УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ АВТОНОМНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ*

С. М. Чуйко, О. В. Старкова

Славян. пед. ун-т
Украина, 84 112, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

Using the least square method we construct a new iteration procedure for finding solutions as generalized Fourier polynomial expansions for an autonomous weakly nonlinear boundary-value problem in the critical case.

З використанням методу найменших квадратів побудовано нову ітераційну процедуру для знаходження розв'язків автономної слабконелінійної крайової задачі у критичному випадку у вигляді розвинення в узагальнений поліном Фур'є.

1. Постановка задачи. Исследуется задача о построении решений $z(t,\varepsilon): \ z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, $b(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, автономной краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = Az + f + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Решения нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1) ищем в малой окрестности решения $z_0(t) : z_0(\cdot) \in \in C^1[a, b^*]$, $b^* = b(0)$ порождающей задачи [1–3]

$$\frac{dz_0}{dt} = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Здесь A — постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, $Z(z,\varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы $\ell z(\cdot,\varepsilon)$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причем второй функционал непрерывно дифференцируем по неизвестной z и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$.

В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ при условии $P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$ задача (2) имеет [1, 2] семейство решений $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G[f;\alpha](t)$, $c_r \in \mathbb{R}^r$. Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $n - n_1 = r$, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2); $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$, составленная из $d = m - n_1$ линейно независимых строк

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (№ 0109U000381).

матрицы-ортопроектора P_{Q^*}, $G[f;\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} + K[f](t)$ — обобщенный оператор Грина задачи (2); Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1];

$$K[f](t) = X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для дифференциальной системы (2); I_n — единичная $(n \times n)$-матрица.

В критическом случае задача (1) существенно отличается от аналогичных неавтономных краевых задач; в отличие от последних правый конец $b(\varepsilon)$, $b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$, $\beta(0) = \beta^*$, промежутка $[a, b(\varepsilon)]$ неизвестен. Выполняя в задаче (1) замену переменных [3, 4]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon),$$

приходим к задаче об отыскании решения $x(\tau, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b^*]$ краевой задачи

$$\frac{dx}{d\tau} = Ax + \varepsilon\left\{\beta(\varepsilon)(A(z_0 + x) + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))Z(z_0 + x, \varepsilon)\right\}, \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\alpha\beta(\varepsilon) + \varepsilon[1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)]\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{4}$$

Здесь $\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b^*] \to \mathbb{R}^m$ — нелинейный векторный функционал. Обозначая

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), 0), \quad f_0(s, c^*) = \beta^*[Az_0(s, c_r^*) + f] + Z(z_0(s, c_r^*), 0),$$

аналогично [3] получаем необходимое условие разрешимости задачи (3), (4).

Лемма. *Если краевая задача (1) в критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) имеет решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(t, c_r^*)$, то вектор c^* удовлетворяет уравнению* $[3, 4]$

$$F(c^*) = P_{Q_d^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot)\} = 0, \quad c^* = \mathrm{col}\,(c_r^*,\ \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}. \tag{5}$$

Зафиксируем корень c^* уравнения (5) и разложим функцию $Z(z, \varepsilon)$ в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Z(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = Z(z_0(\tau, c_r^*), 0) + A_1(\tau)x(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon A_2(z_0(\tau, c_r^*)) + R_1(z_0(\tau, c_r^*) + x(\tau, \varepsilon), \varepsilon),$$

где $A_1(\tau) = Z'_z((z_0(\tau, c_r^*), 0)$, $A_2(z_0(\tau, c_r^*)) = Z'_\varepsilon((z_0(\tau, c_r^*), 0)$. Аналогично выделяем линейные части [5] $\ell_1 x(\cdot, \varepsilon) = \tilde{J}'_z(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$, $\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) = \tilde{J}'_\varepsilon(z_0(\cdot, c_r^*), 0)$ функционала $\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{J}(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \tag{6}$$

С учетом разложений нелинейностей задача (3), (4) принимает вид

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = Ax(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* Ax(\tau,\varepsilon) + A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*))+ \\ + \bar\beta(\varepsilon)[A(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon)) + f] + R_1(x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)+ \\ + \varepsilon\beta(\varepsilon)Z(z_0(\tau,c_r^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{7}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{\varphi_0(c^*) + \alpha\bar\beta(\varepsilon) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+ \\ + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}. \tag{8}$$

Здесь $\bar\beta(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) - \beta^*$ — непрерывная скалярная функция.

Обозначим матрицы

$$B_0 = P_{Q_d^*}\{\ell_1 X_r(\cdot)\, I_1 - \ell K[\bar A_1(s)](\cdot)\}, \quad \bar A_1(s) = \{[\beta^* A + A_1(s)]X_r(s);\, Az_0(s,c_r^*) + f\},$$

где $I_1 = \mathrm{col}\,(I_r, 0)$, и $P_{B_0} : \mathbb{R}^{r+1} \to N(B_0)$ — $P_{B_0^*} : \mathbb{R}^{r+1} \to N(B_0^*)$ — ортопроекторы [3, 4]. Для каждого простого ($P_{B_0^*} = 0$) корня уравнения (5) задача (1) имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(\tau,c_r^*)$. Для построения этого решения предложены итерационные схемы [3, 4], соответствующие методу простых итераций, однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений.

2. Итерационная схема. Целью данной работы является построение модифицированной итерационной процедуры для нахождения решений краевой задачи (7), (8) аналогично [6] с использованием метода наименьших квадратов [7], обеспечивающих большую точность при меньшем числе итераций. Пусть $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_\mu(\tau), \ldots$ — система линейно независимых непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Первое приближение $x_1(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon) + x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)$ ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{dx_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = Ax_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* Ax_1(\tau,\varepsilon)+ \\ + A_1(\tau)x_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) + \varepsilon\beta^* Z(z_0(\tau,c_r^*),\varepsilon)\}, \tag{9}$$

$$\ell x_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{\varphi_0(c^*) + \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + \varepsilon\beta^* J(z_0(\cdot,c_r^*),\varepsilon)\}. \tag{10}$$

Частное решение задачи (9), (10) ищем в виде $x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon)$, где $\varphi(\tau) = [\varphi_1(\tau)\,\varphi_2(\tau)\,\ldots\,\varphi_\mu(\tau)]$ — $(n\times\mu)$-матрица.

Потребуем, чтобы

$$\|[A + \varepsilon\beta^* A + \varepsilon A_1(\tau)]\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon[f_0(\tau,c^*) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) + \varepsilon\beta^* Z(z_0(\tau,c_r^*),\varepsilon)]\|^2_{L^2[a,b^*]}+ \\ + \|[\varepsilon\ell_1 - \ell]\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon[\varphi_0(c^*) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + \varepsilon\beta^* J(z_0(\cdot,c_r^*),\varepsilon)]\|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min.$$

Обозначим матрицы

$$\Phi_1(\tau,\varepsilon) = [A + \varepsilon\beta^* A + \varepsilon A_1(\tau)]\varphi(\tau) - \varphi'(\tau), \quad \Pi(\varepsilon) = [\varepsilon\ell_1 - \ell]\varphi(\cdot).$$

При условии $\det[\Gamma(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)) + \Gamma(\Pi(\varepsilon))] \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)) + \Gamma(\Pi(\varepsilon))]^{-1}\Bigg\{\int\limits_a^{b^*} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)[f_0(\tau,c^*) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) +$$

$$+ \varepsilon\beta^* Z(z_0(\tau,c_r^*),\varepsilon)]d\tau + \Pi^*(\varepsilon)[\varphi_0(c^*) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + \varepsilon\beta^* J(z_0(\cdot,c_r^*),\varepsilon)]\Bigg\},$$

где

$$\Gamma(\Phi_1(\cdot,\varepsilon)) = \int\limits_a^{b^*} \Phi_1^*(\tau,\varepsilon)\,\Phi_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \quad \Gamma(\Pi(\varepsilon)) = \Pi^*(\varepsilon)\,\Pi(\varepsilon).$$

Таким образом, найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение $\xi_1(\tau,\varepsilon)$ к решению задачи (9), (10).

Пусть $\psi_1(\varepsilon), \ldots, \psi_\lambda(\varepsilon), \ldots$ — система линейно независимых непрерывных функций. Обозначим $(1\times\lambda)$-матрицу $\Psi(\varepsilon) = [\psi_1(\varepsilon)\ \ldots\ \psi_\lambda(\varepsilon)]$. Первое приближение $\beta_1(\varepsilon) = \beta^* + \bar\beta_1(\varepsilon)$, $\bar\beta_1(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon)$, $\zeta_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\,q_1$, $q_1 \in \mathbb{R}^\lambda$, к функции $\beta(\varepsilon)$ определяет краевая задача

$$\frac{d\xi_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = A\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* A\xi_1(\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \bar\beta_1(\varepsilon)[A(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon)) + f] + A_1(\tau)\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) +$$

$$+ R_1(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon(\beta^* + \bar\beta_1(\varepsilon))Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{11}$$

$$\ell\xi_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{\varphi_0(c^*) + \alpha\bar\beta_1(\varepsilon) + \ell_1\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) +$$

$$+ J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon(\beta^* + \bar\beta_1(\varepsilon))J(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}. \tag{12}$$

Потребуем, чтобы

$$\Bigg\|\Bigg\|A\xi_1(\tau,\varepsilon) - \frac{d\xi_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau} + \varepsilon\{[A(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon)) + f] +$$

$$+ \varepsilon Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\bar\beta_1(\varepsilon) + \varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* A\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) +$$

$$+ R_1(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon[\beta^* + \bar\beta_1(\varepsilon)]Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\Bigg\|_{L[0,\varepsilon_0]}\Bigg\|^2_{L^2[a,b^*]} +$$

$$+\Big\|\varepsilon[\alpha+\varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\bar\beta_1(\varepsilon)+\varepsilon\{\varphi_0(c^*)+\ell_1\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+$$

$$+\varepsilon\beta^*J(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}\Big\|^2_{\mathbb{R}^m}\to\min.$$

Используя матрицы

$$\Upsilon_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\{[A(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon))+f]+\varepsilon Z(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}\Psi(\varepsilon),$$

$$\Omega_1(\varepsilon)=\varepsilon[\alpha+\varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\Psi(\varepsilon),$$

при условии $\det[\Gamma(\Upsilon_1(\cdot,\cdot))+\Gamma(\Omega_1(\varepsilon))]\neq 0$ находим вектор

$$q_1(\varepsilon)=-[\Gamma(\Upsilon_1(\cdot,\cdot))+\Gamma(\Omega_1(\varepsilon))]^{-1}\Bigg\{\int\limits_a^{b^*}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\Upsilon_1^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{A\xi_1(\tau,\varepsilon)-\frac{d\xi_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau}+$$

$$+\varepsilon[f_0(\tau,c^*)+\beta^*A\xi_1(\tau,\varepsilon)+\varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*))+R_1(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\beta^*Z(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\Bigg\}d\tau\,d\varepsilon-$$

$$-\varepsilon\Omega_1^*(\varepsilon)\{\varphi_0(c^*)+\ell_1\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\beta^*J(z_0(\cdot,c_r^*)+$$

$$+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}\Bigg\}.$$

Здесь

$$\Gamma(\Upsilon_1(\cdot,\cdot))=\int\limits_a^{b^*}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\Upsilon_1^*(\tau,\varepsilon)\,\Upsilon_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau\,d\varepsilon,\quad \Gamma(\Omega_1(\varepsilon))=\Omega_1^*(\varepsilon)\,\Omega_1(\varepsilon).$$

Таким образом, найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) первое приближение $\bar\beta_1(\varepsilon)\approx\zeta_1(\varepsilon)$ к функции $\bar\beta(\varepsilon)$.

Предположим, что найдено приближение

$$x_k(\tau,\varepsilon)=X_r(\tau)c_r(\varepsilon)+x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon),\quad x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_k(\tau,\varepsilon),\quad \xi_k(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_k(\varepsilon),$$

к решению краевой задачи (7), (8) и приближение

$$\beta_k(\varepsilon)=\beta^*+\bar\beta_k(\varepsilon),\quad \bar\beta_k(\varepsilon)\approx\zeta_1(\varepsilon)+\ldots+\zeta_k(\varepsilon),\quad \zeta_k(\varepsilon)=\Psi(\varepsilon)\,q_k(\varepsilon),\quad q_k(\varepsilon)\in\mathbb{R}^\lambda,$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее приближение $x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=X_r(\tau)c_r(\varepsilon)+x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)$ к решению задачи (7), (8) ищем, как решение краевой задачи

$$\frac{dx_{k+1}(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* Ax_{k+1}(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ (\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))[A(z_0(\tau,c_r^*) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon)) + f] + A_1(\tau)x_{k+1}(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{13}$$

$$\ell x_{k+1}(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{\varphi_0(c^*) + \alpha(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon)) + \ell_1 x_{k+1}(\cdot,\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))J(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\} \tag{14}$$

в виде

$$x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu}.$$

Обозначим $(n \times \mu)$-матрицу

$$\Phi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = [A + \varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))A + \varepsilon A_1(\tau)]\varphi(\tau) - \varphi'(\tau).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\Phi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) + \Gamma(\Pi(\varepsilon))] \neq 0, \quad \Gamma(\Phi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int_a^{b^*} \Phi_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\,\Phi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -[\Gamma(\Phi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) + \Gamma(\Pi(\varepsilon))]^{-1} \times$$
$$\times \left\{ \int_a^{b^*} \Phi_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\{A(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon)) - (\xi_1'(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k'(\tau,\varepsilon)) + \right.$$
$$+ \varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* A(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon)) + A_1(\tau)(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon)) +$$
$$+ (\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))[A(z_0(\tau,c_r^*) + (\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon))) + f] +$$
$$+ \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}d\tau +$$
$$+ \Pi^*(\varepsilon)\{\varepsilon\{\varphi_0(c^*) + \alpha(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon)) +$$
$$+ \ell_1(\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\,\varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))J(z_0(\cdot, c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+$$

$$\left.+\,\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot, c_r^*)) - \ell_1(\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon))\}\right\},$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon).$$

Следующее приближение

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \bar\beta_{k+1}(\varepsilon), \quad \bar\beta_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \psi(\varepsilon)\, q_{k+1}(\varepsilon),$$

к функции $\beta(\varepsilon)$ определяет краевая задача

$$\frac{d}{d\tau}\,(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) = A(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon))+$$

$$+\,\varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* A(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*))+$$

$$+\,\bar\beta_{k+1}(\varepsilon)[A(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) + f]+$$

$$+\,A_1(\tau)(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots$$

$$\ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\beta_{k+1}(\varepsilon)Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\}, \qquad (15)$$

$$\ell(\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \varepsilon\{\varphi_0(c^*) + \alpha\bar\beta_{k+1}(\varepsilon)+$$

$$+\,\ell_1(\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\,\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + \varepsilon\beta_{k+1}(\varepsilon)J(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}. \qquad (16)$$

Обозначим матрицы

$$\Upsilon_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\{[A(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)) + f]+$$

$$+\,\varepsilon Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)\}\,\Psi(\varepsilon),$$

$$\Omega_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon[\alpha + \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)]\,\Psi(\varepsilon).$$

Необходимое условие минимизации невязок в решении краевой задачи (15), (16) приводит к однозначно разрешимому уравнению

$$q_{k+1}(\varepsilon) = -[\Gamma(\Upsilon_{k+1}(\cdot,\cdot)) + \Gamma(\Omega_{k+1}(\varepsilon))g]^{-1}\left\{\int\limits_a^{b^*}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\Upsilon_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\times\right.$$

$$\times \Bigg\{ A[\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)] - \frac{d}{d\tau}[\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)] +$$

$$+\varepsilon[f_0(\tau,c^*)+\beta^* A[\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)]+\varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*))+$$

$$+R_1(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\beta^* Z(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\Bigg\}\, d\tau\, d\varepsilon-$$

$$-\varepsilon\Omega_{k+1}^*(\varepsilon)\Bigg\{\varphi_0(c^*)+\ell_1[\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)]+$$

$$+\varepsilon\beta^* J(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+$$

$$+J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}\Bigg\}$$

при условии $\det[\Gamma(\Upsilon_{k+1}(\cdot,\cdot))+\Gamma(\Omega_{k+1}(\varepsilon))]\neq 0$; здесь

$$\Gamma(\Upsilon_{k+1}(\cdot,\cdot)) = \int_a^{b^*}\int_0^{\varepsilon_0} \Upsilon_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\,\Upsilon_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau\,d\varepsilon, \quad \Gamma(\Omega_{k+1}(\varepsilon)) = \Omega_{k+1}^*(\varepsilon)\,\Omega_{k+1}(\varepsilon).$$

Таким образом, найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) $(k+1)$-е приближение $\bar\beta_{k+1}(\varepsilon)$ к функции $\bar\beta(\varepsilon)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для каждого простого корня $c^* = \operatorname{col}(c_r^*,\beta^*)$ уравнения (5) задача (7), (8) имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon=0$ обращающееся в порождающее $z_0(\tau,c_r^*)$. При условии*

$$\det[\Gamma(\Phi_k(\cdot,\varepsilon))+\Gamma(\Pi(\varepsilon))]\neq 0, \quad \det[\Gamma(\Upsilon_k(\cdot,\cdot))+\Gamma(\Omega_k(\varepsilon))]\neq 0, \quad k\in\mathbb{N},$$

это решение можно определить с помощью итерационного процесса

$$x_1(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon)+x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi(\tau)c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\Phi_1(\cdot,\varepsilon))+\Gamma(\Pi(\varepsilon))]^{-1}\Bigg\{\int_a^{b^*}\Phi_1^*(\tau,\varepsilon)[f_0(\tau,c^*)+\varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*))+$$

$$+\varepsilon\beta^* Z(z_0(\tau,c_r^*),\varepsilon)]\,d\tau+\Pi^*(\varepsilon)[\varphi_0(c^*)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+\varepsilon\beta^* J(z_0(\cdot,c_r^*),\varepsilon)]\Bigg\},$$

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_1(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_1(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon), \quad \zeta_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\, q_1,$$

$$q_1(\varepsilon) = -[\Gamma(\Upsilon_1(\cdot,\cdot)) + \Gamma(\Omega_1(\varepsilon))]^{-1}\Bigg\{\int\limits_a^{b^*}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\Upsilon_1^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{A\xi_1(\tau,\varepsilon) - \frac{d\xi_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau} +$$

$$+\,\varepsilon[f_0(\tau,c^*) + \beta^* A\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\,\varepsilon\beta^* Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\Bigg\}d\tau\, d\varepsilon - \varepsilon\Omega_1^*(\varepsilon)\{\varphi_0(c^*) + \ell_1\xi_1(\cdot,\varepsilon) +$$

$$+\,\varepsilon\beta^* J(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}\Bigg\},$$

. . . .

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = X_r(\tau)c_r(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \tag{17}$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = -[\Gamma(\Phi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) + \Gamma(\Pi(\varepsilon))]^{-1}\times$$

$$\times\Bigg\{\int\limits_a^{b^*}\Phi_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\{A(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon)) - (\xi_1'(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k'(\tau,\varepsilon)) +$$

$$+\,\varepsilon\{f_0(\tau,c^*) + \beta^* A(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon)) + A_1(\tau)(\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon)) +$$

$$+\,(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))[A(z_0(\tau,c_r^*) + (\xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon))) + f] +$$

$$+\,\varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*)) + R_1(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\,\varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))Z(z_0(\tau,c_r^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\}d\tau +$$

$$+\,\Pi^*(\varepsilon)\{\varepsilon\{\varphi_0(c^*) + \alpha(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon)) +$$

$$+\,\ell_1(\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon)) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) +$$

$$+\,\varepsilon(\beta^* + \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon))J(z_0(\cdot,c_r^*) + \xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\} +$$

$$+\,\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*)) - \ell_1(\xi_1(\cdot,\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\cdot,\varepsilon))\}\Bigg\}, \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\, q_{k+1}(\varepsilon),$$

$$q_{k+1}(\varepsilon) = -[\Gamma(\Upsilon_{k+1}(\cdot,\cdot)) + \Gamma(\Omega_{k+1}(\varepsilon))]^{-1}\Bigg\{\int\limits_a^{b^*}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\Upsilon_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times \Bigg\{ A[\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)] - \frac{d}{d\tau}\,[\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)]+$$

$$+\,\varepsilon[f_0(\tau,c^*)+\beta^* A[\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)]+\varepsilon A_2(z_0(\tau,c_r^*))+$$

$$+\,R_1(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)+$$

$$+\,\varepsilon\beta^* Z(z_0(\tau,c_r^*)+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)]\Bigg\}\,d\tau\,d\varepsilon-$$

$$-\,\varepsilon\Omega_{k+1}^*(\varepsilon)\{\varphi_0(c^*)+\ell_1[\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon)]+$$

$$+\,\varepsilon\beta^* J(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\ell_2(z_0(\cdot,c_r^*))+$$

$$+\,J_1(z_0(\cdot,c_r^*)+\xi_1(\cdot,\varepsilon)+\ldots+\xi_{k+1}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}\Bigg\},\ldots,k\in\mathbb{N}.$$

При этом задача (1) имеет по меньшей мере одно решение, которое может найдено с помощью итерационного процесса (17) по формуле

$$z_k(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r^*)+x_k(t,\varepsilon),\quad k\in\mathbb{N}.$$

Найти оценку ε_* длины отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (17), можно по формуле [8].

3. Периодическая задача для уравнения Льенара. Исследуем далее задачу о нахождении решения автономной периодической краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\varepsilon\,Y(y,\varepsilon)\,\frac{dy}{dt},\quad y(0,\varepsilon)-y(T_1(\varepsilon),\varepsilon)=0,\quad \frac{dy(0,\varepsilon)}{dt}-\frac{dy(T_1(\varepsilon),\varepsilon)}{dt}=0. \tag{18}$$

Решение задачи (18) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}+y_0=0,\quad y_0(0)-y_0(2\pi)=0,\quad \frac{dy_0(0)}{dt}-\frac{dy_0(2\pi)}{dt}=0. \tag{19}$$

Здесь $Y(y,\varepsilon)-$ нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Любое решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (18) существует наряду с серией решений $z(t+h,\varepsilon)$. Этот факт позволяет [9] зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи (19) стало однопараметричным, например $y_0(t)=\hat{c}\cos t$, $\hat{c}\in\mathbb{R}^1$. Предположим, что для задачи (18) имеет место критический случай и доказана однозначная разрешимость задачи (18) в окрестности решения $y_0(t,\hat{c}^*)$. Замены переменных $y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,\hat{c}^*)+x(\tau,\varepsilon)$ и $t=\tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))$ приводят к задаче о нахождении решения периодической задачи

$$x''(\tau,\varepsilon)+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2x(\tau,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\,Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\,y'(\tau,\varepsilon)-\{y_0''(\tau,\hat{c}^*)+(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2y_0(\tau,\hat{c}^*)\}, \tag{20}$$

$$x(0,\varepsilon) - x(2\pi,\varepsilon) = 0, \quad x'(0,\varepsilon) - x'(2\pi,\varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Разлагаем функцию $Y(y,\varepsilon)$ в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))x(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*)) + \mathcal{R}(y_0(\tau,\hat{c}^*) + x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где $\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*)) = Y'_y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)$, $\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*)) = Y'_\varepsilon(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)$.

Первое приближение $y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_1(\tau,\varepsilon)$ к решению задачи (20), (21) ищем, как решение краевой задачи

$$x_1''(\tau,\varepsilon) + x_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\{Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)(y_0'(\tau,\hat{c}^*) + x_1'(\tau,\varepsilon)) + \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))y_0'(\tau,\hat{c}^*)x_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))(y_0'(\tau,\hat{c}^*) + x_1'(\tau,\varepsilon))\}, \tag{22}$$

$$x_1(0,\varepsilon) - x_1(2\pi,\varepsilon) = 0, \quad x_1'(0,\varepsilon) - x_1'(2\pi,\varepsilon) = 0. \tag{23}$$

Пусть $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_\mu(\tau), \ldots$ — система линейно независимых дважды непрерывно дифференцируемых скалярных функций. Приближение к решению краевой задачи (22), (23) ищем в виде $x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon)$. Потребуем, чтобы

$$\|[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))y_0'(\tau,\hat{c}^*) - 1]\xi_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]\xi_1'(\tau,\varepsilon) - \\ - \xi_1''(\tau,\varepsilon) + \varepsilon[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]y_0'(\tau,\hat{c}^*)\|^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Обозначим матрицу

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon) = [\varepsilon\mathcal{A}_1(y_0(\tau,\hat{c}^*))y_0'(\tau,\hat{c}^*) - 1]\varphi(\tau) + \varepsilon[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]\varphi'(\tau) - \varphi''(\tau).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]y_0'(\tau,\hat{c}^*)\,d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение $\xi_1(\tau,\varepsilon)$ к решению краевой задачи (22), (23). Пусть $\psi_1(\varepsilon), \psi_2(\varepsilon), \ldots \psi_\lambda(\varepsilon), \ldots$ — система линейно независимых непрерывных функций. Положим для простоты $\beta^* = 0$. Первое приближение

$\beta_1(\varepsilon) = \bar{\beta}_1(\varepsilon)$, $\bar{\beta}_1(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon)$, $\zeta_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_1$, $q_1 \in \mathbb{R}^\lambda$, к функции $\beta(\varepsilon)$ определим, минимизируя невязку в решении краевой задачи

$$y_0''(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1''(\tau, \varepsilon) + (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) = \\ = \varepsilon(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon)(y_0'(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1'(\tau, \varepsilon)), \tag{24}$$

$$\xi_1(0, \varepsilon) - \xi_1(2\pi, \varepsilon) = 0, \quad \xi_1'(0, \varepsilon) - \xi_1'(2\pi, \varepsilon) = 0. \tag{25}$$

Потребуем, чтобы

$$\| \| \varepsilon(1 + \varepsilon\beta_1(\varepsilon))Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon)(y_0'(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1'(\tau, \varepsilon)) - \\ - (y_0''(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1''(\tau, \varepsilon)) - \\ - (1 + 2\varepsilon\beta_1(\varepsilon))(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) \|_{L[0,\varepsilon_0]} \|^2_{L^2[a,b^*]} \to \min.$$

Обозначим матрицу

$$\mathfrak{F}_1(\tau, \varepsilon) = \varepsilon\{\varepsilon\, Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon)(y_0'(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1'(\tau, \varepsilon)) - 2(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon))\}\Psi(\varepsilon).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot, \cdot))] \neq 0, \quad \Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot, \cdot)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau, \varepsilon)\mathfrak{F}_1(\tau, \varepsilon)\, d\tau\, d\varepsilon,$$

находим вектор

$$q_1 = [\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot, \cdot))]^{-1} \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}_1^*(\tau, \varepsilon)\{(y_0''(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1''(\tau, \varepsilon)) + \\ + (y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon)) - \varepsilon Y(y_0(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1(\tau, \varepsilon), \varepsilon)(y_0'(\tau, \hat{c}^*) + \xi_1'(\tau, \varepsilon))\}\, d\tau\, d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) первое приближение $\zeta_1(\varepsilon)$ к функции $\bar{\beta}(\varepsilon)$. Продолжая рассуждения, предполагаем, что найдено приближение

$$x_k(\tau, \varepsilon) \approx \xi_1(\tau, \varepsilon) + \ldots + \xi_k(\tau, \varepsilon), \quad \xi_k(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau)c_k(\varepsilon), \quad c_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

к решению краевой задачи (20), (21) и приближение

$$\beta_k(\varepsilon) = \beta^* + \bar{\beta}_k(\varepsilon), \quad \bar{\beta}_k(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \ldots + \zeta_k(\varepsilon), \quad \zeta_k(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)q_k(\varepsilon), \quad q_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\lambda,$$

к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее приближение к решению задачи (20), (21) ищем в виде

$$x_{k+1}(\tau, \varepsilon) \approx \xi_1(\tau, \varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \quad c_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^\mu.$$

Предположим, что найденное приближение $y_k(\tau,\varepsilon) \approx y_0(\tau,\hat{c}^*) + x_k(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Разлагаем функцию $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon))\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon)) + \\ + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где $\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon)) = Y'_y(y_k(\tau,\varepsilon),0)$, $\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))) = Y'_\varepsilon(y_k(\tau,\varepsilon),0)$.

Матрица имеет вид

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))]\varphi'(\tau) + \\ + (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))[\varepsilon\mathcal{A}_1(y_k(\tau,\varepsilon)) - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))]\varphi(\tau) - \varphi''(\tau).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))] \neq 0, \quad \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

находим вектор

$$c_{k+1}(\varepsilon) = [\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0) + \\ + \varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))]\frac{dy_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau} - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Bigg\}d\tau,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) $(k+1)$-е приближение $x_{k+1}(\tau,\varepsilon)$ к решению задачи (20), (21). Обозначим $(1\times\lambda)$-матрицу

$$\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\{\varepsilon Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)y'_{k+1}(\tau,\varepsilon) - 2y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\}\Psi(\varepsilon).$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))] \neq 0, \quad \Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot)) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\mathfrak{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau\,d\varepsilon,$$

находим вектор

$$q_{k+1} = [\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon_0} \mathfrak{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\{y''_{k+1}(\tau,\varepsilon) + \\ + (1+2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))y_{k+1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)y'_{k+1}(\tau,\varepsilon)\}\,d\tau\,d\varepsilon,$$

определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение $\bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon)$ к функции $\bar{\beta}(\varepsilon)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие. *Для каждого простого корня уравнения (5) задача (20), (21) имеет единственное 2π-периодическое решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(\tau, c_r^*)$. При условии $\det[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon))] \neq 0$, $\det[\Gamma(\mathfrak{F}_k(\cdot,\cdot))] \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, это решение можно определить с помощью итерационного процесса*

$$x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_1(\varepsilon),$$

$$c_1(\varepsilon) = -\varepsilon[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)[Y(y_0(\tau,\hat{c}^*),0)+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_0(\tau,\hat{c}^*))]y_0'(\tau,\hat{c}^*)d\tau, \quad \bar{\beta}_1(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon),$$

$$\zeta_1(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\,q_1,$$

$$q_1 = [\Gamma(\mathfrak{F}_1(\cdot,\cdot))]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\{(y_0''(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1''(\tau,\varepsilon)) +$$

$$+ (y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon)) - \varepsilon Y(y_0(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)(y_0'(\tau,\hat{c}^*) + \xi_1'(\tau,\varepsilon))\}\,d\tau\,d\varepsilon,$$

. . . .

$$x_{k+1}(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ldots + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau)c_{k+1}(\varepsilon), \tag{26}$$

$$c_{k+1}(\varepsilon) = [\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\Big\{\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2(y_k(\tau,\varepsilon))]\frac{dy_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau} - (1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))^2 y_k(\tau,\varepsilon) - \frac{d^2y_k(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}\Big\}\,d\tau,$$

$$\bar{\beta}_{k+1}(\varepsilon) \approx \zeta_1(\varepsilon) + \zeta_2(\varepsilon) + \ldots + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)\,q_{k+1}(\varepsilon),$$

$$q_{k+1} = [\Gamma(\mathfrak{F}_{k+1}(\cdot,\cdot))]^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\mathfrak{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon)\{y_{k+1}''(\tau,\varepsilon) + (1+2\varepsilon\beta_k(\varepsilon))y_{k+1}(\tau,\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))Y(y_{k+1}(\tau,\varepsilon),\varepsilon)y_{k+1}'(\tau,\varepsilon)\}\,d\tau\,d\varepsilon,\ldots, k = 1,2,\ldots.$$

С учетом замены независимой переменной итерационня схема (17) определяет приближенное решение периодической задачи для уравнения Льенара (18).

Пример. Схема (17) применима для построения периодического решения уравнения Ван-дер-Поля $y'' + y = \varepsilon(1 - y^2)y'$, частного случая уравнения Льенара.

Как известно [9–11], периодическая задача для уравнения Ван-дер-Поля имеет единственное решение в малой окрестности порождающего решения $y_0(t, \hat{c}^*) = 2\cos t$, при этом известна величина $\beta^* = 0$. Условия доказанного следствия в данном случае выполнены. Положим

$$\varphi(\tau) = [\sin\tau \ \sin 3\tau \ \sin 5\tau \ \sin 7\tau \ \cos\tau \ \cos 5\tau \ \cos 7\tau], \quad \Psi(\varepsilon) = [\varepsilon \ \varepsilon^2 \ \varepsilon^3 \ \varepsilon^4 \ \varepsilon^5].$$

Соответствующие матрицы Грама при этом невырождены. Схема (26) определяет второе приближение к решению периодической задачи для уравнения Ван-дер-Поля

$$y_2(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, \hat{c}^*) + x_2(\tau, \varepsilon), \quad x_2(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon) + \xi_2(\tau, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned}
x_2(\tau, \varepsilon) = {} & \frac{1}{4}\,\varepsilon(\sin\tau - \sin 3\tau) + \varepsilon^2\left(\frac{899\cos\tau}{35\,001\,155\,456} - \frac{5}{96}\cos 5\tau\right) + \\
& + \varepsilon^3\left(-\frac{132\,148\cos\tau}{214\,671\,890\,489} + \frac{27\,029\,033\sin\tau}{675\,066\,048} - \right. \\
& - \frac{11\,303\,617\sin 3\tau}{551\,185\,119} - \frac{5\sin 5t}{768} + \frac{7\sin 7\tau}{1\,536} + \\
& \left. + \frac{-397\sin\tau + 297\sin 3\tau + 100\sin 5\tau + 70\sin 7\tau}{9\,216}\right) + \\
& + \varepsilon^4\left(-\frac{4\,921\,502\cos\tau}{358\,183\,803} - -\frac{4\,997\,742\cos 5\tau}{779\,012\,549} - \frac{7\cos 7\tau}{8\,192} + \right. \\
& + \frac{4\,293\cos\tau + 9\,196\cos 5\tau + 2\,380\cos 7\tau}{884\,736} - \\
& \left. - \frac{64\,438\sin\tau}{85\,161\,984\,421} + \frac{48\,214\sin 3\tau}{69\,620\,174\,635}\right) + \\
& + \varepsilon^5\left(-\frac{871\,605\cos\tau}{88\,537\,950\,218} + \frac{109\,806\cos 5\tau}{448\,670\,523\,749} - \right. \\
& - \frac{20\,219\,919\sin\tau}{882\,472\,181} + \frac{16\,378\,650\sin 3\tau}{915\,705\,529} + \frac{2\,768\,357\sin 5\tau}{1\,033\,444\,703} + \\
& + \frac{197\,173\sin\tau - 138\,573\sin 3\tau - 58\,600\sin 5\tau - 46\,366\sin 7\tau}{21\,233\,664} + \\
& \left. + \frac{405\,642\sin 7\tau}{982\,568\,335}\right) +
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon^6\left(-\frac{13\,690\,033\cos\tau}{248\,969\,657}+\frac{6\,232\,511\cos 5\tau}{814\,560\,282}+\right.$$

$$+\frac{-5\,867\,397\cos\tau-4\,460\,092\cos 5\tau-1\,576\,804\cos 7\tau}{2\,038\,431\,744}+$$

$$+\frac{2\,026\,915\cos 7\tau}{2\,677\,895\,057}-\frac{322\,661\sin\tau}{26\,749\,532\,113}+\frac{532\,585\sin 3\tau}{48\,519\,042\,509}-$$

$$\left.-\frac{11\,240\sin 5\tau}{372\,018\,596\,053}-\frac{33\,919\sin 7\tau}{410\,626\,823\,395}\right)+$$

$$+\varepsilon^7\left(\frac{299\,313\cos\tau}{115\,975\,666\,234}+\frac{220\,751\cos 5\tau}{57\,101\,647\,056}-\frac{6\,365\cos 7\tau}{403\,262\,449\,581}-\right.$$

$$-\frac{30\,543\,613\sin\tau}{903\,084\,625}++\frac{37\,701\,926\sin 3\tau}{1\,842\,038\,921}-\frac{2\,496\,003\sin 5\tau}{2\,480\,867\,225}-\frac{3\,715\,250\sin 7\tau}{1\,803\,235\,669}+$$

$$\left.+\frac{-147\,152\,989\sin\tau+116\,416\,989\sin 3\tau+30\,736\,000\sin 5\tau+25\,022\,662\sin 7\tau}{48\,922\,361\,856}\right),$$

а также первое приближение

$$T_{1_1}(\varepsilon)=2\pi(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)),$$

$$\beta_1(\varepsilon)=\frac{13\,003\,166\varepsilon}{208\,050\,485}-\frac{122\,527\varepsilon^2}{99\,521\,339\,394}-$$

$$-\frac{200\,790\,895\varepsilon^3}{9\,953\,428\,871}-\frac{489\,085\varepsilon^4}{24\,436\,693\,638}+\frac{1\,962\,509\varepsilon^5}{9\,799\,331\,498}$$

к функции $T_1(\varepsilon)$. Для проверки точности найденных приближений введем невязку

$$\Delta_2(\varepsilon):=\|y_2''(\tau,\varepsilon)+(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))^2y_2(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))(1-y_2^2(\tau,\varepsilon))y_2'(\tau,\varepsilon)\|_{C[0;2\pi]}.$$

Для сравнения приведем невязки

$$\Delta_h(\varepsilon):=\|y_h''(\tau,\varepsilon)+(1+\varepsilon\beta_h(\varepsilon))^2y_h(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon(1+\varepsilon\beta_h(\varepsilon))(1-y_h^2(\tau,\varepsilon))y_h'(\tau,\varepsilon)\|_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_a(\varepsilon):=\|y_h''(\tau,\varepsilon)+(1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon))^2\,y_a(\tau,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon(1+\varepsilon\beta_a(\varepsilon))(1-y_a^2(\tau,\varepsilon))y_a'(\tau,\varepsilon)\|_{C[0;2\pi]}$$

решения уравнения Ван-дер-Поля

$$y_a(\tau,\varepsilon) = 2\cos\tau + \left(\frac{3\sin\tau}{4} - \frac{\sin 3\tau}{4}\right)\varepsilon +$$
$$+ \left(-\frac{\cos\tau}{8} + \frac{3\cos 3\tau}{16} - \frac{5\cos 5\tau}{96}\right)\varepsilon^2 +$$
$$+ \left(\frac{7\sin\tau}{256} + \frac{21\sin 3\tau}{256} - \frac{35\sin 5\tau}{576} + \frac{7\sin 7\tau}{576}\right)\varepsilon^3 +$$
$$+ \left(\frac{73\cos\tau}{12\,288} - \frac{47\cos 3\tau}{1\,536} + \frac{1\,085\cos 5\tau}{27\,648} + \frac{2149\cos 7\tau}{110\,592} + \frac{61\cos 9\tau}{20\,480}\right)\varepsilon^4,$$

$$\beta_a(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{16} - \frac{5\varepsilon^3}{3\,072} - \frac{431\varepsilon^5}{884\,736} + \frac{557\,039\varepsilon^7}{5\,096\,079\,360} +$$
$$+ \frac{51\,720\,623\varepsilon^9}{9\,172\,942\,848\,000} - \frac{61\,760\,513\,621\,111\varepsilon^{11}}{36\,985\,305\,563\,136\,000\,000},$$

найденного в статье [10], и решения

$$y_h(\tau,\varepsilon) = 2\cos\tau + \left(\frac{3\sin\tau}{4} - \frac{\sin 3\tau}{4}\right)\varepsilon +$$
$$+ \left(-\frac{\cos\tau}{8} + \frac{3\cos 3\tau}{16} - \frac{5\cos 5\tau}{96}\right)\varepsilon^2, \quad \beta_h(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8},$$

приведенного в монографии [11]. Для $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,01$ эти невязки составляют

$$\Delta_2(0,1) \approx 0,0000\,301\,651, \quad \Delta_a(0,1) \approx 0,000\,202, \quad \Delta_h(0,1) \approx 0,0032\,875;$$

$$\Delta_2(0,01) \approx 3,07\,125\cdot 10^{-9}, \quad \Delta_a(0,01) \approx 2,01\,398\cdot 10^{-8}, \quad \Delta_h(0,01) \approx 0,000\,025\,054.$$

Таким образом, найденные с использованием метода наименьших квадратов приближения к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля $y_2(\tau,\varepsilon)$ и функции $T_1(\varepsilon)$ превышают по точности приближения к периодическому решению уравнения Ван-дер-Поля $y_h(\tau,\varepsilon)$ и $y_a(\tau,\varepsilon)$, полученные с помощью метода метода Ляпунова – Пуанкаре [11] и метода Галеркина [10].

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
3. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 10. — С. 1668 – 1674.
4. *Чуйко С. М., Бойчук И. А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 405 – 416.

5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.

6. *Чуйко С. М.* Модифицированный метод простых итераций для критической краевой задачи // Динам. системы. — 2008. — **25**. — С. 145 – 158.

7. *Чуйко С. М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 4. — С. 554 – 573.

8. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры автономной краевой задачи // Там же. — 2006. — **9**, № 3. — С. 416 – 432.

9. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

10. *Andersen C. M., Geer J. F.* Power expansion for the Frequency and period of limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math. — 1982. — **42**. — P. 678 – 693.

11. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.

Получено 20.09.09