УДК 517.9

# ПРО ПЕРМАНЕНТНІСТЬ ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМ ХИЖАК-ЖЕРТВА З ВІКОВОЮ СТРУКТУРОЮ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

**Ю. М. Мисло, В. І. Ткаченко**

*Ін-т математики НАН України*
*Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3*

*We find permanence conditions for a periodic predator-prey system with a stage structure, an impulsive effect, and a Beddington – DeAngelis functional response.*

*Получены условия перманентности периодической системы хищник-жертва с возрастной структурой жертвы, импульсным воздействием и функцией влияния Беддингтона – Деангелиса.*

**Вступ та основні результати.** Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)x_1y}{k_1(t) + m_1(t)x_1 + n_1(t)y}, \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)x_2y}{k_2(t) + m_2(t)x_2 + n_2(t)y}, \tag{2}$$

$$\dot{y} = y\left(-q(t) - g(t)y(t) + \frac{h_3(t)x_1}{k_1(t) + m_1(t)x_1 + n_1(t)y} + \frac{h_4(t)x_2}{k_2(t) + m_2(t)x_2 + n_2(t)y}\right) \tag{3}$$

при $t \neq t_k$ з імпульсною дією

$$x_1(t_k + 0) = (1 + d_{1k})x_1(t_k), \tag{4}$$

$$x_2(t_k + 0) = (1 + d_{2k})x_2(t_k), \tag{5}$$

$$y(t_k + 0) = (1 + d_{3k})y(t_k) \tag{6}$$

у моменти часу $t_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Припускаємо, що виконуються наступні умови:

$C_1$) функції $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $k_j(t)$, $m_j(t)$, $n_j(t)$, $q(t)$, $g(t)$, $j = 1, 2$, $h_k(t)$, $k = 1, \ldots, 4$, кусково-неперервні $T$-періодичні та додатнозначні;

$C_2$) послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову періодичності $t_{k+p} - t_k = T$, $k \in \mathbb{Z}$, з деяким натуральним числом $p$;

$C_3$) $d_{j,k+p} = d_{jk}$, $d_{jk} \in (-1, d\,]$, для всіх $j = 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Позначимо $a^L = \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t)$, $a^M = \sup_{t\in\mathbb{R}} a(t)$. Вважаємо, що розв'язки системи неперервні зліва.

Система рівнянь (1) – (6) описує еволюцію біологічної системи хижак-жертва з віковою структурою жертви. Тут через $y(t)$ позначено щільність популяції хижаків (тобто кількість особин, що припадає на одиницю площі) в момент часу $t$. Популяція жертв складається з незрілих особин із щільністю $x_1(t)$ та зрілих із щільністю $x_2(t)$. Періодичні функції в системі мають наступне біологічне значення. Народжуваність у популяції незрілих жертв задається $a_1(t)x_2$, тобто приймається пропорційною до існуючої популяції зрілих жертв з коефіцієнтом пропорційності $a_1(t)$. Інтенсивність переходів від незрілих індивідів до зрілих припускається пропорційною до існуючої популяції незрілих жертв з коефіцієнтом пропорційності $a_2(t)$. Показники смертності незрілої та зрілої популяцій задаються виразами $b_1(t)x_1 + c_1(t)x_1^2$ і $b_2(t)x_2 + c_2(t)x_2^2$ відповідно. Припускаємо, що функції впливу мають форму Беддінгтона – Деангеліса [1, 2]. Якщо популяції зазнають короткотривалих змін із певною періодичністю, наприклад збір врожаю чи риболовля, то ці зміни моделюються у формі імпульсів (4) – (6).

**Означення 1.** *Система рівнянь (1) – (6) називається перманентною, якщо існують додатні сталі $m$ і $M$ такі, що для кожного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ з додатними початковими значеннями існує момент часу $t_1$ такий, що*

$$m \le x_1(t) \le M, \quad m \le x_2(t) \le M, \quad m \le y(t) \le M$$

*для всіх $t \ge t_1$.*

Системи хижак-жертва з віковою структурою, починаючи з [3], досліджувались у роботах [4 – 9]. У роботах [6, 7, 9] вивчалася наступна система хижак-жертва з віковою структурою:

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - p(t)\phi(t, x_1)x_1 y, \tag{7}$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - c_2(t)x_2^2, \tag{8}$$

$$\dot{y} = y(-q(t) - h(t)\phi(t, x_1)x_1) \tag{9}$$

з додатними неперервними $T$-періодичними функціями у правій частині і різними видами функції впливу $\phi(t, x_1)$.

У роботі [5] доведено, що система (7), (8) при $y \equiv 0$ має єдиний додатний періодичний розв'язок $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, глобально асимптотично стійкий відносно додатного квадранта $R_+^2 = \{(x_1, x_2) : \; x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Очевидно, що така система є перманентною. Цей факт дозволив отримати необхідну та достатню умову перманентності системи хижак-жертва (7) – (9): цією умовою є додатність середнього значення

$$\int\limits_0^T (-g(t) + h(t)\phi(t, x_1^*(t))x_1^*(t))\, dt > 0$$

(див. вказані вище роботи).

У випадку системи з імпульсною дією підсистема, яка описує динаміку жертви (рівняння (1), (2), (4), (5) при $y \equiv 0$) може мати значно складнішу поведінку. Тому спочатку ми дослідимо таку двовимірну систему з імпульсами і знайдемо умови її перманентності та умови існування єдиного додатного глобально стійкого періодичного розв'язку.

Сформулюємо тепер умови перманентності системи рівнянь (1) – (6).

**Теорема 1.** *При виконанні умови*

$$\int_0^T A_1(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+p_k) > 0, \tag{10}$$

*де* $A_1(t) = \min\left\{a_2(t) - b_1(t) - \dfrac{h_1(t)}{n_1(t)},\ a_1(t) - b_2(t) - \dfrac{h_2(t)}{n_2(t)}\right\}$, $p_k = \min\{d_{1k}, d_{2k}\}$, *існує* $\delta_1 > > 0$ *таке, що для всіх додатнозначних розв'язків* $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ *виконується*

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \geq \delta_1, \quad \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \geq \delta_1. \tag{11}$$

*Якщо, крім того, виконується нерівність*

$$\int_0^T \left(-q(t) + \frac{h_3(t)\delta_1}{k_1(t)+m_1(t)\delta_1} + \frac{h_4(t)\delta_1}{k_2(t)+m_2(t)\delta_1}\right) dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+d_{3k}) > 0,$$

*то існує* $\delta_2 > 0$ *таке, що для* $y(t)$ *виконується оцінка*

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) \geq \delta_2.$$

Якщо підсистема (1), (2), (4), (5) при $y \equiv 0$ має глобально стійкий періодичний розв'язок, отримуємо необхідну та достатню умову перманентності системи (1) – (6), аналогічну наведеній вище умові для системи без імпульсів.

**Теорема 2.** *Нехай підсистема (1), (2), (4), (5) (при* $y \equiv 0$*) має єдиний додатнозначний глобально експоненціально стійкий* $T$*-періодичний розв'язок* $(x_1^*(t), x_2^*(t))$.

*Система (1) – (6) перманентна тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\int_0^T \left(-q + \frac{h_3 x_1^*}{k_1+m_1x_1^*} + \frac{h_4 x_2^*}{k_2+m_2x_2^*}\right) dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+d_{3k}) > 0. \tag{12}$$

**Допоміжні результати.**

**Лема 1.** *Додатний конус* $\mathcal{K} = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0\}$ *є додатно інваріантним відносно системи (1) – (6).*

***Доведення.*** На межі конуса $\mathcal{K}$ векторне поле, утворене системою, направлене всередину конуса. Тому в точках неперервності траєкторія системи не може вийти за межі конуса. Оскільки величини $1 + d_{jk}$ додатні, в точках імпульсної дії невід'ємні траєкторії системи також залишаються в конусі.

Лему доведено.

У подальшому нам будуть потрібні наступні допоміжні рузультати.

Розглянемо логістичне рівняння з імпульсною дією

$$\begin{gathered} \dot{z} = az(b-z), \quad t \neq t_k, \\ z(t_k+0) = z(t_k)\lambda_k(z(t_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{gathered} \tag{13}$$

де $z \in \mathbb{R}_+$, $a$ і $b$ — додатні сталі, строго зростаюча послідовність $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geq \theta > 0$. Позначимо

$$A = \frac{b}{1-e^{-ab\theta}}, \quad B = \max_{k\in\mathbb{Z}} \max_{z\in[0,A]} \lambda_k(z), \quad C = \max(A, B).$$

**Лема 2** [11]. *Всі розв'язки $z(t)$, $z(0) = z_0 > 0$, рівняння (13) задовольняють оцінки $0 < z(t) \leq C$ при $t \geq \theta$.*

Розглянемо тепер логістичне рівняння з періодичними коефіцієнтами та імпульсами [10]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(t)x - \beta(t)x^2, \quad t \neq t_k, \\ x(t_k+0) &= (1+b_k)x(t_k), \end{aligned} \tag{14}$$

де $\alpha(t) = \alpha(t+T)$, $\beta(t) = \beta(t+T)$, $\beta(t) > 0$, $t_{k+p} = t_k + T$, $1 + b_k > 0$, $b_k = b_{k+p}$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Лема 3.** *Припустимо, що виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{1}{1+b_k} e^{-\int_0^T \alpha(\xi)d\xi} < 1.$$

*Тоді рівняння (14) має єдиний кусково-неперервний $T$-періодичний розв'язок $x_*(t)$, який глобально асимптотично стійкий:*

$$\lim_{t\to\infty} |x(t,x_0) - x_*(t)| = 0, \quad x(0,x_0) = x_0 > 0.$$

***Доведення.*** Після заміни змінних $x = 1/y$ у рівнянні (14) отримаємо лінійне неоднорідне рівняння

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha(t)y + \beta(t), \quad t \neq t_k, \\ y(t_k+0) &= \frac{1}{1+b_k} y(t_k). \end{aligned} \tag{15}$$

Згідно з результатами робіт [12, 13], єдиний періодичний розв'язок рівняння (15) має вигляд

$$y_*(t) = \int_0^T G(t,s)\beta(s)ds, \tag{16}$$

де

$$G(t,s) = X(t+T)(I - X(T))^{-1}X^{-1}(s),$$

$$X(t) = \prod_{0 \le t_k < t} \frac{1}{1+b_k}\, e^{-\int_0^t \alpha(\xi)d\xi}$$

— фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Легко перевірити, що $G_L \le |G(t,s)| \le G_M$ з деякими додатними сталими $G_L$ та $G_M$. Тоді з (16) отримаємо

$$TG_L\beta^L \le |y_*(t)| \le TG_M\beta^M.$$

Лему доведено.

***Наслідок 1.*** *Додатнозначний періодичний розв'язок рівняння (14) задовольняє оцінки*

$$\frac{1}{TG_M\beta^M} \le |x_*(t)| \le \frac{1}{TG_L\beta^L}.$$

**Дослідження системи двох рівнянь.** Розглянемо систему двох рівнянь з імпульсами

$$\dot{x}_1 = a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2, \tag{17}$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2, \quad t \ne t_k, \tag{18}$$

$$x_1(t_k+0) = (1+d_{1k})x_1(t_k), \tag{19}$$

$$x_2(t_k+0) = (1+d_{2k})x_2(t_k), \tag{20}$$

де $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, праві частини системи задовольняють умови $C_1 - C_3$.

Аналогічно лемі 1 отримуємо наступне твердження.

**Лема 4.** *Додатний квадрант $\{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$ додатно інваріантний відносно системи (17) – (20).*

**Лема 5.** *При виконанні умов $c_1^L > 0$, $c_2^L > 0$, всі додатнозначні розв'язки системи фінально рівномірно обмежені, тобто існує додатна стала $M$ така, що*

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \le M, \quad \limsup_{t\to\infty} x_2(t) \le M$$

*для всіх додатнозначних розв'язків.*

***Доведення.*** Використовуючи нерівності

$$\dot{x}_1 \le a_1^M x_2 - b_1^L x_1 - c_1^L x_1^2,$$

$$\dot{x}_2 \le a_2^M x_1 - b_2^L x_2 - c_2^L x_2^2, \quad t \ne t_k,$$

отримуємо

$$\frac{d(x_1+x_2)}{dt} \le a(x_1+x_2) - \frac{c}{2}(x_1+x_2)^2,$$

$$(x_1+x_2)(t_k+0) \le [\max\{1+d_{1k}, 1+d_{2k}\}](x_1+x_2)(t_k),$$

де $c = \min\{c_1^L, c_2^L\}$, $a = \max\{a_2^M - b_1^L, a_1^M - b_2^L\}$.

За лемою 2 всі розв'язки системи фінально рівномірно обмежені.

Лему доведено.

**Лема 6.** *При виконанні умов*

$$\int_0^T A(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{p} \ln(1+p_k) > 0, \tag{21}$$

*де* $A(t) \le \min\{(a_2(t)-b_1(t)),(a_1(t)-b_2(t))\}$, $B(t) \ge \max\{c_1(t),c_2(t)\}$, $p_k \ge \min\{d_{1k},d_{2k}\}$, *всі додатнозначні розв'язки системи (17) – (20) фінально рівномірно відокремлені від нуля:*

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \ge \delta > 0, \quad \liminf_{t\to\infty} x_2(t) \ge \delta > 0.$$

***Доведення.*** Розглянемо суму рівнянь (17) і (18):

$$\frac{d(x_1+x_2)}{dt} = (a_2(t)-b_1(t))x_1 + (a_1(t)-b_2(t))x_2 - c_1(t)x_1^2 - c_2(t)x_2^2.$$

Тоді отримаємо нерівність $x_1+x_2 \ge z$, де

$$\begin{aligned} \dot z &= A(t)z - B(t)z^2, \\ z(t_k+0) &= (1+p_k)z(t_k). \end{aligned} \tag{22}$$

За лемою 2 при виконанні умови

$$\prod_{k=1}^{p} \frac{1}{1+p_k} e^{-\int_0^T A(\xi)d\xi} < 1$$

(що еквівалентно (21)) рівняння (22) має єдиний додатнозначний глобально асимптотично стійкий періодичний розв'язок $z_*(t)$, який задовольняє оцінки

$$\frac{1}{T\bar G_M B^M} \le |z_*(t)| \le \frac{1}{T\bar G_L B^L},$$

де

$$\bar G(t,s) = \left(1 - e^{-\int_0^T A(\xi)d\xi} \prod_{0\le t_k<T}(1+p_k)^{-1}\right)^{-1} e^{-\int_s^{t+T} A(\xi)d\xi} \prod_{s\le t_k<t+T}(1+p_k)^{-1},$$

$$\bar G_L \le |\bar G(t,s)| \le \bar G_M.$$

Звідси випливає, що для кожного додатного розв'язку $(x_1(t),x_2(t))$ системи (17) – (20), починаючи з деякого моменту часу, справджується оцінка

$$x_1(t)+x_2(t) \ge \delta = \frac{1}{2T\bar G_M B^M}.$$

Підставивши $x_2(t) \geq \delta - x_1(t)$ у рівняння (17), отримаємо

$$\dot{x_1} = a_1(t)\delta - a_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2,$$

$$x_1(t_i + 0) = (1 + d_{1k})x_1(t_k).$$

Позначимо $a = \min_t\{a_1(t)\delta\}$, $b = \max_t\{a_1(t)+b_1(t)\}$, $c = \max_t\{c_1(t)\}$, тоді $x_1(t) \geq x(t)$, де $x(t)$ — розв'язок рівняння

$$\dot{x} = a - bx - cx^2, \tag{23}$$

$$x(t_k + 0) = (1 + d_{1k})x(t_k). \tag{24}$$

Рівняння (23) має розв'язок

$$x(t, x_0) = \frac{x_0(x_{10} - x_{20}E(t)) - x_{10}x_{20}(1 - E(t))}{x_0(1 - E(t)) - (x_{20} - x_{10}E(t))}, \quad x(0, x_0) = x_0,$$

де

$$E(t) = \exp(-t\sqrt{b^2 + 4ac}),$$

$$x_{10} = \frac{1}{2c}(-b + \sqrt{b^2 + 4ac}), \quad x_{20} = \frac{1}{2c}(-b - \sqrt{b^2 + 4ac}).$$

Оскільки $x_{10} > 0$, $x_{20} < 0$, $E(t) > 0$, $t > 0$, то

$$x(t, x_0) = \frac{x_0(x_{10} - x_{20}E(t)) - x_{10}x_{20}(1 - E(t))}{x_0(1 - E(t)) - (x_{20} - x_{10}E(t))} \geq \frac{-x_{10}x_{20}(1 - E(t))}{-x_{20} + x_{10}E(t)} = \frac{a(1 - E(t))}{\sqrt{b^2 + 4ac}}.$$

Тому при $t \geq \theta/2$ виконується оцінка

$$x(t, x_0) \geq \frac{a(1 - E(\theta/2))}{\sqrt{b^2 + 4ac}} = \delta_1 > 0.$$

Враховуючи відокремленість імпульсів $t_k - t_{k-1} \geq \theta$, отримуємо $x(t_k, x_0) \geq \delta_1$ і $x(t_k + +0, x_0) \geq \delta_1(1 + \bar{d})$ для всіх $x_0 > 0$ і $k \geq 1$, де $\bar{d} = \min_k d_{1k}$.

Підставляючи $x_1(t) \geq \delta - x_2(t)$ у рівняння (18), аналогічно отримуємо відокремленість розв'язку $x_2(t)$ від нуля.

Лему доведено.

**Лема 7.** *Припустимо, що:*

*i) система (17) – (20) перманентна: існують додатні сталі $m$ і $N$ такі, що для кожного додатного розв'язку $(x_1(t), x_2(t))$ системи, починаючи з деякого моменту часу, справджуються оцінки*

$$m \leq x_1(t) \leq N, \quad m \leq x_2(t) \leq N;$$

*ii) виконується нерівність*

$$T\lambda_M + \sum_{k=1}^{p} \ln(1 + p_k) < 0,$$

*де $\lambda_M$ — найбільше власне значення матриці*

$$\begin{pmatrix} -2b_1^L - 4c_1^L m & a_1^M + a_2^M \\ a_1^M + a_2^M & -2b_2^L - 4c_2^L m \end{pmatrix}.$$

*Тоді система (17) – (20) має єдиний глобально асимптотично стійкий строго додатний кусково-неперервний $T$-періодичний розв'язок.*

***Доведення.*** Розглянемо два додатнозначних розв'язки $(x(t), y(t))$ і $(x_0(t), y_0(t))$ системи (17) – (20) та функцію

$$V(t) = (x(t) - x_0(t))^2 + (y(t) - y_0(t))^2.$$

Її похідна в силу системи

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= 2(x - x_0)(a_1 y - b_1 x - c_1 x^2 - a_1 y_0 + b_1 x_0 + c_1 x_0^2) + \\ &\quad + 2(y - y_0)(a_2 x - b_2 y - c_2 y^2 - a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 y_0^2) = \\ &\leq 2\left((x - x_0)^2(-b_1^L - 2c_1^L m) + (y - y_0)^2(-b_2^L - 2c_2^L m) + \right. \\ &\quad \left. + |x - x_0|\,|y - y_0|(a_1^M + a_2^M)\right) \leq \\ &\leq \lambda_M\left((x(t) - x_0(t))^2 + (y(t) - y_0(t))^2\right) = \lambda_M V(t). \end{aligned}$$

Використовуючи нерівності

$$V(t_{k+1}) \leq V(t_k + 0)\exp(\lambda_M(t_{k+1} - t_k))$$

і

$$V(t_k + 0) = (1 + d_{1k})^2(x(t_k) - x_0(t_k))^2 + (1 + d_{2k})^2(y(t_k) - y_0(t_k))^2 \leq (1 + d_k)^2 V(t_k),$$

оцінюємо зміну функції на періоді

$$V(t + T) \leq K_* V(t) \leq e^{T\lambda_M}\prod_{k=1}^{p}(1 + p_k)V(t).$$

З умови ii) випливає $K_* < 1$, а тому $V(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Лему доведено.

**Доведення основних результатів.**

**Лема 8.** *При виконанні умов $c_1^L > 0$, $c_2^L > 0$, $g^L > 0$ всі додатнозначні розв'язки системи (1) – (6) фінально рівномірно обмежені:*

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \leq M, \quad \limsup_{t\to\infty} x_1(t) \leq M, \quad \limsup_{t\to\infty} y(t) \leq M.$$

***Доведення.*** Спочатку розглянемо два перших рівняння системи. Скористаємося нерівностями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\le a_1^M x_2 - b_1^L x_1 - c_1^L x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= a_2^M x_1 - b_2^L x_2 - c_2^L x_2^2, \quad t \ne t_k. \end{aligned} \tag{25}$$

За лемою 5 всі невід'ємні розв'язки $(x_1, x_2)$ системи (25) з імпульсною дією (19), (20) фінально рівномірно обмежені.

Для $y(t)$ справджується оцінка $y(t) \le z(t)$, де $z(t)$ — розв'язок рівняння

$$\dot{z} = z\left(-q^L + \frac{h_3^M}{m_1^L} + \frac{h_4^M}{m_2^L} - g^L y\right),$$

$$z(t_k + 0) = (1 + d_{3k}) z(t_k).$$

За лемою 2 всі розв'язки останнього рівняння фінально рівномірно обмежені.

Лему доведено.

***Доведення теореми 1.*** Оскільки для додатних $x_1$, $x_2$, $y$ виконується

$$\frac{h_i x_i y}{k_i + m_i x_i + n_i y} \le \frac{h_i x_i}{n_i}, \quad i = 1, 2,$$

то додатнозначні розв'язки системи (1)–(6) задовольняють нерівності

$$\dot{x}_1 \ge a_1(t) x_2 - \left(b_1(t) + \frac{h_1(t)}{n_1(t)}\right) x_1 - c_1(t) x_1^2,$$

$$\dot{x}_2 = a_2(t) x_1 - \left(b_2(t) + \frac{h_2(t)}{n_2(t)}\right) x_2 - c_2(t) x_2^2, \quad t \ne t_k,$$

$$x_1(t_k + 0) = (1 + d_{1k}) x_1(t_k),$$

$$x_2(t_k + 0) = (1 + d_{2k}) x_2(t_k).$$

Тому виконання нерівностей (11) при умові (10) доводиться аналогічно лемі 6.

Враховуючи нерівності $x_1(t) \ge \delta_1$, $x_2(t) \ge \delta_1$ і рівності

$$\frac{h_3 \delta_1}{k_1 + m_1 \delta_1 + n_1 y} = \frac{h_3 \delta_1}{k_1 + m_1 \delta_1} - \frac{h_3 \delta_1 n_1 y}{(k_1 + m_1 \delta_1 + n_1 y)(k_1 + m_1 \delta_1)},$$

$$\frac{h_4 \delta_1}{k_2 + m_2 \delta_1 + n_2 y} = \frac{h_4 \delta_1}{k_2 + m_2 \delta_1} - \frac{h_4 \delta_1 n_2 y}{(k_2 + m_2 \delta_1 + n_2 y)(k_2 + m_2 \delta_1)},$$

отримуємо оцінку $y(t) \ge z(t)$, де $z(t)$ — розв'язок рівняння

$$\dot{z} = z\left(-q(t) + \frac{h_3 \delta_1}{k_1 + m_1 \delta_1} + \frac{h_4 \delta_1}{k_2 + m_2 \delta_1} - z\left(g(t) + \frac{\delta_1 n_1 h_3}{(k_1 + m_1 \delta_1)^2} + \frac{\delta_1 n_2 h_4}{(k_2 + m_2 \delta_1)^2}\right)\right),$$

$$z(t_k + 0) = (1 + d_{3k})z(t_k).$$

За лемою 3 останнє рівняння при виконанні умови леми має єдиний додатний асимптотично стійкий періодичний розв'язок.

Теорему доведено.

***Доведення теореми 2*** розіб'ємо на кілька кроків. Скористаємося ідеями роботи [6].

*Крок 1.* Доведемо, що існує $\Delta_y$ таке, що

$$\limsup_{t\to+\infty} y(t) \geq \Delta_y \tag{26}$$

для кожного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ з додатними початковими даними.

Позначимо

$$\psi_\varepsilon(t) = -q(t) + \frac{h_3(x_1^* - \varepsilon)}{k_1 + m_1(x_1^* - \varepsilon) + n_1\varepsilon} + \frac{h_4(x_2^* - \varepsilon)}{k_2 + m_2(x_2^* - \varepsilon) + n_2\varepsilon} - \varepsilon g(t).$$

За умовою (12) існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\int_0^T \psi_\varepsilon(t)dt + \sum_{k=1}^{p} \ln(1 + d_{3k}) > 0. \tag{27}$$

Оскільки за умовою теореми періодичний розв'язок $(x_1^*(t), x_2^*(t))$ експоненціально стійкий, то існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ система

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= a_1(t)z_2 - b_1(t)z_1 - c_1(t)z_1^2 - \frac{h_1(t)\varepsilon}{k_1(t)}z_1,\\
\dot z_2 &= a_2(t)z_1 - b_2(t)z_2 - c_2(t)z_2^2 - \frac{h_2(t)\varepsilon}{k_2(t)}z_2,\\
z_1(t_k + 0) &= (1 + d_{1k})z_1(t_k), \quad z_2(t_k + 0) = (1 + d_{2k})z_2(t_k)
\end{aligned} \tag{28}$$

має єдиний експоненціально стійкий періодичний розв'язок $(x_{1\varepsilon}^*(t), x_{2\varepsilon}^*(t))$ такий, що

$$(x_{1\varepsilon}^*(t), x_{2\varepsilon}^*(t)) \to (x_1^*(t), x_2^*(t)), \quad \varepsilon \to 0.$$

Тому для $\varepsilon_0/2$ існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що при $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ виконується

$$|(x_{1\varepsilon}^*(t) - x_1^*(t))| + |(x_{2\varepsilon}^*(t) - x_2^*(t))| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Припустимо, що умова (26) не виконується. Тоді для

$$\varepsilon \leq \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_* \tag{30}$$

існують розв'язок $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ системи (1)–(6) та момент часу $T_1 > 0$ такі, що при $t \geq T_1$

$$\dot{x}_1 \geq a_1(t)x_2 - b_1(t)x_1 - c_1(t)x_1^2 - \frac{h_1(t)\varepsilon}{k_1(t)}x_1,$$

$$\dot{x}_2 \geq a_2(t)x_1 - b_2(t)x_2 - c_2(t)x_2^2 - \frac{h_2(t)\varepsilon}{k_2(t)}x_2,$$

$$y(t) \leq \varepsilon, \quad y(t_k+0) = (1+d_{3k})y(t_k),$$

$$x_1(t_k+0) = (1+d_{1k})x_1(t_k), \quad x_2(t_k+0) = (1+d_{2k})x_2(t_k).$$

Розглянемо розв'язок системи (28) з початковими умовами $z_1(T_1) = x_1(T_1)$, $z_2(T_1) = x_2(T_1)$. Система квазімонотонна, тому $x_1(t) \geq z_1(t)$, $x_2(t) \geq z_2(t)$ при $t \geq T_1$. Оскільки періодичний розв'язок $(x_{1\varepsilon}^*(t), x_{2\varepsilon}^*(t))$ асимптотично стійкий, то для $\varepsilon_0/2$ існує $T_2 > 0$ таке, що

$$z_1(t) \geq x_{1\varepsilon}^*(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad z_2(t) \geq x_{2\varepsilon}^*(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad t \geq T_2.$$

З урахуванням (29) отримуємо

$$x_1(t) \geq x_1^*(t) - \varepsilon_0, \quad x_2(t) \geq x_2^*(t) - \varepsilon_0, \quad t \geq T_2.$$

З останніх нерівностей випливає оцінка для $y(t)$ :

$$\dot{y} \geq y\left(-q(t) + \frac{h_3(x_1^* - \varepsilon_0)}{k_1 + m_1(x_1^* - \varepsilon_0) + n_1\varepsilon_0} + \frac{h_4(x_2^* - \varepsilon_0)}{k_2 + m_2(x_2^* - \varepsilon_0) + n_2\varepsilon_0} - \varepsilon_0 g(t)\right),$$

$$y(t_k+0) = (1+d_{3k})y(t_k).$$

З огляду на (27) робимо висновок, що $y(t) \to \infty$. Отримали суперечність з припущенням $y(t) \leq \varepsilon$.

*Крок 2.* Доведемо, що існує додатна стала $\delta_y$ така, що для кожного додатного розв'язку $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ системи (1)–(6) виконується

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) \geq \delta_y. \tag{31}$$

Припустимо, що (31) не виконується. Тоді для кожного $m$ існує розв'язок $y(t, z_m)$, $y(0, z_m) = z_m$, такий, що

$$\liminf_{t\to\infty} y(t, z_m) < \frac{\Delta_y}{(1+m)^2}.$$

Оскільки за першим кроком доведення $\limsup_{t\to\infty} y(t, z_m) \geq \Delta_y$, то існують дві послідовності чисел $s_n^{(m)}$ та $t_n^{(m)}$, які задовольняють умови

$$0 < s_1^{(m)} < t_1^{(m)} < s_2^{(m)} < t_2^{(m)} < \ldots < s_n^{(m)} < t_n^{(m)} < \ldots, \tag{32}$$

$$s_n^{(m)} \to \infty, \quad t_n^{(m)} \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{33}$$

$$y(s_n^{(m)}, z_m) > \frac{\Delta_y}{m+1}, \quad y(t_n^{(m)}, z_m) < \frac{\Delta_y}{(m+1)^2}, \tag{34}$$

$$y(t_n^{(m)}, z_m) \le y(t, z_m) \le y(s_n^{(m)}, z_m), \quad t \in (s_n^{(m)}, t_n^{(m)}). \tag{35}$$

За лемою 8 для розв'язку $y(t, z_m)$ існує $T_1^{(m)} > 0$ таке, що $y(t, z_m) \le M$ для $t \ge T_1^{(m)}$. Тому розв'язок $y(t, z_m)$ задовольняє нерівність з імпульсною дією

$$\dot{y} \ge y(-q(t) - g(t)M),$$

$$y(t_k + 0) = (1 + d_{3k})y(t_k).$$

Звідси отримуємо

$$y(t_n^{(m)}, z_m) \ge y(s_n^{(m)}, z_m) \exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}}^{t_n^{(m)}} (-q(t) - g(t)M)dt\right) \prod_{s_n^{(m)} \le t_j < t_n^{(m)}} (1 + d_{3j}),$$

$$\exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}}^{t_n^{(m)}} (q(t) + g(t)M)dt\right) \prod_{s_n^{(m)} \le t_j < t_n^{(m)}} (1 + d_{3j})^{-1} \ge \frac{y(s_n^{(m)}, z_m)}{y(t_n^{(m)}, z_m)} \ge (m+1).$$

Оскільки функція $(q(t) + g(t)M)$ обмежена, точки імпульсної дії відокремлені, а коефіцієнти $1 + d_{3j}$ рівномірно відокремлені від нуля, то $t_n^{(m)} - s_n^{(m)} \to \infty, m \to \infty$.

Виберемо таке $m$, що $\dfrac{\Delta_y}{m+1} < \varepsilon_*$, де $\varepsilon_*$ задається умовою (30). Тоді для $t \in [s_n^{(m)}, t_n^{(m)}]$ виконується $y(t, z_m) < \varepsilon_*$ і $x_1(t, z_m) \ge z_1(t)$, $x_2(t, z_m) \ge z_2(t)$, де $z_1(t)$, $z_2(t)$ — розв'язки системи (28) при $\varepsilon = \varepsilon_*$ і $z_i(s_n^{(m)}, z_m) = x_i(s_n^{(m)}, z_m)$, $i = 1, 2$. Система (28) має єдиний періодичний розв'язок $(x_{1\varepsilon_*}^*(t), x_{2\varepsilon_*}^*(t))$, рівномірно асимптотично стійкий відносно області перманентності для цієї системи. Тому для $\varepsilon_0$ існує $T_0 > 0$ таке, що

$$z_1(t) \ge x_{1\varepsilon_*}^*(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad z_2(t) \ge x_{2\varepsilon_*}^*(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad t \ge T_0 + s_n^{(m)}.$$

З урахуванням неперервної залежності періодичних розв'язків $x_{1\varepsilon}^*(t) \to x_1^*(t)$, $x_{2\varepsilon}^*(t) \to$ $\to x_2^*(t)$ отримуємо

$$z_1(t) \ge x_1^*(t) - \varepsilon_0, \quad z_2(t) \ge x_2^*(t) - \varepsilon_0, \quad t \ge T_0 + s_n^{(m)},$$

і відповідно

$$x_1(t) \ge x_1^*(t) - \varepsilon_0, \quad x_2(t) \ge x_2^*(t) - \varepsilon_0, \quad t \ge T_0 + s_n^{(m)}.$$

З останніх оцінок випливає нерівність для $y(t)$ :

$$\dot{y}(t,z_m) \geq \psi_{\varepsilon_0}(t)y(t,z_m),$$

$$y(t_k+0,z_m) = (1+d_{3k})y(t_k,z_m).$$

Інтегруючи, одержуємо оцінку

$$y(t_n^{(m)},z_m) \geq y(s_n^{(m)}+T',z_m)\exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}+T'}^{t_n^{(m)}} \psi_{\varepsilon_0}(t)dt\right)\prod_{s_n^{(m)}\leq t_k<t_n^{(m)}}(1+d_{3k}).$$

Тому для деякого $T' \geq T_0$

$$\frac{\Delta_y}{(m+1)^2} \geq \frac{\Delta_y}{(m+1)^2}\exp\left(\int\limits_{s_n^{(m)}+T'}^{t_n^{(m)}} \psi_{\varepsilon_0}(t)dt\right)\prod_{s_n^{(m)}\leq t_k<t_n^{(m)}}(1+d_{3k}) > \frac{\Delta_y}{(m+1)^2}.$$

Прийшли до суперечності.

*Крок 3.* Доведемо необхідність умови теореми. Припустимо, що

$$\int\limits_0^T\left(-q(t)+\frac{h_3x_1^*}{k_1+m_1x_1^*}+\frac{h_4x_2^*}{k_2+m_2x_2^*}\right)dt+\sum_{k=1}^p\ln(1+d_{3k}) \leq 0.$$

Перевіримо, що тоді $\liminf_{t\to\infty} y(t) = 0$ для кожного додатного розв'язку $(x_1(t),x_2(t),y(t))$ системи (1)–(6).

Для цього достатньо показати, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує послідовність точок $t_{\varepsilon n} \to \to \infty, n \to \infty$, таких, що $y(t_{\varepsilon n}) < \varepsilon$.

Для $\varepsilon > 0$ існують $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$ такі, що

$$\int\limits_0^T \tilde{\psi}(t,\varepsilon_1,\varepsilon)dt+\sum_{k=1}^p\ln(1+d_{3k}) \leq \int\limits_0^T\frac{h_3(k_1\varepsilon_1-x_1^*n_1\varepsilon)dt}{(k_1+m_1(x_1^*+\varepsilon_1)+n_1\varepsilon)(k_1+m_1x_1^*)}+$$

$$+\int\limits_0^T\frac{h_4(k_2\varepsilon_1-x_2^*n_2\varepsilon)dt}{(k_2+m_2(x_2^*+\varepsilon_1)+n_2\varepsilon)(k_2+m_2x_2^*)}-\varepsilon\int\limits_0^T g(t)dt \leq -\varepsilon_2,$$

де

$$\tilde{\psi}(t,\varepsilon_1,\varepsilon) = -q(t)+\frac{h_3(x_1^*+\varepsilon_1)}{k_1+m_1(x_1^*+\varepsilon_1)+n_1\varepsilon}+\frac{h_4(x_2^*+\varepsilon_1)}{k_2+m_2(x_2^*+\varepsilon_1)+n_2\varepsilon}-\varepsilon g(t).$$

Розв'язок $(x_1(t),x_2(t))$ задовольняє нерівності (25). Тому для $\varepsilon_1$ існує $T_3 > 0$ таке, що $x_1(t) \leq x_1^*(t)+\varepsilon_1$, $x_2(t) \leq x_2^*(t)+\varepsilon_1$ при $t \geq T_3$.

Припустимо, що $y(t) \geq \varepsilon$ при $t \geq T_3$. Тоді

$$\varepsilon \leq y(t) \leq \exp\left(\int\limits_{T_3}^{t} \tilde{\psi}(s, \varepsilon_1, \varepsilon) ds\right) \prod_{T_3 \leq t_k < t} (1 + d_{3k}) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Прийшли до суперечності.

Теорему доведено.


1. *Fan M., Kuang Y.* Dynamics of a nonautonomous predator-prey system with the Beddington – DeAngelis functional response // J. Math. Anal. and Appl. — 2004. — **295**. — P. 15 – 39.
2. *Hwang T. W.* Global analysis of the predator-prey system with Beddington – DeAngelis functional response // Ibid. — 2003. — **281**. — P. 395 – 401.
3. *Aiello W. G., Freedman H. I.* A time-delay model of single-species growth with stage structure // Math. Biosci. — 1990. — **101**. — P. 139 – 153.
4. *Ciu S., Chen L., Agarwal R.* Recent progress on stage-structured population dynamics // Math. Comput. Modelling. — 2002. — **36**, № 11 – 13. — P. 1319 – 1360.
5. *Cui J., Chen L., Wang W.* The effect of dispersal on population growth with stage-structure // Comput. Math. Appl. — 2000. — **39**. — P. 91 – 102.
6. *Cui J., Song X.* Permanence of predator-prey system with stage structure // Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B. — 2004. — **4**, № 3. — P. 547 – 554.
7. *Cui J., Takeuchi Y.* A predator-prey system with a stage structure for the prey // Math. Comput. Modelling. — 2006. — **44**, № 11 – 12. — P. 1126 – 1132.
8. *Liu K., Chen L.* On a periodic time-dependent model of population dynamics with stage structure and impulsive effects // Discrete Dynam. Nature and Soc. — 2008. — ID 389727. — P. 1 – 15.
9. *Yang W., Li X., Bai Z.* Permanence of periodic Holling type-IV predator-prey system with stage structure for prey // Math. Comput. Modelling. — 2008. — **48**, № 5 – 6. — P. 677 – 684.
10. *Liu X., Chen L.* Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations // J. Math. Anal. and Appl. — 2004. — **289**. — P. 279 – 291.
11. *Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V. I.* An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2006. — **7**, № 5. — P. 1255 – 1267.
12. *Kocherha O. I., Nenya O. I., Tkachenko V. I.* On positive periodic solutions of nonlinear impulsive functional differential equations // Nonlinear Oscillations. — 2008. — **11**, № 4. — P. 527 – 540.
13. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.


*Одержано 06.05.09*