УДК 517 . 926

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ В СИНГУЛЯРНОМУ ВИПАДКУ

В. П. Яковець, О. В. Яковець

Ніжин. ун-т
Україна, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

We propose an algorithm for constructing a solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed linear system of differential equations with a degenerate matrix at the derivatives in the case where the limit matrix pencil is singular.

Предложен алгоритм построения асимптотического решения задачи Коши для сингулярно возмущенной линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных в случае сингулярности граничного пучка матриц.

Розглянемо задачу Коші

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)\,x + f(t,\varepsilon)\,, \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

де $x(t,\varepsilon)$ і $f(t,\varepsilon)$ — шуканий і заданий n-вимірні вектори, $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку, $\varepsilon > 0$ — малий дійсний параметр, h — натуральне число.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1^0) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ на заданому відрізку $[0;T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε :

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t)\,, \quad f(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k f_k(t)\,; \tag{3}$$

2^0) матричні функції $A_k(t)$, $B(t)$ і вектор-функції $f_k(t)$, $k = 0,1,\ldots,$ нескінченно диференційовні на $[0;T]$;

3^0) $\det B(t) = 0\ \forall t \in [0;T]$;

4^0) гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ сингулярна [1] при всіх $t \in [0;T]$, тобто

$$\det\,[A_0(t) - \lambda B(t)] \equiv 0 \quad \forall t \in [0;T]\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

У роботах [2, 3] розроблено теорію асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), а в [4 – 7] вивчалось питання про побудову асимптотичного розв'язку задачі (1), (2) у випадку, коли гранична в'язка матриць є регулярною. Задача Коші у сингулярному випадку у даній роботі розглядається вперше.

Як показано в [3], асимптотичне інтегрування системи (1) з виродженою матрицею при похідних у сингулярному випадку принципово відрізняється від регулярного, оскільки в цьому випадку крім визначення показників степенів малого параметра ε, за якими слід будувати асимптотичні розвинення шуканих розв'язків, додається проблема відшукання головних членів цих розвинень. Розв'язання задачі Коші ускладнюється ще й необхідністю з'ясування умов існування та єдиності розв'язку.

У даній статті будемо розглядати випадок, коли гранична в'язка матриць не містить регулярне „ядро” і має по одному мінімальному індексу для рядків та стовпців [1]. А саме, будемо припускати, що виконується умова

5^0) в'язка матриць $A_0 - \lambda B\,(t)$ при всіх $t \in [0;T]$ має мінімальні індекси: p — для стовпців і $q = n - p - 1$ — для рядків.

Тоді існують [1] перетворювальні матриці $P\,(t)$ і $Q\,(t)$ такої самої гладкості, що й $A_0\,(t)$ і $B\,(t)$ [2, с. 26], за допомогою яких дану в'язку матриць на відрізку $[0;T]$ можна звести до канонічного вигляду. Будемо вважати далі, що матриці $A_0\,(t)$ і $B\,(t)$ в системі (1) мають канонічний вигляд, оскільки в протилежному випадку цього можна досягти, помноживши систему (1) зліва на $P\,(t)$ і виконавши заміну $x = Q\,(t)\,y$. Тоді згідно з [1]

$$A_0 - \lambda B = \operatorname{diag}\,\{L_1\,(\lambda)\,, L_2\,(\lambda)\}\,,$$

де $L_1\,(\lambda)\,, L_2\,(\lambda)$ — прямокутні матриці розмірності $p \times (p+1)$ та $(q+1) \times q$ відповідно:

$$L_1\,(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2\,(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Як показано в [3], в цьому випадку в'язка матриць $L\,(\lambda) = A_0 - \lambda B$ має циклічний жорданів ланцюжок завдовжки $p+1$, який складається з власного вектора

$$\varphi_1\,(\lambda) = \varphi\,(\lambda) = \sum_{i=0}^{p} \lambda^i e_{i+1} = \operatorname{col}\,(1, \lambda, \dots, \lambda^p, 0, \dots, 0) \tag{4}$$

і p B-приєднаних векторів

$$\varphi_i\,(\lambda) = \frac{1}{(i-1)!}\,\frac{d^{i-1}\varphi\,(\lambda)}{d\lambda^{i-1}}, \quad i = \overline{2,\, p+1}, \tag{5}$$

які задовольняють співвідношення

$$\begin{gathered} L\,(\lambda)\;\varphi_1\,(\lambda) \equiv 0, \\ L\,(\lambda)\,\varphi_i\,(\lambda) \equiv B\varphi_{i-1}\,(\lambda)\,, \quad i = \overline{2,\, p+1}, \\ B\varphi_{p+1}\,(\lambda) \equiv 0 \end{gathered} \tag{6}$$

(e_k — одиничний вектор, k-та координата якого дорівнює 1, а всі інші є нулями). Приєднані вектори з цих співвідношень можна знайти за формулами

$$\varphi_i(\lambda) = H(\lambda) B \varphi_{i-1}(\lambda), \quad i = \overline{2, p+1}, \tag{7}$$

де $H(\lambda)$ — напівобернена матриця до матриці $L(\lambda)$. Ця матриця визначається неоднозначно. Беручи [3]

$$H(\lambda) = \operatorname{diag}\left\{L_1^+(\lambda), L_2^+(\lambda)\right\},$$

де

$$L_1^+(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{p-1} & \lambda^{p-2} & \dots & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2^+(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{q-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \lambda^{q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

бачимо, що формули (5), (7) визначають одні й ті ж вектори, тобто

$$\frac{d^i \varphi(\lambda)}{d\lambda^i} = i!\, [H(\lambda) B]^i \varphi(\lambda), \quad i = \overline{1, p}. \tag{8}$$

Спряжена в'язка матриць

$$L^*(\lambda) = A_0^* - \overline{\lambda} B^* = \operatorname{diag}\{L_1^*(\lambda), L_2^*(\lambda)\}$$

має циклічний жорданів ланцюжок завдовжки $q+1$, який складається з векторів

$$\psi_1(\lambda) = \psi(\lambda) = \sum_{i=0}^{q} \overline{\lambda}^i e_{p+1+i} = \operatorname{col}\left(0, \dots, 0, 1, \overline{\lambda}, \dots, \overline{\lambda}^q\right), \tag{9}$$

$$\psi_i(\lambda) = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}\psi(\lambda)}{d\overline{\lambda}^{i-1}}, \quad i = \overline{2, q+1}, \tag{10}$$

що задовольняють співвідношення

$$\begin{gathered} L^*(\lambda)\psi_1(\lambda) \equiv 0, \\ L^*(\lambda)\, \psi_i(\lambda) \equiv B\psi_{i-1}(\lambda), \quad i = \overline{2, q+1}, \\ L^*(\lambda)\, \psi_{q+1}(\lambda) \equiv 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Ці вектори можна виразити також через матрицю $H^*(\lambda)$, напівобернену до $H(\lambda)$:

$$\psi_i(\lambda) = [H^*(\lambda) B^*]^{i-1} \psi(\lambda), \quad i = \overline{1, q+1}. \tag{12}$$

Звідси випливає

$$\frac{d^i \psi(\lambda)}{d\overline{\lambda}^i} = i!\ [H^*(\lambda) B^*]^i \psi(\lambda), \quad i = \overline{1, q}. \tag{13}$$

Крім того, згідно з (7) із сумісності рівнянь (6) маємо

$$\Big(B\, [H(\lambda) B]^i \varphi(\lambda),\, \psi(\lambda)\Big), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

де символом (x, y) позначено скалярний добуток в n-вимірному унітарному просторі. Безпосередньою перевіркою легко також переконатися, що при всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ має місце рівність

$$\frac{dH(\lambda)}{d\lambda} = H(\lambda)\ BH(\lambda). \tag{15}$$

Зазначимо, що вектори e_1, e_{p+1} та e_n визначають нуль-простори матриць A_0, A_0^* та B^* відповідно.

Справджується така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови* $1^0 - 5^0$, *рівняння*

$$(A_1(t)\varphi(\lambda), \psi(\lambda)) \equiv \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \lambda^{i+j} a^{(1)}_{p+1+j,\, i+1}(t) = 0 \tag{16}$$

має на відрізку $[0; T]$ $n-1$ *простих відмінних від нуля коренів, де* $a^{(1)}_{sk}(t)$ — *елементи матриці* $A_1(t)$, *і початковий вектор* x_0 *задовольняє співвідношення*

$$(A_k(0) x_0 + f_k(0),\, e_n) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{17}$$

Тоді початкова задача (1), (2) має на даному відрізку $[0; T]$ *формальний розв'язок вигляду*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{-1} u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(t, \varepsilon)\ dt\right) + \varepsilon^{-1} v(t, \varepsilon), \tag{18}$$

де $u_i(t, \varepsilon),\, i = \overline{1, n-1},\, v(t, \varepsilon)$ — n-*вимірні вектор-функції, а* $\lambda_i(t, \varepsilon)$ — *скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями*

$$u_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(i)}(t) \varepsilon^k, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t), \tag{19}$$

$$\lambda_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(i)}(t) \varepsilon^k, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{20}$$

Для доведення цієї теореми покажемо, що за виконання її умов коефіцієнти розвинень (19), (20) можна однозначно визначити так, щоб вектор (18) формально задовольняв систему рівнянь (1) та початкову умову (2).

Насамперед зазначимо, що згідно з умовою теореми вільний член і старший коефіцієнт у рівнянні (16) повинні бути відмінними від нуля:

$$a_{p+1,1}^{(1)}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T], \tag{21}$$

$$a_{n,p+1}^{(1)}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T]. \tag{22}$$

Крім того, якщо $\lambda_0(t)$ — корінь цього рівняння, то згідно з (8), (13)

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\lambda}\left(A_1\varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)\right) = \left(\left(A_1(t) H(\lambda_0) B + BH(\lambda_0) A_1(t)\right)\varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)\right) \neq 0 \\ \forall t \in [0;T],\end{gathered} \tag{23}$$

оскільки цей корінь є простим.

Підставивши (18) у систему (1) і прирівнявши вирази при однакових експонентах, дістанемо

$$A(t,\varepsilon) u_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t,\varepsilon) Bu_i(t,\varepsilon) + \varepsilon^h Bu_i'(t,\varepsilon), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{24}$$

$$A(t,\varepsilon) v(t,\varepsilon) = \varepsilon^h Bv'(t,\varepsilon) - \varepsilon f(t,\varepsilon). \tag{25}$$

Врахувавши початкову умову (2), матимемо

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i(0,\varepsilon) + v(0,\varepsilon) = \varepsilon x_0. \tag{26}$$

Підставивши в (24) – (26) розвинення (19), (20), (3) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно коефіцієнтів розвинень (19), (20):

$$\begin{gathered}L\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) u_0^{(i)}(t) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ A_0 v_0(t) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n-1} u_0^{(i)}(0) + v_0(0) = 0,\end{gathered} \tag{27}$$

$$L\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) u_k^{(i)}(t) = b_k^{(i)}(t), \tag{28}$$

$$A_0 v_k(t) = d_k(t), \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_k^{(i)}(0) + v_k(0) = \delta_{k,1} x_0, \quad k = 1, 2 \ldots, \tag{30}$$

де

$$b_k^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^{(i)}(t) B u_{k-s}^{(i)}(t) - \sum_{s=1}^{k} A_s(t) u_{k-s}^{(i)}(t) + B\left(u_{k-h}^{(i)}(t)\right)', \tag{31}$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$d_k(t) = B v'_{k-h}(t) - \sum_{s=1}^{k} A_s(t) v_{k-s}(t) - f_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

З рівнянь (27) знайдемо

$$u_0^{(i)}(t) = c_0^{(i)} \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{33}$$

$$v_0(t) = c_0(t) e_1, \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) + c_0(0) e_1 = 0, \tag{35}$$

де $c_0^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$, — сталі множники, $c_0(t)$ — скалярна функція, які підлягають визначенню.

Поклавши в (28) – (30) $k = 1$ і врахувавши (31) – (34), (8), будемо мати

$$L\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) u_1^{(i)}(t) = b_1^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{36}$$

$$A_0 v_1(t) = d_1(t), \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_1^{(i)}(0) + v_1(0) = x_0, \tag{38}$$

$$b_1^{(i)}(t) = c_0^{(i)} \Big[\lambda_1^{(i)}(t) B \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) - A_1(t) \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) + \\ + \delta_{1h} \left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)' B H\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) B \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) \Big], \tag{39}$$

$$d_1(t) = \delta_{1,h} c'_0(t) B e_1 - c_0(t) A_1(t) e_1 - f_0(t). \tag{40}$$

Рівняння (36) будуть розв'язними відносно векторів $u_1^{(i)}(t)$ тоді і тільки тоді, коли при всіх $t \in [0; T]$ виконуватиметься рівність

$$\left(b_1^{(i)}(t), \psi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)\right) = 0.$$

Взявши до уваги (14), (4), (9), неважко переконатися, що ця рівність рівносильна (16), якщо в останній покласти $\lambda = \lambda_0^{(i)}(t)$. Отже, $\lambda_0^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, — корені рівняння (16). Тоді з (36) знайдемо

$$u_1^{(i)}(t) = H\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) b_1^{(i)}(t) + c_1^{(i)} \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{41}$$

де $c_1^{(i)}$, $i = \overline{1,\, n-1}$, — скалярні множники, які необхідно визначити.

Рівняння (37) буде розв'язним відносно вектора $v_1(t)$, якщо виконується умова

$$(d_1(t), e_{p+1}) = 0.$$

Оскільки $Be_1 = e_1$, $(A_1(t) e_1, e_{p+1}) = a_{p+1,1}^{(1)}(t)$, то з огляду на (21) звідси дістанемо

$$c_0(t) = -\frac{(f_0(t), e_{p+1})}{a_{p+1,1}^{(1)}(t)}.$$

Тепер рівняння (37) є розв'язним і з нього знайдемо

$$v_1(t) = Gd_1(t) + c_1(t) e_1, \tag{42}$$

де $G = H(0) = A_0^*$ — напівобернена матриця до матриці A_0, а $c_1(t)$ — скалярна функція, яка підлягає визначенню.

Для знаходження $c_0^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$, використаємо рівності (35), (38). Врахувавши структуру вектора $\varphi(\lambda)$, з (35) отримаємо $p+1$ рівнянь відносно $n-1$ невідомих $c_0^{(i)}$:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} = -c_0(0), \\ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\lambda_0^{(i)}(0)\right]^k c_0^{(i)} = 0, \quad k = \overline{1, p}. \end{gathered} \tag{43}$$

Решту $q-1$ рівнянь дістанемо з рівності (38). Врахувавши (41), (39), запишемо її у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) A_1(0) \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) = g_0, \tag{44}$$

де

$$g_0 = \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \lambda_1^{(i)}(0) H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) B\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) +$$

$$+\delta_{1,h} \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)' \left[H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) B\right]^2 \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) + v_1(0) - x_0. \qquad (45)$$

Згідно з (8), (4) останні q координат векторів, які утворюють два перші доданки в g_0, дорівнюють нулю, а згідно з (42), (40) відповідні координати вектора $v_1(0)$ містять уже визначені величини. Тому, прирівнюючи в (44) координати векторів зліва і справа, починаючи з $(n-1)$-ї і закінчуючи $(p+2)$-ю, рухаючись знизу вгору, і враховуючи при цьому структуру матриць $H(\lambda)$, B та вектора $\varphi(\lambda)$, маємо

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \left[a_{n-1,k+1}^{(1)}(0) \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^k + a_{n,k+1}^{(1)}(0) \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^{k+1}\right] = g_0^{(n-1)},$$

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \left[a_{n-2,k+1}^{(1)}(0) \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^k + a_{n-1,k+1}^{(1)}(0) \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^{k+1} + \right.$$

$$\left. + a_{n,k+1}^{(1)}(0) \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^{k+2}\right] = g_0^{(n-2)}, \qquad (46)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{q-1} c_0^{(i)} a_{p+2+j,k+1}^{(1)}(0) \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^{k+j} = g_0^{(p+2)},$$

де g_0^i — i-та координата вектора g_0, яка згідно з (45), (42), (40) має вигляд

$$g_0^i = -c_0(0) \left\{GA_1(0) e_1\right\}_i - \left\{f_0(0)\right\}_i - (x_0)_i =$$

$$= -c_0(0) a_{i,1}^{(1)}(0) - \left\{f_0(0)\right\}_i - (x_0)_i, \quad i = \overline{p+2, n}. \qquad (47)$$

Розглянемо перше рівняння системи (46). Врахувавши (43), (47), (22), дістанемо

$$a_{n,p+1}^{(1)}(0) \sum_{i=1}^{n-1} \left[\lambda_0^{(i)}(0)\right]^{p+1} c_0^{(i)} - a_{n-1,1}^{(1)}(0) c_0(0) = g_0^{(n-1)},$$

або

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[\lambda_0^{(i)}(0)\right]^{p+1} c_0^{(i)} = -\left(a_{n,p+1}^{(1)}(0)\right)^{-1} \left[\left\{f_0(0)\right\}_{n-1} + \left\{x_0\right\}_{n-1}\right]. \qquad (48)$$

Тепер з урахуванням (43), (47), (48) друге рівняння запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\lambda_0^{(i)}(0)\right]^{p+2}c_0^{(i)} = -\left(a_{n,p+1}^{(1)}(0)\right)^{-1}\left[\{f_0(0)\}_{n-2}+\{x_0\}_{n-2}-\right.$$
$$\left.-\left(a_{n-1,p+1}^{(1)}(0)+a_{n,p}^{(1)}(0)\right)\alpha_0^{(p+1)}\right],$$

де $\alpha_0^{(p+1)}$ — права частина рівняння (48).

Продовжуючи так і далі, рівняння (46) перетворюємо до вигляду

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\lambda_0^{(i)}(0)\right]^{p+k}c_0^{(i)} = \alpha_0^{(p+k)}, \quad k=\overline{1,q-1}, \tag{49}$$

де числа $\alpha_0^{(p+k)}$ виражаються рекурентними формулами

$$\alpha_0^{(p+1)} = -\left(a_{n,p+1}^{(1)}(0)\right)^{-1}\left[\{f_0(0)\}_{n-1}+\{x_0\}_{n-1}\right],$$

$$\alpha_0^{(p+k)} = -\left(a_{n,p+1}^{(1)}(0)\right)^{-1}\left[\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k+1-s}\alpha_0^{(p+s)}a_{n-(k+1-s-j),p+2-j}(0)+\{f_0(0)\}_{n-k}+\{x_0\}_{n-k}\right],$$
$$k=\overline{2,q-1}.$$

Об'єднуючи рівняння (43), (49), дістаємо таку систему рівнянь для визначення $c_0^{(i)}, i = \overline{1,n-1}$:

$$W(0)\,\tilde c_0 = \alpha_0,$$

де

$$\tilde c_0 = \operatorname{col}\left(c_0^{(1)},c_0^{(2)},\ldots,c_0^{(n-1)}\right),$$

$$\alpha_0 = \operatorname{col}\left(-c_0(0),0,\ldots,0,\alpha_0^{(p+1)},\ldots,\alpha_0^{(p+q-1)}\right),$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0^{(1)}(t) & \lambda_0^{(2)}(t) & \ldots & \lambda_0^{(n-1)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\lambda_0^{(1)}(t)\right)^{n-2} & \left(\lambda_0^{(2)}(t)\right)^{n-2} & \ldots & \left(\lambda_0^{(n-1)}(t)\right)^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Оскільки за умовою теореми $\lambda_0^{(i)}(t) \neq \lambda_0^{(j)}(t)$ при $i \neq j$ і всіх $t \in [0;T]$, то

$$\det W(t) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n-1}\left(\lambda_0^{(i)}(t)-\lambda_0^{(j)}(t)\right) \neq 0 \quad \forall t \in [0;T].$$

Отже,

$$\tilde{c}_0 = W^{-1}\alpha_0.$$

Розглянемо тепер рівність, яку одержимо, якщо в (44) прирівняти останні $n-i$ координат векторів зліва і справа:

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} a_{n,k+1}^{(1)}(0)\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)^k = g_0^{(n)}.$$

Із урахуванням (47), (43) її можна записати у вигляді

$$\{x_0\}_n + \{f_0(0)\}_n = 0,$$

або

$$(A_0x_0 + f_0(0), e_n) = 0,$$

якщо взяти до уваги, що $\{A_0x_0\}_n = \{x_0\}_n$. Згідно з умовою (17) ця рівність виконується.

Таким чином, використовуючи рівняння (27), умови розв'язності рівнянь (36), (37) та початкову умову (35) і частково (38), знаходимо функції $\lambda_0^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, і вектори $u_0^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, та $v_0(t)$.

Для знаходження функцій $\lambda_1^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, використаємо умову розв'язності рівнянь (28) при $k = 2$:

$$\left(b_2^{(i)}(t), \psi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)\right) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{50}$$

З цією метою, підставивши (33), (41), (39) у вираз (31) для вектора $b_2^{(i)}(t)$, перетворимо його до вигляду

$$b_2^{(i)}(t) = \lambda_1^{(i)}Bu_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)}Bu_0^{(i)} - A_1u_1^{(i)} - A_2u_0^{(i)} + \delta_{h,1}B\left(u_1^{(i)}\right)' +$$

$$+\delta_{h,2}B\left(u_0^{(i)}\right)' = -\lambda_1^{(i)}c_0^{(i)}\left(BH\left(\lambda_0^{(i)}\right)A_1 + A_1H\left(\lambda_0^{(i)}\right)B\right)\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) +$$

$$+c_0^{(i)}\left(A_1H\left(\lambda_0^{(i)}\right)A_1 - A_2\right)\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) - \delta_{h,1}c_0^{(i)}B\left(H\left(\lambda_0^{(i)}\right)A_1\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right)\right)' +$$

$$+\lambda_1^{(i)}c_0^{(i)}BH\left(\lambda_0^{(i)}\right)B\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) + \delta_{h,1}c_0^{(i)}\lambda_1^{(i)}\left(\lambda_0^{(i)}\right)'B\left(H\left(\lambda_0^{(i)}\right)B\right)^2\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) +$$

$$+c_1^{(i)}\lambda_1^{(i)}B\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) + \lambda_2^{(i)}c_0^{(i)}B\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) - c_1^{(i)}A_1\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) +$$

$$+\delta_{h,1}B\Bigg[c_0^{(i)}\left(\lambda_1^{(i)}H\left(\lambda_0^{(i)}\right)B\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) + \left(\lambda_0^{(i)}\right)'\left(H\left(\lambda_0^{(i)}\right)B\right)^2\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right)\right) +$$

$$+c_1^{(i)}\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right)\Bigg]' + \delta_{h,1}c_0^{(i)}B\left(\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right)\right)'. \tag{51}$$

Підставивши цей вираз у (50) і взявши до уваги (14), (8), (15), (16), а також (23), дістанемо

$$\lambda_1^{(i)}(t) = \frac{a_1^{(i)}(t)}{\frac{d}{d\lambda}\left(A_1\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right), \psi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)\right)}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

де

$$a_1^{(i)}(t) = \left(\left(A_1(t) H\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) A_1(t) - A_2(t)\right)\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) - \right.$$

$$\left. -\delta_{h,1} B\left(H\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) A_1(t)\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)\right)', \psi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)\right), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

При даних $\lambda_1^{(i)}(t)$ і $k = 2$ рівняння (28) буде розв'язним і з нього отримаємо

$$u_2^{(i)}(t) = H\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) b_2^{(i)}(t) + c_2^{(i)}\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{52}$$

де $c_2^{(i)}$ — числові множники, які визначатимуться на наступному кроці.

Для знаходження функції $c_1(t)$, яка входить до формули (42), використаємо умову розв'язності рівняння (29), поклавши в ньому $k = 2$:

$$(d_2(t), e_{p+1}) = 0. \tag{53}$$

Згідно з (32), (42)

$$d_2(t) = \delta_{h,1} c_1'(t) e_1 - c_1(t) A_1(t) e_1 + \delta_{h,1} G d_1(t) -$$

$$-A_1(t) G d_1(t) - A_2(t) v_0(t) - f_0(t) + \delta_{h,2} v_0'(t).$$

Підставивши цей вираз у (53), знайдемо

$$c_1(t) = \frac{r_1(t)}{a_{p+1,1}(t)},$$

де

$$r_1(t) = \left(\delta_{h,1} G d_1(t) - A_1(t) G d_1(t) - A_2(t) v_0(t) - f_0(t) + \delta_{h,2} v_0'(t), e_{p+1}\right).$$

Тепер за формулою (42) однозначно визначається і вектор $v_1(t)$. У свою чергу

$$v_2(t) = G d_2(t) + c_2(t) e_1, \tag{54}$$

де $c_2(t)$ — скалярна функція, яка буде визначатися аналогічно $c_1(t)$ на наступному кроці.

Щоб знайти вектори $u_1^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, необхідно визначити сталі множники $c_1^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$, які містяться в (41). Для цього використаємо початкову умову (38) і частково (30) при $k = 2$.

На попередньому кроці було використано q останніх рівнянь, які утворюються з (38) прирівнюванням відповідних координат векторів зліва і справа. Тепер використаємо перші $p+1$ рівнянь, які згідно з (41), (42) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^j c_1^{(i)} = \alpha_j^{(1)}, \quad j = \overline{0,p}, \tag{55}$$

де

$$\alpha_j^{(1)} = \left\{ x_0 - v_1(0) - \sum_{i=1}^{n-1} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_1^{(i)}(0) \right\}_{j+1}, \quad j = \overline{0,p}.$$

Решту рівнянь отримаємо з (30), поклавши $k = 2$ і прирівнявши координати відповідних векторів, починаючи з $(n-1)$-ї і закінчуючи $(p+2)$-ю. Виділяючи у виразі для $u_2^{(i)}(0)$ доданки, які містять невідомі $c_1^{(i)}$, і відкидаючи ті вектори, в яких q останніх координат дорівнюють нулю, отримуємо векторну рівність

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_1^{(i)} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) A_1(0) \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) = g_1,$$

де

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\lambda_1^{(i)}(0) H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) BH\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_1^{(i)}(0) - \right.$$

$$-H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) A_1(0) H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_1^{(i)}(0) - H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) A_2(0) u_0^{(i)}(0) +$$

$$\left. + \delta_{h,1} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) B\left(H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_1^{(i)}(0)\right)' \right] + Gd_2(0)$$

— відомий вектор.

Прирівнюючи координати векторів зліва і справа, починаючи з $(n-1)$-ї, рухаючись знизу вгору, і перетворюючи отримані рівняння з урахуванням (55), так само, як і в (46), маємо

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^{p+j} c_1^{(i)} = \alpha_{p+j}^{(1)}, \quad j = \overline{1,q-1}, \tag{56}$$

де

$$\alpha_{p+j}^{(1)} = \left(a_{n,p+1}^{(1)}(0)\right)^{-1} \left[\{g_1\}_{n-j} - \sum_{s=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{p} a_{n-1+s,k+1}^{(1)}(0)\, \alpha_{k+s}^{(1)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{p-1} a_{n,k+1}^{(1)} \alpha_{k+j}^{(1)} \right], \quad j = \overline{1,q-1}.$$

Об'єднуючи рівняння (53), (56), дістаємо

$$W\left(0\right)\tilde{c}_1 = \alpha_1,$$

де

$$\tilde{c}_1 = \mathrm{col}\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_{n-1}^{(1)}\right), \quad \alpha_1 = \mathrm{col}\left(\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)} \ldots, \alpha_{n-2}^{(1)}\right),$$

звідки

$$\tilde{c}_1 = W^{-1}\left(0\right)\alpha_1.$$

Розглянемо тепер рівність, яка утворюється з початкової умови (30) при $k = 2$, якщо прирівняти n-і координати відповідних векторів. Оскільки множення вектора на матриці H і G не змінює його n-у координату, а матриця B її анулює, то, враховуючи (51), (52), (32), (54), маємо

$$\left\{\sum_{i=1}^{n-1} A_1\left(0\right)u_1^{(i)}\left(0\right) + \sum_{i=1}^{n-1} A_2\left(0\right)u_0^{(i)}\left(0\right) + A_1\left(0\right)v_1\left(0\right) + A_2\left(0\right)v_0\left(0\right) + f_1\left(0\right)\right\}_n = 0,$$

звідки, беручи до уваги (38), (33), (34), дістаємо

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} A_2\left(0\right)\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\left(0\right)\right) + c_0\left(0\right)A_2\left(0\right)e_1 + A_1\left(0\right)x_0 + f_1\left(0\right), e_n\right) = 0,$$

або

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{p} c_0^{(i)} a_{n,k+1}^{(2)}\left(0\right)\left(\lambda_0^{(i)}\left(0\right)\right)^k + c_0\left(0\right)a_{n1}^{(2)}\left(0\right) + \left(A_1\left(0\right)x_0 + f_1\left(0\right), e_n\right) = 0,$$

де $a_{ij}^{(2)}$ — елементи матриці A_2.

Нарешті, врахувавши (43), остаточно отримаємо

$$\left(A_1\left(0\right)x_0 + f_1\left(0\right), e_n\right) = 0.$$

Згідно з умовою (17) ця рівність виконується.

Отже, на цьому кроці визначаються функції $\lambda_1^{(i)}\left(t\right)$, $i = \overline{1, n-1}$, і вектори $u_0^{(i)}\left(t\right)$, $i = \overline{1, n-1}$, та $v_1\left(t\right)$.

Продовжуючи цей процес, визначимо будь-які коефіцієнти розвинень (19), (20).

Дійсно, припустимо, що вектори $u_s^{(i)}\left(t\right)$, $i = \overline{1, n-1}$, $v_s\left(t\right)$ і функції $\lambda_s^{(i)}\left(t\right)$ вже відомі при $s < k$. При цьому

$$u_s^{(i)}\left(t\right) = H\left(\lambda_0^{(i)}\left(t\right)\right)b_s^{(i)}\left(t\right) + c_s^{(i)}\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{57}$$

$$v_s\left(t\right) = Gd_s\left(t\right) + c_s\left(t\right)e_1, \quad s = \overline{1, k}. \tag{58}$$

Тоді згідно з (31), (32) для визначення $u_k^{(i)}(t)$, $v_k(t)$ необхідно знайти функції $\lambda_k^{(i)}(t)$, які входять до складу $b_k^{(i)}(t)$, а також $c_k(t)$ і $c_k^{(i)}$, $i=\overline{1,n-1}$. Для знаходження $\lambda_k^{(i)}(t)$ використаємо умову розв'язності рівнянь (28) на $(k+1)$-му кроці:

$$\left(b_{k+1}^{(i)}(t),\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right)\right)=0,\quad i=\overline{1,n-1}. \tag{59}$$

З цією метою, виділяючи у виразі для $b_{k+1}^{(i)}(t)$ відомі і невідомі доданки, подаємо його у вигляді

$$b_{k+1}^{(i)}(t)=\lambda_{k+1}^{(i)}Bu_0^{(i)}+\lambda_k^{(i)}Bu_1^{(i)}+\lambda_1^{(i)}Bu_k^{(i)}-A_1u_k^{(i)}+\delta_{h,1}B\left(u_k^{(i)}\right)'+$$

$$+\sum_{s=2}^{k-1}\lambda_s^{(i)}Bu_{k+1-s}^{(i)}-\sum_{s=2}^{k+1}A_su_{k+1-s}^{(i)}+(1-\delta_{h,1})B\left(u_{k+1-h}^{(i)}\right)'.$$

Враховуючи (39), (41), (57), маємо

$$b_{k+1}^{(i)}(t)=-\lambda_k^{(i)}(A_1HB+BHA_1)\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right)-c_k^{(i)}A_1\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right)+\tilde b_{k+1}^{(i)},$$

де

$$\tilde b_{k+1}^{(i)}=\lambda_1^{(i)}\sum_{s=1}^{k-1}\lambda_s^{(i)}BHBu_{k-s}^{(i)}-\lambda_1^{(i)}\sum_{s=1}^{k}BHA_su_{k-s}^{(i)}+$$

$$+\lambda_1^{(i)}BHB\left(u_{k-h}^{(i)}\right)'-\sum_{s=1}^{k-1}\lambda_s^{(i)}A_1HBu_{k-s}^{(i)}+\sum_{s=1}^{k}A_1HA_1u_{k-s}^{(i)}-$$

$$-AHB\left(u_{k-h}^{(i)}\right)'+\lambda_{k+1}^{(i)}Bu_0^{(i)}+\sum_{s=2}^{k-1}\lambda_s^{(i)}Bu_{k+1-s}^{(i)}-\sum_{s=2}^{k+1}A_su_{k+1-s}^{(i)}+$$

$$+\delta_{h,1}B\left(\sum_{s=1}^{k-1}\lambda_s^{(i)}HBu_{k-s}^{(i)}-\sum_{s=1}^{k-1}HA_su_{k-s}^{(i)}+B\left(HBu_{k-h}^{(i)}\right)'\right)',$$

$$H=H\left(\lambda_0^{(i)}\right).$$

Підставляючи цей вираз у (59) і беручи до уваги (23), (16), знаходимо

$$\lambda_k^{(i)}(t)=\frac{a_k^{(i)}(t)}{\frac{d}{d\lambda}\left(A_1\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right),\psi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)\right)},\quad i=\overline{1,n-1},$$

де

$$a_k^{(i)}(t)=\left(\tilde b_{k+1}^{(i)}(t),\psi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)\right),\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Функцію $c_k(t)$ знайдемо з умови розв'язності на $(k+1)$-му кроці рівняння (29):

$$(d_{k+1}(t), e_{p+1}) = 0.$$

Згідно з (32), (58) цю умову запишемо у вигляді

$$-c_k(A_1e_1, e_{p+1}) + \delta_{h,1}c_k'(Be_1, e_{p+1}) + r_k(t) = 0,$$

де

$$r_k(t) = \delta_{h,1}BGd_k'(t) - A_1(t)Gd_k(t) - \sum_{s=2}^{k+1} A_s(t)v_{k+1-s}(t) + (1-\delta_{h,1})Bv_{k+1-h}'(t) - f_k(t),$$

звідки

$$c_k(t) = \frac{r_k(t)}{a_{p+1,1}(t)}.$$

Для знаходження чисел $c_k^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$, використаємо початкову умову (30). Згідно з (57) на k-му кроці з цієї умови маємо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\lambda_0^{(i)}(0)\right]^j c_k^{(i)} = \alpha_j^{(k)}, \quad j = \overline{0, p}, \tag{60}$$

де

$$\alpha_j^{(k)} = -\left\{\sum_{i=1}^{n-1} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_k^{(i)}(0) + v_k(0)\right\}_{j+1}, \quad j = \overline{0, p},$$

— відомий вираз. Решту $q-1$ рівнянь отримаємо на $(k+1)$-му кроці з рівності

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{k+1}^{(i)}(0) + v_{k+1}(0) = 0. \tag{61}$$

Для цього перетворимо вирази для векторів $u_{k+1}^{(i)}(t)$, виділяючи в них доданки, які містять невідомі $c_k^{(i)}$. Згідно з (61), (57) одержуємо

$$\begin{gathered}
u_{k+1}^{(i)}(t) = Hb_{k+1}^{(i)}(t) + c_{k+1}^{(i)}\varphi\left(\lambda_0^{(i)}(t)\right) = -c_k^{(i)}HA_1\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) + \\
+c_k^{(i)}\lambda_1^{(i)}HB\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) + \delta_{h,1}c_k^{(i)}HB\left(\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right)\right)' + \lambda_{k+1}^{(i)}HB\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) + \\
+c_{k+1}^{(i)}\varphi\left(\lambda_0^{(i)}\right) + \lambda_1^{(i)}HBHb_k^{(i)} - HA_1Hb_k^{(i)} + \delta_{h,1}HB\left(Hb_k^{(i)}\right)' + \\
+(1-\delta_{h,1})HB\left(u_{k+1-h}^{(i)}\right)' + \sum_{s=2}^{k}\lambda_s^{(i)}HBu_{k+1-s}^{(i)} - \sum_{s=2}^{k+1}HA_su_{k+1-s}^{(i)}.
\end{gathered} \tag{62}$$

Тоді, взявши до уваги, що

$$v_{k+1}(t) = Gd_{k+1}(t) + c_{k+1}(t)\, e_1, \tag{63}$$

із умови (61) отримаємо векторну рівність

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_k^{(i)} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) A_1(0)\, \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) = g_k, \tag{64}$$

де

$$g_k = \sum_{i=1}^{n-1} \Bigg[\lambda_1^{(i)}(0)\, H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) BH\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_k^{(i)}(0) -$$

$$-H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) A_1(0)\, H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_k^{(i)}(0) + \delta_{h,1} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) B\left(H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) b_k^{(i)}(0)\right)' +$$

$$+(1-\delta_{h,1})\, H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) B\left(u_{k+1-h}^{(i)}(0)\right)' + \sum_{s=2}^{k} \lambda_s^{(i)}(0)\, H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) Bu_{k+1-s}^{(i)}(0) -$$

$$-\sum_{s=2}^{k+1} H\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) A_s(0)\, u_{k+1-s}^{(i)}(0) \Bigg] + Gd_{k+1}(0)$$

(до складу g_k не входять ті векторні доданки з (62), (63), останні q координат яких дорівнюють нулю). Прирівнявши в (64) координати відповідних векторів, починаючи з $(n-1)$-ї й закінчуючи $(p+2)$-ю, і врахувавши при цьому рівності (60), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_0^{(i)}(0)\right)^{p+r} c_k^{(i)} = \alpha_{p+r}^{(k)}, \tag{65}$$

де

$$\alpha_{p+r}^{(k)} = \left(a_{n,p+1}^{(1)}(0)\right)^{-1} \left[\{g_k\}_{n-r} - \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{p} a_{n-r+s,j+1}^{(1)} \alpha_{j+s}^{(k)} - \sum_{j=0}^{p-1} a_{n,j+1}^{(1)} \alpha_{j+r}^{(k)} \right], \quad r = \overline{1, q-1}.$$

Об'єднавши рівняння (60), (65) і позначивши

$$\tilde{c}_k = \operatorname{col}\left(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \ldots, c_k^{(n-1)}\right), \quad \alpha_k = \operatorname{col}\left(\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_{n-2}^{(k)}\right),$$

одержимо

$$W(0)\, \tilde{c}_k = \alpha_k,$$

звідки

$$\tilde{c}_k = W^{-1}(0)\, \alpha_k.$$

Нарешті, прирівнявши в (61) останні n-і координати відповідних векторів і взявши до уваги, що матриці H і G не змінюють n-у координату вектора, на який вони множаться, будемо мати

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} b_{k+1}^{(i)}(0) + d_{k+1}(0) \right\}_n = 0. \tag{66}$$

Оскільки

$$b_{k+1}^{(i)} = \sum_{s=1}^{k+1} \lambda_s^{(i)} B u_{k+1-s}^{(i)} - \sum_{s=1}^{k+1} A_s u_{k+1-s}^{(i)} + B\left(u_{k+1-h}^{(i)}\right)',$$

$$d_{k+1} = B v'_{k+1-h} - \sum_{s=1}^{k+1} A_s v_{k+1-s} - f_k,$$

то, врахувавши, що матриця B анулює n-у координату, звідси дістанемо

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{k+1} A_s u_{k+1-s}^{(i)} + \sum_{s=1}^{k+1} A_s v_{k+1-s} + f_k \right\}_n = 0.$$

З початкових умов

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_j^{(i)}(0) + v_j(0) = \delta_{j,1} x_0, \quad j = \overline{1,k},$$

виконання яких забезпечене на попередніх кроках, маємо

$$v_1(0) = x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} u_1^{(i)}(0),$$

$$v_{k+1-s}(0) = -\sum_{i=1}^{n-1} u_{k+1-s}^{(i)}(0), \quad s = \overline{1, k-1}.$$

Крім того, згідно з (34) $v_0(0) = c_0(0) e_1$. Підставивши ці вирази в (66), отримаємо

$$\left\{ A_{k+1}(0) \sum_{i=1}^{n-1} c_0^{(i)} \varphi\left(\lambda_0^{(i)}(0)\right) + c_0(0) A_{k+1}(0) e_1 + A_k(0) x_0 + f_k(0) \right\}_n = 0,$$

звідки з урахуванням (43) одержимо рівність

$$(A_k(0) x_0 + f_k(0), e_n) = 0,$$

яка виконується згідно з умовою (17).

За допомогою отриманих рекурентних формул можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти розвинень (19), (20).

Теорему доведено.

Використовуючи методи [2, 3], можна довести, що побудований формальний розв'язок є асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$. А саме, якщо при даному натуральному m

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(i)}(t)\,\varepsilon^k\right) \le 0 \quad \forall t \in [0;T], \quad i = \overline{1, n-1},$$

то має місце оцінка

$$\|x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{m-h},$$

де $x(t,\varepsilon)$ — точний розв'язок задачі (1), (2), а $x_m(t,\varepsilon)$ — m-те наближення, яке утворюється з (18), якщо відповідні ряди (19), (20) обірвати на m-му члені, c — деяка стала, яка не залежить від ε.

Згідно з [3] існування і єдиність розв'язку задачі (1), (2) забезпечується умовою (17).

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
3. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
4. *Старун И. И.* О решении задачи Коши для сингулярно возмущенной линейной системы // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 5. — С. 715–718.
5. *Яковець В. П., Кочерга О. І.* Асимптотика розв'язку задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора // Доп. НАН України. — 1999. — № 5. — С. 34–39.
6. *Кочерга О. І., Яковець В. П.* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — С. 19–29.
7. *Kocherga O. I., Yakovets V. P.* The Cauchy problem for the degenerate singularly perturbed linear system in case of the multiple spectrum of the limit bundle of matrixes // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 2. — P. 226–233.

Одержано 29.10.07