УДК 517.9

ПРОЕКЦІЙНО-АЛГЕБРАЇЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

М. Люстик

Академія гірництва та металургії
Краків, 30059, Польща
e-mail: lustyk@wms.mat.agh.edu.pl

А. К. Прикарпатський

Дрогобиц. держ. пед. ун-т
Україна, 82100, Дрогобич Львівської обл., вул. Стрийська, 3
e-mail: pryk.anat@ua.fm
prykanat@cybergal.com

М. М. Притула

Львів. нац. ун-т
Україна, 79602, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: pmm@franko.lviv.ua

М. І. Вовк

Ін-т фундам. досліджень та прикл. математики
Львів. нац. ун-ту „Львів. політехніка”
Україна, 79013, Львів, вул. Митрополита Андрея, 5
e-mail: pryk.anat@ua.fm

The projection-algebraic method of the Calogero type for discrete approximations of linear differential equations in Banach spaces is developed, the convergence analysis of the corresponding finite-dimensional expressions, based on the functional-analytic approach to discrete approximations and methods of operator theory in Banach spaces, is presented. Application of the obtained results to the functional-interpolation scheme of the projection-algebraic method of discrete approximations is considered. Based on a generalized Leray – Schauder type theorem the projection-algebraic scheme of discrete approximations is proposed, its solvability and convergence for a special class of nonlinear operator equations is analyzed.

Развивается проекционно-алгебраический метод дискретных аппроксимаций типа Калоджеро для линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, проведен анализ сходимости конечномерных аппроксимаций, базирующийся на функционально-алгебраическом подходе к дискретным аппроксимациям и методах теории операторов в банаховых пространствах. Рассмотрены применения полученных результатов к функционально-интерполяционной схеме проекционно-алгебраического метода дискретных аппроксимаций. На основании обобщенного утверждения типа Лере – Шаудера рассмотрена проекционно-алгебраическая схема дискретных аппроксимаций и проанализированы ее разрешимость и сходимость для специального класса нелинейных операторных уравнений.

1. Вступ. Нехай X і Y — задані функціональні простори Банаха. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$Au = f(u), \tag{1.1}$$

де, в загальному випадку, $f : X \to Y$ є деяким неперервним нелінійним відображенням, а оператор $A : X \to Y$ — замкненим лінійним диференціальним виразом

$$A := \sum_{|\beta|=0}^{m} a_\beta(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \tag{1.2}$$

з частинними похідними в області $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ з гладкими коефіцієнтами $a_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$, $q, m \in \mathbb{Z}_+$, та областю визначення $D(A) \subset X$ і задовольняє умову $\overline{\mathrm{Range}(A)} = Y$ або $\mathrm{Range}(A) = Y$. З метою побудови дискретної апроксимації рівняння (1.1), придатної для ефективних комп'ютерних обчислень, ми розвиваємо проекційно-алгебраїчний метод дискретних апроксимацій типу Калоджеро [1], що ґрунтується на функціональному та Лі-алгебраїчному підходах праць [2–9]. На підставі загальних властивостей [10–12] апроксимуючих скінченновимірних банахових підпросторів дано опис необхідних умов збіжності проекційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для сталого відображення $f : X \to Y$ як у загальному випадку, так і у випадку функціонально-інтерполяційної схеми дискретних апроксимацій, адаптованої до відповідних скінченновимірних квазізображень базисної операторної алгебри Гайзенберга – Вейля. Використовуючи результати праць [8, 9] щодо існування розв'язків нелінійних операторних рівнянь, що ґрунтуються на узагальненій теоремі типу Лере – Шаудера, описано достатньо ефективні необхідні умови розв'язності та збіжності проекційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для випадку нелінійного неперервного А-компактного відображення $f : X \to Y$ та замкненого лінійного сюр'єктивного оператора $A : X \to Y$.

2. Функціонально-операторні аспекти проекційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій лінійних рівнянь. Будемо вивчати випадок рівняння (1.1), коли відображення $f : X \to Y$ є довільним, але сталим вектором простору Y. Розглянемо дві сім'ї скінченновимірних інтерполяційних функціональних підпросторів $\tilde{X}_N \subset X$, а також $\tilde{Y} \subset Y$ для $N \in \mathbb{Z}_+$, таких, що

$$\begin{gathered} \tilde{X}_N \subset \tilde{X}_{N+1}, \\ \tilde{Y}_N \subset \tilde{Y}_{N+1}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Коли задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ є обмеженою, для простору $X := L_p(\Omega; \mathbb{R})$ та області визначення $D(A) = W_p^{(m+s)}(\Omega)$ і $\mathrm{Range}\,(A) = W_p^{(s)}(\Omega) \subset L_p(\Omega; \mathbb{R}) := Y$, $p > q$, $s > 0$, вирази

$$\begin{gathered} \tilde{X}_N := P_N^{(x)} W_p^{(m+s)}(\Omega), \\ \tilde{Y}_N := P_N^{(y)} W_p^{(s)}(\Omega), \end{gathered} \tag{2.2}$$

де $P_N^{(x)} \to X$ і $P_N^{(y)} \to Y$, $N \in \mathbb{Z}_+$, є лінійними операторами, визначеними на неперервних функціях в області $\Omega \subset \mathbb{R}^q$. Оператори $P_N^{(x)}$ і $P_N^{(y)}$ є, як відомо, операторами проектування, для яких виконуються умови

$$P_N^{(x)} P_N^{(x)} = P_N^{(x)}, \quad P_N^{(y)} P_N^{(y)} = P_N^{(y)} \tag{2.3}$$

для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$.

Розглянемо тепер для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$ рівняння

$$P_N^{(y)} A \tilde{u}_N = P_N^{(y)} f \tag{2.4}$$

відносно елемента $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$, для якого при $N \to \infty$

$$\lim_{N \to \infty} \|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0, \tag{2.5}$$

де відображення $f : X \to Y$ є сталим заданим елементом простору Y. Очевидно, що рівняння (2.4) має один розв'язок $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$, якщо для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$ справджується рівність

$$P_N^{(y)} A \tilde{X}_N := \tilde{Y}_N. \tag{2.6}$$

Умова (2.6) рівнозначна існуванню оберненого скінченновимірного оператора

$$P_N^{(y)} A P_N^{(x)} := A_N : \tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N \tag{2.7}$$

для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$.

Наведемо означення довільної гранично щільної сім'ї підпросторів $\{\mathcal{B}_N \subset \mathcal{B} : N \in \mathbb{Z}_+\}$ простору Банаха B.

Означення 2.1. *Сім'я підпросторів $\{\mathcal{B}_N \subset \mathcal{B} : N \in \mathbb{Z}_+\}$ називається гранично щільною в $\mathcal{B}$, якщо для кожного $g \in \mathcal{B}$ має місце рівність*

$$\rho(g, \mathcal{B}_N) := \inf_{\tilde{w}_N \in \mathcal{B}_N} \|g - \tilde{w}_N\|_{\mathcal{B}} \to 0 \tag{2.8}$$

при $N \to \infty$.

Для подальшого аналізу необхідне наступне твердження про збіжність процесу апроксимації.

Твердження 2.1. *Нехай оператор $A : X \to Y$ є оборотним на щільній області визначення $D(A) \subset X$, а також має місце рівність $\overline{\mathrm{Range}(A)} = Y$, де X і Y — простори Банаха. Припустимо, що сім'я підпросторів $\{A\tilde{X}_N \in Y : N \in \mathbb{Z}_+\}$ є гранично щільною, а оператори проектування $P_N^{(y)} : Y \to Y$ задовольняють умову*

$$\|P_N^{(y)}\| \le c_N^{(y)} \tag{2.9}$$

для деякої послідовності $c_N^{(y)} \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{Z}_+$. *Для кожного елемента* $f \in Y$ *рівняння*

$$P_N^{(y)} Au = P_N^{(y)} f \tag{2.10}$$

має єдиний розв'язок $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ *для всіх* $N \in \mathbb{Z}_+$, *де*

$$\lim_{N\to\infty} \|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0, \tag{2.11}$$

тоді і тільки тоді, коли:

i) виконується умова (2.6);

ii) існують послідовності $\tau_N^{(y)} \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{Z}_+$, *такі, що*

$$\|P_N^{(y)} \tilde{v}_N\|_{\tilde{Y}_N} \geq \tau_N^{(y)} \|\tilde{v}_N\|_Y, \quad \overline{\lim}_{N\to\infty} c_N^{(y)} \tau_N^{(y),-1} < \infty, \tag{2.12}$$

для кожного елемента $\tilde{v}_N \in A\tilde{X}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$;

iii) верхня межа

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \left[\left(1 + c_N^{(y)} \tau_N^{(y),-1}\right) \rho(f, A\tilde{X}_N) \right] = 0$$

для кожного $f \in Y$.

Доведення. Насамперед припустимо, що для кожного елемента $f \in Y$ рівняння $P_N^{(y)} \times Au = P_N^{(y)} f$, $N \in \mathbb{Z}_+$, має єдиний розв'язок $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ і $\|A\tilde{u}_N - f\|_Y \to 0$ при $N \to \infty$. Тоді на основі нерівності

$$\rho(f, A\tilde{X}_N) = \inf_{w_N \in A\tilde{X}_N} \|f - \tilde{w}_N\|_Y \leq \|f - A\tilde{u}_N\|_Y$$

можна зробити висновок, що $\lim_{N\to\infty} \rho(f, A\tilde{X}_N) = 0$, тобто сім'я підпросторів $\{A\tilde{X}_N \in Y : n \in \mathbb{Z}_+\}$ є гранично щільною в Y. Тепер визначимо $N \in \mathbb{Z}_+$ і розглянемо рівняння $P_N^{(y)} Au = \tilde{f}_N \in \tilde{Y}_N$. Зрозуміло, що існує такий елемент $f \in Y$, для якого $P_N^{(y)} f = \tilde{f}_N$, тобто отримуємо рівняння, яке на підставі припущення твердження має вже єдиний розв'язок $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$. А це означає, що $P_N^{(y)} A\tilde{X}_N = \tilde{Y}_N$, тобто умову i) доведено.

Оскільки відображення $P_N^{(y)} : Y \to Y$ є оператором проектування, то можна розглянути його звуження $\bar{P}_N^{(y)}|_{A\tilde{X}_N} : A\tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$ для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$. Оператор $\bar{P}_N^{(y)} : A\tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$ згідно з (2.9) та (2.12) є обмеженим і взаємно однозначним. Тоді на підставі твердження Банаха про обернений оператор існує обмежений обернений оператор $\bar{P}_N^{(y),-1} : \tilde{Y}_N \to A\tilde{X}_N$.

Нехай тепер $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ є відповідним наближеним розв'язком рівняння $P_N Au = P_N f$. Тоді має місце рівність $A\tilde{u}_N = \bar{P}_N^{(y),-1} P_N f$, з якої на підставі умови (2.11) отримуємо

$$\lim_{N\to\infty} \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N f - f\|_Y = 0 \tag{2.13}$$

для кожного $f \in Y$. А це означає, що $\lim_{N\to\infty} \bar{P}_N^{(y),-1} P_N f = f$ для кожного заданого елемента $f \in Y$. Застосовуючи тепер до цієї умови класичне твердження Банаха – Штайнгауза [10, 11], одержуємо

$$\sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)}\|_Y \le c^{(y)} < \infty \tag{2.14}$$

для певної сталої величини $c^{(y)} \in \mathbb{R}_+$. Таким чином, для кожного елемента $P_N^{(y)}\tilde{w}_N = \tilde{w}_N$

$$\|\bar{P}_N^{(y),-1}\tilde{w}_N\|_Y = \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)} j_N \tilde{w}_N\|_Y \le \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N\|_Y \|j_N \tilde{w}_N\|_Y \le c^{(y)}\|j_N\|\|\tilde{w}_N\|_{\tilde{Y}_N}, \tag{2.15}$$

де $j_N : \tilde{Y}_N \to Y$ — відповідний щільно заданий оператор вкладення, а $\|j_N\|$ — його норма. Нерівність (2.15) означає, що норма оператора $\bar{P}_N^{(y),-1} : \tilde{Y}_N \to A\tilde{X}_N \subset Y$ є рівномірно обмеженою для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$.

Тепер виберемо довільний елемент $\tilde{v}_N \in A\tilde{X}_N \subset Y$ і обчислимо величину $\tilde{w}_N := := \bar{P}_N^{(y)}\tilde{v}_N \in \tilde{Y}_N$. Тоді на підставі нерівності (2.15) отримаємо

$$\|\tilde{v}_N\|_Y = \|\bar{P}_N^{(y),-1}\tilde{w}_N\|_Y \le c^{(y)}\|j_N\|\|\tilde{w}_N\|_{\tilde{Y}_N} := \tau_N^{(y),-1}\|P_N\tilde{v}_N\|_{\tilde{Y}_N}, \tag{2.16}$$

де величини $\tau_N^{(y)} > 0$ є обмеженими для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$. А це означає, що стосовно кожного елемента $\tilde{v}_N \in A\tilde{X}_N$ виконується умова ii) твердження, тобто $\|P_N^{(y)}\tilde{v}_N\|_{\tilde{Y}_N} \ge \tau_N^{(y)}\|\tilde{v}_N\|_Y$, $N \in \mathbb{Z}_+$.

Достатність умов i) – iii) доведемо таким чином. Розв'яжемо рівняння $P_N A u = P_N f$ для $N \in \mathbb{Z}_+$, розв'язок яких $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ є єдиним. Тоді їх можна записати у вигляді

$$\tilde{u}_N = A^{-1}\bar{P}_N^{(y),-1} P_N f, \tag{2.17}$$

де, як і вище, лінійне відображення $\bar{P}_N^{(y)} := P_N^{(y)}|_{A\tilde{X}_N} : A\tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$ є відповідною редукцією на $A\tilde{X}_N \subset Y$ оператора проектування $P_N^{(y)} : Y \to Y$ на підпростір $\tilde{Y}_N \subset Y$. Оскільки на підставі умови ii) маємо $\|\bar{P}_N^{(y),-1}\| \le \tau_N^{(y),-1}$, то норма $\|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)}\| \le c_N^{(y)}\tau_N^{(y),-1}$ є рівномірно обмеженою для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$. Звідси для довільного елемента $\tilde{w}_N \in A\tilde{X}_N$ отримуємо

$$\begin{aligned}
\|A\tilde{u}_N - f\|_Y &= \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N f - f\|_Y \le \\
&\le \inf_{\tilde{w}_N\in A\tilde{X}_N}\left(\|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N f - \bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)}\tilde{w}_N\|_Y + \|\tilde{w}_N - f\|_Y\right) \le \\
&\le \inf_{\tilde{w}_N\in A\tilde{X}_N}\left(\|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N f - \bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)}\tilde{w}_N\|_Y + \|\tilde{w}_N - f\|_Y\right) \le \\
&\le \inf_{\tilde{w}_N\in A\tilde{X}_N}\left(c_N^{(y)}\tau_N^{(y),-1} + 1\right)\rho(f, \tilde{w}_N) = \left(c_N^{(y)}\tau_N^{(y),-1} + 1\right)\rho(f, A\tilde{X}_N),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

де враховано, що $\bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)}\tilde{w}_N = \tilde{w}_N$ для всіх $\tilde{w}_N \in A\tilde{X}_N$. А це на підставі припущення iii) означає існування границі $\lim_{N\to\infty}\|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0$ для довільного елемента $f \in Y$, що завершує доведення твердження.

Зауваження. Певний аналог даного твердження, але відмінний від твердження 2.1, було встановлено в [12].

Як очевидний висновок з доведення твердження 2.1 отримуємо, що у випадку, коли $\dim \tilde{X}_N = \dim \tilde{Y}_N < \infty$ для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$, умова і) у вигляді (2.6) виникає з умови іі). Більш того, має місце наступне твердження про збіжність розв'язку $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ при $N \to \infty$ до елемента $u \in X$.

Твердження 2.2. *Нехай виконуються всі умови твердження 2.1, зокрема замкнений оператор $A : X \to Y$ має обмежений обернений оператор, тобто $\|A^{-1}\| < \infty$ і $D(A) = X$ (на підставі класичного твердження про замкнений оператор). Тоді отримана послідовність розв'язків $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ рівняння $P_N^{(y)} Au = P_N^{(y)} f$ при $N \to \infty$ є відповідними наближеннями до розв'язку рівняння $Au = f$ щодо норми $\| \cdot \|_X$.*

Доведення. Припустимо, що $u_N \in X_N$ є розв'язком рівняння $P_N^{(y)} A u_N = P_N^{(y)} f$ для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$. Оцінимо тепер різницю $(u - \tilde{u}_N) \in X$ щодо норми простору X :

$$\|\tilde{u}_N - u\|_X = \|\tilde{u}_N - A^{-1} f\|_X = \|A^{-1} A \tilde{u}_N - A^{-1} f\|_X =$$
$$= \|A^{-1}(A\tilde{u}_N - f)\|_X \leq \|A^{-1}\| \, \|A\tilde{u}_N - f\|_Y. \tag{2.19}$$

На підставі (2.18) $\lim_{N\to\infty} \|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0$, а з того, що оператор A^{-1} є обмеженим, права частина рівняння (2.19) прямує до нуля при $N \to \infty$. Це означає, що $\lim\limits_{N\to\infty} \|\tilde{u}_N - u\|_X = 0$, що й завершує доведення твердження.

3. Функціонально-інтерполяційні властивості проекційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій лінійних рівнянь з частинними похідними. У цьому пункті для подальшого вивчення дискретних апроксимацій розв'язків рівнянь припускаємо, що $\Omega := K \subset \mathbb{R}^N$ є n-вимірним кубом. Задамо в явному вигляді скінченновимірні функціональні підпростори $\tilde{X}_N \in X$ і $\tilde{Y}_N \in Y$ для $N \in \mathbb{Z}_+$, використавши оператори проектування Лагранжа.

Нехай $X := L_p(K;\mathbb{R})$, $D(A) = W_p^{(m+s)}(K;\mathbb{R})$, $Y := L_p(K;\mathbb{R})$, $\mathrm{Range}\,(A) = W_p^{(s)}(K;\mathbb{R})$, $p > n$, $s \geq 1$, а також $s - n/p > 0$. На підставі твердження Соболєва про вкладення має місце властивість $W_p^{(m)}(K;\mathbb{R}) \subset C(K;\mathbb{R})$. На її основі ми можемо побудувати підпростір $\tilde{Y}_N \subset Y$ таким чином:

$$\tilde{Y}_N = P_N^{(y)} W_p^{(s)}(K;\mathbb{R}), \tag{3.1}$$

де оператор проектування є класичним оператором інтерполяції Лагранжа, заданим у вигляді

$$P_N^{(y)} f(x) := \sum_{\substack{\prod_{j=1}^{q} \alpha_j = N \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^q}} f(x_\alpha) l_\alpha(x). \tag{3.2}$$

Тут $x_\alpha \in K$ — вузли на кубі $K \subset \mathbb{R}^q$, мультиіндекс $\alpha \in \mathbb{Z}_+^q$, $\prod_{j=1}^{q} \alpha_j \leq N$, а

$$l_\alpha(x) := \prod_{j=1}^{q} l_{\alpha_j}(x_j), \quad l_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \tag{3.3}$$

є базисними q-вимірними многочленами Лагранжа. Оскільки ми вибираємо простори $\tilde{X}_N \in X$ і $\tilde{Y}_N \in Y$ скінченновимірними, то умова (2.6) виникає з умови ii) твердження 2.1. Тепер потрібно розглянути нерівність

$$\|P_N^{(y)}\tilde{v}_N\|_{\tilde{Y}_N} \geq \tau_N^{(y)}\|\tilde{v}_N\|_Y \tag{3.4}$$

для всіх $\tilde{v}_N \in A\tilde{X}_N \in Y$, де $\tau_N^{(y)} < \infty$, $N \in \mathbb{Z}_+$. Умова (3.4) означає, що оператор проектування $P_N^{(y)}$ є оборотним на підпросторі $A\tilde{X}_N$, оскільки, очевидно, $\ker P_N^{(y)} = \{0\}$. Тепер з попереднього визначення $\tilde{v}_N = A\tilde{w}_N$, де $\tilde{w}_N \in \tilde{X}_N$, і з того, що оператор $A : X \to Y$ є оборотним на області визначення $D(A)$, випливає, що і $\ker(P_N^{(y)}A) = \{0\}$. Додатково з умови $\dim \tilde{X}_N = \dim \tilde{Y}_N$ випливає, що $\operatorname{Range}(P_N^{(y)}A)|_{\tilde{X}_N} = \tilde{Y}_N$.

Розглянемо підпростір $C(K;\mathbb{R})$ послідовностей функцій на кубі $K \subset \mathbb{R}^q$ і відповідний оператор проектування для випадку інтерполяції Лагранжа (3.2), вузли якої є коренями многочленів Ерміта. Визначимо величини

$$\begin{gathered}\delta_N := \min_{k=\overline{1,q},j=\overline{1,N_k}} \left\{ \left(x_k^{(j+1)} - x_k^{(j)} \right) : j = \overline{1, N_k} \right\}, \quad N := \prod_{j=\overline{1,q}} N_j, \\ \lambda_N^{(y)} := \|P_N^{(y)}\| \leq c_q^{(1)}(K)(\log N)^q,\end{gathered} \tag{3.5}$$

де $c_q^{(1)}(K) > 0$ для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$. Нехай тепер функціонал $x^* \in C^*(K;\mathbb{R})$, $x \in K$, визначено таким чином, що

$$x^*(f) := f(x) \tag{3.6}$$

для кожної функції $f \in C(K;\mathbb{R})$. Тоді, як відомо [11], для інтерполяції, вузли якої вибрано коренями многочленів Ерміта, має місце нерівність

$$\|x^* P_N^{(y)}\|_{C^*(K;\mathbb{R})} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^q}^{\prod_{j=1}^n \alpha_j = N} |l_\alpha(x)| := \lambda_N^{(y)} \leq c_q^{(2)}(K) N^{-s} (\log N)^q \tag{3.7}$$

для всіх $x \in K$ і $N \in \mathbb{Z}_+$. На підставі нерівності типу Джексона для кожної $f \in C^{(s)}(K;\mathbb{R})$ маємо також

$$E_N[f] \leq c_q^{(2)} N^{-s} \|f^{(s)}\|_{C(K;\mathbb{R})}. \tag{3.8}$$

Таким чином, використовуючи (3.7) і (3.8), для $f \in C^{(s)}(K;\mathbb{R})$ отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}|(x^* P_N^{(y)})(f) - x^*(f)| := |P_N^{(y)} f(x) - f(x)| \leq& \\ \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^q}^{\prod_{j=1}^q \alpha_j = N} |l_\alpha(x)|\, |f(x_\alpha) - p_N(x_\alpha) + p_N(x_\alpha) - f(x)| \leq& \\ \leq c_q^{(3)}(K)(\log N)^q N^{-s} \|f^{(s)}\|_{C(K;\mathbb{R})},&\end{aligned} \tag{3.9}$$

де стала величина $c_q^{(3)}(K) := c_q^{(1)}(K) c_q^{(2)}(K) < \infty$, а p_N є відповідним многочленом степеня $N \in \mathbb{Z}_+$ найкращої апроксимації на кубі $K \subset \mathbb{R}^q$. Припускаючи тепер, що диференціальний оператор (1.2) є обмеженим як оператор $A : C^{(s+m)}(K;\mathbb{R}) \to C^{(s)}(K;\mathbb{R})$ і для $s \geq 1$ виконується умова Като – Реліха [10]

$$\|u\|_{p,m+s} \leq c_q^{(4)}(K)(\|Au\|_{p,s} + \|u\|_{p,s}) \tag{3.10}$$

для певної сталої $c_q^{(4)} > 0$ і кожної $u \in W_p^{(m+s)}(K;\mathbb{R})$, на підставі оцінки (3.9) з нерівності (3.10) отримуємо існування такої сталої $\tau_N^{(y)} > 0$, що має місце основна нерівність (3.4). Таким чином, на підставі твердження 2.1 робимо висновок про існування однозначних розв'язків рівнянь (2.10) з підпростору $\tilde{X}_N \subset W_p^{(m+s)}(K;\mathbb{R})$ для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$, які апроксимують точний розв'язок рівняння (1.1). Це означає, що систему скінченновимірних функційних рівнянь

$$\tilde{A}_N \tilde{u}_N := P_N^{(y)} A P_N^{(x)} \tilde{u}_N = \tilde{f}_N := P_N^{(y)} f \tag{3.11}$$

для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$ можна подати в рівнозначному вигляді як звичайну систему векторних алгебраїчних рівнянь

$$A_N u_N = f_N, \tag{3.12}$$

де $u_N := \pi_N^{(x)} \tilde{u}_N$, $f_N := \pi_N^{(y)} \tilde{f}_N$, $A_N := \pi_N^{(y)} \tilde{A}_N \pi_N^{(x),-1}$, до того ж $\pi_N^{(x)} : \tilde{X}_N \to X_N \simeq \mathbb{R}^N$, $\pi_N^{(y)} : \tilde{Y}_N \to Y_N \simeq \mathbb{R}^N$ є відповідними канонічними ізоморфізмами [4, 7] скінченновимірних просторів для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, має місце наступне твердження.

Твердження 3.1. *Нехай оператор (1.2) є оберненим і задовольняє умову (3.10) для певного показника $s \geq 1$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in W_p^{(m+s)}(K;\mathbb{R})$ рівняння (1.1), який є відповідною границею наближених розв'язків скінченновимірних рівнянь (3.12), отриманих за допомогою проекційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій.*

Для ефективної побудови скінченновимірних операторів $A_N : X_N \to Y$, $N \in \mathbb{Z}_+$, використаємо метод функціонально-алгебраїчної дискретної апроксимації базисних операторів алгебри Гайзенберга – Вейля $\mathcal{G}(n) := \bigoplus_{j=\overline{1,q}} \{1, x_j, \partial/\partial x_j\}$, основи якого було розвинено у працях [4, 7, 13]. Тоді вираз (3.12) буде звичайним векторним рівнянням, матриця $A_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ якого

$$A_N = \sum_{|\beta|=0}^{m} a_\beta(S_N) D_N^\beta, \tag{3.13}$$

де S_N і $D_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ — відповідні скінченновимірні тензорні квазізображення базисних елементів (або генераторів) алгебри Гайзенберга – Вейля $\mathcal{G}(q)$. Розв'язуючи рівняння (3.12) з матрицею (3.13), отримуємо векторний розв'язок $u_N \in X_N \simeq \mathbb{R}^N$, який породжує відповідно шуканий наближений функційний розв'язок $\tilde{u}_N := \pi_N^{(x),-1} u_N \in \tilde{X}_N \subset X$ вихідного рівняння (1.1). У випадку, коли задано додаткові крайові умови на розв'язок $u \in \in X$ рівняння (1.1), також можна використати розвинений нами проекційно-алгебраїчний метод. Аналогічні результати можна отримати і для випадку еволюційного рівняння, заданого у вигляді $du/dt - Au = f$, де $u \in X$, $f \in Y$ і параметр $t \in \mathbb{R}_+$, а також нелінійних еволюційних рівнянь з частинними похідними. Цим важливим для багатьох застосувань питанням буде присвячено окрему статтю.

4. Функціонально-операторні аспекти проекційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для нелінійних операторних рівнянь у банахових просторах. Розглянемо нелінійне операторне рівняння (4.1) у вигляді

$$Au = f(u), \tag{4.1}$$

де $A : X \to Y$ — замкнений сюр'єктивний оператор з умовою $\dim \ker A > 0$, а відображення $f : X \to Y$ є довільним нелінійним і неперервним з областю визначення $D(f) = S_r(0) \cap D(A) \subset X$ ($S_r(0) \subset X$ є сферою радіуса $r > 0$ з центром у нулі), які задовольняють дві умови: 1) A-компактності, тобто для будь-яких обмежених множин $U \subset D(f)$ і $V \subset Y$ замкнена множина $\overline{f(U \cap A^{-1}(V)} \subset Y$ є компактною; 2) $k_f < k_A$, де, за визначенням,

$$k_A^{-1} := \sup_{\|v\|_Y = 1} \inf_{u \in D(A)} \{\|u\|_X : Au = v\} < \infty, \quad k_f := \sup_{u \in S_r(0)} \frac{1}{r} \|f(u)\| < \infty. \tag{4.2}$$

Якщо $\tilde{X_N} \subset \tilde{X}_{N+1} \subset X$ і $\tilde{Y_N} \subset \tilde{Y}_{N+1} \subset Y$, $N \in \mathbb{Z}_+$, — скінченновимірні банахові підпростори, а $P_N^x : X \to \tilde{X}_N$ та $P_N^y : Y \to \tilde{Y}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$, — відповідні оператори проектування, то мають місце рівняння

$$P_N^{(y)} A\tilde{u}_N = P_N^{(y)} f(\tilde{u}_N) \tag{4.3}$$

відносно елементів $\tilde{u}_N \subset \tilde{X}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$, які є наближеннями до шуканого розв'язку рівняння (4.1), у загальному випадку не єдиного, оскільки $\dim \ker A \geq 1$. Зауважимо, що проекційний метод називають „реалізовним", якщо множина $\mathcal{M} \subset X$ розв'язків рівняння (4.1) є непорожньою, а при достатньо великих $N \in \mathbb{Z}_+$ також є непорожніми множини $M_N \subset \tilde{X}_N$ розв'язків рівнянь (4.3). Метод називають „збіжним", якщо він є реалізовним і виконано умову

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{\tilde{u}_N \in \tilde{\mathcal{M}}_N} \inf_{u \in \mathcal{M}} \|\tilde{u}_N - u\|_X = 0. \tag{4.4}$$

Очевидно, що для практичних застосувань критерії реалізовності проекційного методу та його збіжності є досить важливими, тому ми зупинимось на них, ґрунтуючись на результатах праць [8, 9], де питання розв'язності певного класу нелінійних операторних рівнянь було проаналізовано на основі одного узагальненого твердження типу Лере – Шаудера в банахових просторах. А саме, має місце наступне твердження [8, 9], яке дає опис множини $\mathcal{M}$ розв'язків нелінійного операторного рівняння (4.1).

Твердження 4.1. *Нехай виконано умови 1, 2, сформульовані вище. Тоді при додатковій умові* $\dim \ker A \geq 1$ *рівняння (4.1) має непорожню множину* $\mathcal{M}$ *розв'язків, топологічна розмірність яких* $\dim \mathcal{M} \geq \dim \ker A - 1$.

Нижче вважатимемо, що виконано всі необхідні умови твердження 4.1. Тоді наступний результат характеризує реалізовність проекційного алгоритму (4.3).

Твердження 4.2. *Нехай виконано умови 1, 2 та додатково*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{v\in \mathrm{Range}\,(A)\cap \mathrm{Range}\,(f)} \|P_N^{(y)}v - v\|_Y = 0. \tag{4.5}$$

Тоді для достатньо великих чисел $N \in \mathbb{Z}_+$ множини $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset \tilde{X}_N$ є непорожніми і має місце умова збіжності (4.4).

Доведення. Покладемо

$$k_f^{(N)} := \sup_{\tilde{u}_N\in S_r(0)} \frac{1}{r} \left\| P_N^{(y)} f(\tilde{u}_N) \right\|_{\tilde{Y}_N} \tag{4.6}$$

та

$$k_A^{(N),-1} := \sup_{\tilde{v}_N\in \tilde{Y}_N} \frac{1}{\|\tilde{v}_N\|_{\tilde{Y}_N}} \inf_{\tilde{u}_N\in P_N^{(x)}D(A)} \left\{ \|\tilde{u}_N\|_{\tilde{X}_N} : P_N^{(y)}A\tilde{u}_N = \tilde{v}_N \right\} \tag{4.7}$$

і виберемо таке $N_0 \in \mathbb{Z}_+$, щоб $\dim\ker(P_{N_0}^{(y)}A) \geq 1$, а також

$$k_f \leq k_f^{(N_0)} < k_A^{(N_0)} \leq k_A. \tag{4.8}$$

Тоді на основі виразів (4.6) і (4.7) з умови (4.8) отримуємо, що для всіх $N \geq N_0$ виконується умова

$$k_f \leq k_f^{(N)} < k_A^{(N)} \leq k_A. \tag{4.9}$$

А це означає, згідно з узагальненим твердженням типу Лере – Шаудера [8, 9], що послідовність рівнянь (4.4) має розв'язки для всіх $N \geq N_0$, тобто всі множини $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset \tilde{X}_N$, $N \geq N_0$, є непорожніми, а сам проекційний метод — реалізовним.

Візьмемо тепер деяке $\varepsilon \geq 0$ і розглянемо окіл

$$U_\varepsilon(\mathcal{M}) := \left\{ u \in D(f) : \inf_{\bar{u}\in\mathcal{M}\subset D(f)} \|\bar{u} - u\|_X < \varepsilon \right\}. \tag{4.10}$$

Очевидно, що множина $D(f)\backslash U_\varepsilon(\mathcal{M})$ не містить розв'язків рівняння (4.1), і для деякого $\alpha_\varepsilon > 0$

$$\inf_{\bar{u}\in D(f)\backslash U_\varepsilon(\mathcal{M})} \|Au - f(u)\|_Y = \alpha_\varepsilon > 0. \tag{4.11}$$

Виберемо на основі (4.5) число $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ так, щоб для всіх $N \geq N_\varepsilon$

$$\sup_{u\in D(f)} (\|Au - P_N^{(y)}Au\|_Y + \|f(u) - P_N^{(y)}f(u)\|_Y) < \alpha_\varepsilon. \tag{4.12}$$

Тоді для всіх $u \in D(f)\backslash U_\varepsilon(\mathcal{M})$ виконується нерівність

$$\|P_N^{(y)}Au-P_N^{(y)}f(u)\|_Y \geq \|Au-f(u)\|_Y-(\|Au-P_N^{(y)}Au\|_Y+\|f(u)-P_N^{(y)}f(u)\|_Y) > \alpha_\varepsilon-\alpha_\varepsilon = 0,$$

тобто при $N \geq N_\varepsilon$ має місце включення $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset U_\varepsilon(\mathcal{M})$. Оскільки $\varepsilon > 0$ вибрано достатньо малим, умова $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset U_\varepsilon(\mathcal{M})$ для всіх $N \geq N_\varepsilon$ є еквівалентною умові збіжності (4.4), що й доводить твердження.

У випадку, коли послідовності просторів $\tilde{X}_N \subset \tilde{X}_{N+1} \subset X$ та $\tilde{Y}_N \subset \tilde{Y}_{N+1} \subset Y$, $N \in \mathbb{Z}_+$, вибрано гільбертовими, до того ж

$$\cup_{N\in\mathbb{Z}_+}\tilde{X}_N = X, \quad \cup_{N\in\mathbb{Z}_+}\tilde{Y}_N = Y, \tag{4.13}$$

а проектори $P_N^{(x)} : X \to \tilde{X}_N$, $P_N^{(y)} : Y \to \tilde{Y}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$, є операторами ортогонального проектування, норми $\|P_N^{(x)}\| = 1$, $\|P_N^{(x)}\| = 1$, $N \in \mathbb{Z}_+$, і для всіх $u \in X$, $v \in Y$

$$\lim_{N\to\infty}\|u - P_N^{(x)}u\|_Y = 0, \quad \lim_{N\to\infty}\|v - P_N^{(y)}v\|_Y = 0. \tag{4.14}$$

Вважатимемо також, що виконуються умови (4.4), (4.5) і $\dim\ker A \geq 1$. Тоді має місце аналог твердження 4.2 про реалізовність проекційної схеми дискретних апроксимацій для рівняння (4.1), заданого в гільбертовому просторі.

Твердження 4.3. *Для достатньо великих $N \in \mathbb{Z}_+$ множини $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset \tilde{X}_N$ є непорожніми і має місце умова збіжності (4.3).*

Доведення. Зрозуміло, що необхідно лише встановити справедливість умови (4.5). Припустимо, що знайдеться така послідовність індексів $N_k \in \mathbb{Z}_+$ для $k \in \mathbb{Z}_+$, а також елементи $u_k \in D(f)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, для яких існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\|P_{N_k}^{(y)}f(u_k) - f(u_k)\|_Y > \epsilon. \tag{4.15}$$

Оскільки для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ елементи $f(u_k)$ належать $\mathrm{Range}\,(A)$, то завдяки A-компактності відображення $f : D(f) \to Y$ існує границя $\lim_{k\to\infty} f(u_k) = \bar{v} \in Y$. Використовуючи тепер існування границь (4.14), отримуємо

$$\lim_{k\to\infty}\|P_{N_k}^{(y)}f(u_k) - f(u_k)\|_Y \leq \lim_{k\to\infty}\|P_{N_k}^{(y)}f(u_k) - P_{N_k}^{(y)}\bar{v}\|_Y +$$
$$+ \lim_{k\to\infty}\|P_{N_k}^{(y)}\bar{v} - \bar{v}\|_Y + \lim_{k\to\infty}\|\bar{v} - f(u_k)\|_Y = 0,$$

що суперечить нерівності (4.15).

Твердження доведено.

Як наслідок отриманих вище результатів для випадку, коли відображення $f : D(f) \subset \subset X \to Y$ є сталим, а оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ — замкненим і сюр'єктивним, можна встановити додаткові критерії збіжності проекційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для рівняння (4.1), проаналізованого у попередніх пунктах.

5. Висновки. Проекційно-алгебраїчна схема дискретних апроксимацій типу Калоджеро, яка ґрунтується на спеціальних інтерполяційних властивостях функціональних просторів, при застосуванні до широкого класу диференціально-операторних рівнянь у банахових просторах дає можливість ефективно конструювати відповідні наближені розв'язки, наближення яких до точних для випадку лінійних рівнянь є особливо високим [3]. При цьому, як показано в даній статті, проекційно-алгебраїчна схема є при мінімальних обмеженнях на оператори в широкому сенсі розв'язною та збіжною, а у випадку нелінійних диференціально-операторних рівнянь вдається досить ефективно описати параметричну залежність множини розв'язків та її топологічну розмірність, що є важливим для практичних застосувань.

1. *Calogero F.* Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension // Lett. nuovo cim. — 1983. — **38**, № 13. — P. 453 – 459.
2. *Calogero F.* Classical many-body problems amenable to exact treatments // Lect. Notes Phys. Monogr. — 2001. — **66**.
3. *Calogero F., Franco E.* Numerical tests of a novel technique to compute the eigenvalues of differential operators // Nuovo cim. — 1985. — **89**. — P. 161 – 208.
4. *Luśtyk M.* The Lie-algebraic discrete approximation scheme for evolution equations with Dirichlet // Neumann Data, Univ. Iagellon. Acta Math. — 2002. — **40**. — P. 117 – 124.
5. *Bihun O., Prytula M.* Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations // Proc. Appl. Math. and Mech. — 2004. — **4**. — P. 534 – 535.
6. *Samoylenko V. Hr.* Algebraic scheme of discrete approximations for dynamical systems of mathematical physics and the accuracy estimation // Asymptotic Meth. in Math. Phys. Probl. — Kiev: Inst. Math. Nat. Acad Sci. Ukraine, 1988. — P. 144 – 151 (in Russian).
7. *Mitropolski Yu. A., Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. H.* A Lie-algebraic scheme of discrete approximations of dynamical systems of mathematical physics // Ukr. Math. J. — 1988. — **40**, № 4. — P. 453 – 458.
8. *Prykarpatsky A. K.* A Borsuk – Ulam type generalization of the Leray – Schauder fixed point theorem. — Trieste, Italy, 2007. — Preprint ICTP, IC/2007/028.
9. *Prykarpatsky A. K.* An infinite-dimernsional Borsuk – Ulam type generalization of the Leray – Schauder fixed point proposition and some applications // Ukr. Math. J. — 2008. — **60**, № 1. — P. 114 – 120.
10. *Kato T.* The theory of linear operators. — New York: Springer, 1962.
11. *Babenko K.* Numerical analysis. — Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
12. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
13. *Luśtyk M., Bihun O.* Approximation properties of the Lie-algebraic scheme // Mat. Stud. — 2003. — **20**. — P. 85 – 91.

Одержано 09.11.09