t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

де q — деяка додатна стала.

Покажемо, що цю задачу можна розв'язати за допомогою операторного рівняння, що (у випадку класичної періодичної задачі) є аналогом так званого рівняння для породжуючих амплітуд:

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c),t,0)dt = 0. \tag{7}$$

Теорема 2 (необхідна умова існування). *Нехай однорідне рівняння (3) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ і $\mathbb{R}_-$ із проекторами P і Q відповідно, а нелінійне рівняння (1) має обмежений розв'язок $x(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(\mathbb{R},\mathbf{B})$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків із константою $c = c^0 : x(t,0) = x_0(t,c^0)$. Тоді ця константа повинна задовольняти операторне рівняння (7).*

Доведення. Якщо рівняння (1) має обмежені розв'язки $x(t, \varepsilon)$, то, згідно з теоремою 1, повинна виконуватись умова розв'язності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{f(t) + \varepsilon Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt = 0. \tag{8}$$

Враховуючи умову (5), маємо $\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt = 0$. Оскільки $\varepsilon \neq 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) Z(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\, dt = 0.$$

При $\varepsilon \to 0$ $x(t, \varepsilon)$ прямує до $x_0(t, c^0)$. Остаточно (враховуючи неперервність оператор-функції $Z(x, t, \varepsilon)$), отримуємо

$$F(c^0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) Z(x_0(t, c^0), t, 0) dt = 0,$$

що й доводить теорему.

Для отримання достатньої умови існування обмежених розв'язків рівняння (1) будемо вимагати, щоб оператор-функція $Z(x, t, \varepsilon)$ була диференційовною за Фреше в околі породжуючого розв'язку ($Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \leq q]$).

Цю задачу можна розв'язати за допомогою оператора

$$B_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, A_1(t) U(t) P P_{N(D)} dt \;:\; \mathbf{B} \;\to\; \mathbf{B},$$

де $A_1(t) = Z^{(1)}(v, t, \varepsilon)|_{v = x_0; \varepsilon = 0}$ (похідна розуміється в сенсі Фреше).

Теорема 3 (достатня умова існування). *Нехай однорідне рівняння (3) є експоненціально-дихотомічним на півосях $\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}_-$ з проекторами P та Q відповідно, а рівняння (2) має обмежені розв'язки у вигляді (6).*

Припустимо, що оператор B_0 задовольняє умови:

1) має узагальнено-обернений;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(D^*)} Q = 0$.

Тоді для будь-якого елемента $c = c^0 \in \mathbf{B}$, який задовольняє рівняння (7), існує принаймні один обмежений розв'язок рівняння (1). Цей розв'язок можна знайти за допомогою ітераційного процесу

$$\overline{y}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0(\tau, c^0) + y_k, \tau, \varepsilon)](t),$$

$$c_k = -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\tau)\{A_1(\tau) \overline{y}_k(\tau, \varepsilon) + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\} d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = U(t)PP_{N(D)}c_k + \overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Доведення. В рівнянні (1) виконаємо заміну змінних $x(t,\varepsilon) = x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon)$, де константа c^0 задовольняє операторне рівняння (7). Тоді відносно y отримаємо рівняння

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + \varepsilon Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{9}$$

Потрібно знайти обмежений розв'язок $y(t,\varepsilon)\ :\ y(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(\mathbb{R},\mathbf{B})$, $y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$. Рівняння (9), очевидно, еквівалентне рівнянню (1). Запишемо умову існування обмежених розв'язків для рівняння (9):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\,dt = 0. \tag{10}$$

При виконанні цієї умови множина обмежених розв'язків рівняння (9) буде мати вигляд

$$y(t,\varepsilon) = U(t)PP_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon),$$

де

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0 + y,\tau,\varepsilon)](t).$$

Оскільки оператор $Z(x,t,\varepsilon)$ є диференційовним за Фреше в околі породжуючого розв'язку, то [5] має місце наступний розклад оператора $Z(x,t,\varepsilon)$:

$$Z(x_0(t,c^0) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(x_0(t,c^0),t,0) + A_1(t)y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

де

$$A_1(t) = Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0;\varepsilon=0}, \quad \mathcal{R}\,(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}^{(1)}_x(0,t,0) = 0.$$

$Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)$ — похідна Фреше. Тоді умову (10) можна записати так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{Z(x_0(t,c^0),t,0) + A_1(t)\{U(t)PP_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon)\}\}dt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)dt = 0. \tag{11}$$

Використовуючи позначення, умову (11) записуємо у вигляді операторного рівняння

$$B_0c = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt. \tag{12}$$

Згідно з теоремою 1, необхідною і достатньою умовою розв'язності операторного рівняння (12) є умова

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt = 0,$$

яка виконується внаслідок припущення 2. Тоді константу c можна вибрати у вигляді

$$c = -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}\, dt,$$

де B_0^- — узагальнено-обернений оператор до оператора B_0 [4]. Таким чином, отримаємо операторну систему

$$\begin{gathered} y(t,\varepsilon) = U(t)PP_{N(D)}c + \overline{y}(t,\varepsilon), \\ c = -B_0^- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\overline{y}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt, \\ \overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t). \end{gathered} \tag{13}$$

Введемо допоміжний вектор $u = (y, c, \overline{y})^t \in \mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}$ (далі $\mathbf{B}^3$), що належить декартовому добутку просторів $\mathbf{B}$ на себе (t означає операцію транспонування), і допоміжний оператор $L_1 g = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)g(t)\,dt$. Тоді операторну систему (13) можна записати у вигляді

$$u = \begin{bmatrix} 0 & U(t)P\mathcal{P}_{N(D)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt \\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t) \end{pmatrix}.$$

Ця операторна система еквівалентна наступній:

$$\begin{bmatrix} I & -U(t)P\mathcal{P}_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt \\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Введемо позначення

$$L = \begin{bmatrix} I & -U(t)P\mathcal{P}_{N(D)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\mathcal{R}(y,t,\varepsilon)dt \\ \\ \varepsilon G[Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)](t) \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що оператор L є оборотним, причому обернений до нього оператор є обмеженим. Для цього знайдемо обернений оператор. Будемо шукати його у вигляді

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(кожна компонента a_{ij} — це оператор, що діє в банаховому просторі $\mathbf{B}$ ($a_{ij} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$)) з умови $LL^{-1} = L^{-1}L = I$, де $I : \mathbf{B}^3 \to \mathbf{B}^3$ — одиничний оператор вигляду

$$I = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

В результаті отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered} Ia_{11} - U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}a_{21} - Ia_{31} = I, \\ Ia_{12} - U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}a_{22} - Ia_{32} = 0, \\ Ia_{13} - U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}a_{23} - Ia_{33} = 0, \end{gathered}$$

$$Ia_{21} - L_1a_{31} = 0, \quad Ia_{22} - L_1a_{32} = I, \quad Ia_{23} - L_1a_{33} = 0,$$

$$Ia_{31} = 0, \quad Ia_{32} = 0, \quad Ia_{33} = I,$$

звідки знаходимо

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I & U(t)P\mathcal{P}_{N(D)} & U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Доведемо обмеженість оператора L^{-1}. Для цього потрібно довести, що існує константа $c_1 > 0$ така, що для всіх $u \in \mathbf{B}^3$ виконується нерівність $\|L^{-1}u\|_{\mathbf{B}^3} \leq c_1\|u\|_{\mathbf{B}^3}$. Ця нерівність еквівалентна наступній: існує константа $c_2 > 0$ така, що для всіх y, c, $\overline{y} \in \mathbf{B}$ виконується нерівність

$$|||L^{-1}(y,c,\overline{y})^t|||_{\mathbf{B}^3} \leq c_2(|||y|||_{\mathbf{B}} + |||c|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}),$$

$$L^{-1}(y,c,\overline{y})^t = \begin{pmatrix} y + U(t)PP_{N(D)}c + U(t)PP_{N(D)}L_1\overline{y} + \overline{y} \\ c + L_1\overline{y} \\ \overline{y} \end{pmatrix}.$$

Доведемо обмеженість норми кожної компоненти вектора у банаховому просторі $\mathbf{B}$:

$$|||y + PP_{N(D)}c + U(\cdot)PP_{N(D)}L_1\overline{y} + \overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||y|||_{\mathbf{B}} + |||U(\cdot)PP_{N(D)}|||_{\mathbf{B}}|||c|||_{\mathbf{B}}+$$

$$+|||U(\cdot)PP_{N(D)}L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}} + |||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||y|||_{\mathbf{B}} + c_1|||c|||_{\mathbf{B}} + c_2|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}.$$

Аналогічно

$$|||c + L_1\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||c|||_{\mathbf{B}} + |||L_1|||_{\mathbf{B}}|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq |||c|||_{\mathbf{B}} + c_3|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}}.$$

Таким чином,

$$|||L^{-1}(y, c, \overline{y})^t|||_{\mathbf{B}^3} \leq |||y|||_{\mathbf{B}} + (c_1 + 1)|||c|||_{\mathbf{B}} + (1 + c_2 + c_3)|||\overline{y}|||_{\mathbf{B}} \leq$$

$$\leq c_4(\|y\|_{\mathbf{B}} + \|c\|_{\mathbf{B}} + \|\overline{y}\|_{\mathbf{B}}),$$

де $c_4 = \max\{1, 1 + c_1, 1 + c_2 + c_3\}$. Отже, обмеженість оператора L^{-1} доведено.

З урахуванням позначень операторну систему (14) запишемо у вигляді

$$u = L^{-1}g = L^{-1}S(\varepsilon)u,$$

де оператор $S(\varepsilon)$ у загальному випадку є нелінійним. За рахунок вибору ε та обмеженості оператора L^{-1} можна досягти того, щоб оператор $L^{-1}S(\varepsilon)$ був оператором стиску. Тоді з принципу стискаючих відображень [6] буде випливати, що операторна система (14) має єдину нерухому точку, яка й буде обмеженим розв'язком рівняння (1). Таким чином, теорему доведено.

Слід зауважити, що у скінченновимірному випадку ця задача вивчалась у роботах [4, 7].

Наслідок. *Нехай функціонал $F(c)$ має похідну Фреше $F^{(1)}(c)$ для деякого елемента c^0 банахового простору $\mathbf{B}$, який задовольняє операторне рівняння (7). Тоді якщо $F^{(1)}(c^0)$ має обернений оператор, то рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $x(t, \varepsilon)$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у розв'язок $x(t, 0) = x_0(t, c^0)$.*

Доведення. Зображення

$$F^{(1)}(c)[h] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)Z^{(1)}(v, t, \varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0}[x_0^{(1)}(t, c)[h]]dt$$

випливає з теореми про суперпозицію диференційовних відображень у банаховому просторі [5]. Знайдемо похідну $x_0^{(1)}(t, c)$. Оскільки $x_0(t, c) = U(t)PP_{N(D)}c + (G[f])(t)$, то

$$x_0^{(1)}(t, c)[h] = \left.\frac{\partial x_0(t, c + \alpha h)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}c+$$

$$+\alpha U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}h + (G[f])(t))|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha}(U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}c)|_{\alpha=0} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}h)|_{\alpha=0} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(G[f])(t))|_{\alpha=0} =$$

$$= U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}h,$$

$$Z^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=x_0,\varepsilon=0} = A_1(t).$$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$F^{(1)}(c)[h] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}dt[h] = B_0[h].$$

Внаслідок оборотності оператора $F^{(1)}(c^0)$ оператор B_0 є також оборотним. Завдяки цьому рівняння (12) має єдиний розв'язок, а тоді й рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
2. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. — 1999. — **2**, № 1. — P. 3 – 10.
3. *Бойчук А. А., Покутний А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — С. 3 – 14.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
5. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 430 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
7. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. — 1984. — **55**. — P. 225 – 256.

Одержано 30.11.07