УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІРРЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

В. П. Яковець, О. В. Головченко

Ніжин. держ. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

We consider a singularly perturbed differential system with an irregular singular point. It was proved that, in a general case where the elementary divisors have multiplicities, the corresponding asymptotic decompositions can be constructed in a form of double series in fractional powers of the parameter and the ratio of the independent variable and the parameter.

Рассматривается сингулярно возмущенная линейная система дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. Установлено, что в общем случае кратных элементарных делителей соответствующие асимптотические разложения можно построить в виде двойных рядов по дробным степеням параметра и отношения независимой переменной и параметра.

1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x,\varepsilon) z + f(x,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \frac{\theta x^{g+1}}{g+1}\right) \tag{1}$$

з іррегулярною особливою точкою $x = \infty$, де $z(x,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор; ε — малий комплексний параметр: $\varepsilon \in \pi_\varepsilon = \{0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \gamma \le \arg\varepsilon \le \delta\}$; x — комплексна змінна: $x \in S = \{|x| \ge a, \alpha \le \arg x \le \beta\}$; h і g — натуральні числа; $A(x,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку; $f(x,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, які в областях S та π_ε допускають асимптотичні розвинення

$$A(x,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk}, \tag{2}$$

$$f(x,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} f_{sk}, \tag{3}$$

θ — комплексне число.

Дослідження таких систем проведено в роботах [1, 2], де виконано асимптотичне розщеплення відповідної однорідної системи на підсистеми меншої розмірності та побудовано асимптотичні розв'язки за умови простого спектра граничної матриці. В даній статті вивчається питання про побудову розв'язків системи (1) у випадку, коли гранична матриця має кратне власне значення, якому відповідає кілька елементарних дільників.

2. Розглянемо спочатку однорідну систему

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x,\varepsilon) z. \tag{4}$$

Будемо припускати, що матриця A_{00} має власне значення λ_0 кратності n, якому відповідає r_1 елементарних дільників кратності p_1, r_2 елементарних дільників кратності $p_2, \ldots, r_\nu$ елементарних дільників кратності p_ν, $p_\nu > 1$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що

$$p_1 > p_2 > \ldots > p_\nu. \tag{5}$$

Позначимо $r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu = r$.

Тоді, згідно з [3, с. 177], матриця A_{00} має r_1 жорданових ланцюжків векторів $\varphi_j^{(i)}$, $j = \overline{1, r_1}$, $i = \overline{1, p_1}$, завдовжки p_1, r_2 жорданових ланцюжків $\varphi_{r_1+j}^{(i)}$, $j = \overline{1, r_2}$, $i = \overline{1, p_2}$, завдовжки $p_2, \ldots, r_\nu$ жорданових ланцюжків $\varphi_{r_1+\ldots+r_{\nu-1}+j}^{(i)}$, $j = \overline{1, r_\nu}$, $i = \overline{1, p_\nu}$, завдовжки p_ν, які задовольняють співвідношення

$$(A_{00} - \lambda_0 E)\, \varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+j}^{(1)} = 0, \quad j = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, \nu},$$

$$(A_{00} - \lambda_0 E)\, \varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}^{(j)} = \varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, p_i}, \quad k = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Неоднозначність визначення векторів, які утворюють вказані жорданові ланцюжки, можна усунути, застосувавши формули [4, с. 108]

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i, \quad i = \overline{1, r},$$

$$\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}^{(j)} = H \varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, p_i}, \quad k = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, \nu},$$

де φ_i, $i = \overline{1, r}$, — деякі фіксовані власні вектори, а H — напівобернена матриця до матриці $A_{00} - \lambda_0 E$. Тоді

$$\begin{gathered} \varphi_i^{(1)} = \varphi_i, \quad i = \overline{1, r}, \\ \varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}^{(j)} = H \varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}, \quad j = \overline{2, p_i}, \quad k = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, \nu}. \end{gathered} \tag{6}$$

Нехай ψ_i, $i = \overline{1, r}$, — базисні вектори нуль-простору матриці $(A_{00} - \lambda_0 E)^*$, спряженої з $A_{00} - \lambda_0 E$. Тоді незалежно від їх вибору виконується умова [4, с. 109]

$$\det \left\| \left(\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}^{(p_i)}, \psi_j \right) \right\|_{k=\overline{1, r_i},\ i=\overline{1, \nu},\ j=\overline{1, r}} \neq 0,$$

яка дає змогу визначити вектори ψ_i, $i = \overline{1, r}$, так, щоб виконувались співвідношення

$$\left(\varphi_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k}^{(p_i)}, \psi_j \right) = \delta_{r_1+\ldots+r_{i-1}+k, j}, \quad k = \overline{1, r_i}, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad j = \overline{1, r}. \tag{7}$$

Позначимо через U_0 лінійну оболонку власних векторів φ_i, $i = \overline{1, r}$, матриці A_{00}, що відповідають власному значенню λ_0. Нехай U_{0j}, $j = \overline{1, \nu}$, — лінійні оболонки векторів $\varphi_{r_1+\ldots+r_{j-1}+i}$, $i = \overline{1, r_j}$, власних векторів, що відповідають елементарним дільникам кратності p_j. Тоді n-вимірний унітарний підпростір U_0 є прямою сумою підпросторів U_{0j}, $j = \overline{1, \nu}$:

$$U_0 = U_{01} \oplus U_{02} \oplus \ldots \oplus U_{0\nu}. \tag{8}$$

Розглянемо оператори проектування $\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, \nu}$, які відображають n-вимірний простір U на r_j-вимірні підпростори U_{0j} так, що

$$\mathcal{D}_j u = \sum_{i=1}^{r_j} \left(u, \psi_{r_1+\ldots+r_{j-1}+i}\right) \varphi_{r_1+\ldots+r_{j-1}+i} \quad \forall u \in U, \quad j = \overline{1, \nu}. \tag{9}$$

При цьому виконуються співвідношення [4, с. 112]

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_j H^{i-1} u = 0, \quad \text{якщо} \quad u \in U_{0k}, \quad i < p_k, \quad j, k = \overline{1, \nu}, \\ \mathcal{D}_j H^{p_j - 1} u = u, \quad \text{якщо} \quad u \in U_{0j}, \quad j = \overline{1, \nu}, \\ \mathcal{D}_j H^{p_i - 1} u = 0, \quad \text{якщо} \quad u \in U_{0i}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, \nu}. \end{gathered} \tag{10}$$

Справджується наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) матриця A_{00} має n-кратне власне значення λ_0, якому відповідає r_1 елементарних дільників кратності p_1, r_2 елементарних дільників кратності $p_2, \ldots, r_\nu$ елементарних дільників кратності p_ν, $p_\nu > 1$;

2) $\left|\dfrac{1}{x\varepsilon}\right| < 1$;

3) рівняння

$$\det \left(\|(A_{01}\varphi_i, \psi_j)\|_1^{r_1+\ldots+r_m} - \eta \Gamma_{r_m}\right) = 0, \quad m = \overline{1, \nu}, \tag{11}$$

де Γ_{r_m} — квазідіагональні матриці вигляду

$$\Gamma_{r_m} = \operatorname{diag}\{0; E_m\},$$

мають лише прості відмінні від нуля корені η_j, $j = \overline{1, r_m}$.

Тоді система рівнянь (4) має n формальних розв'язків вигляду

$$z(x, \varepsilon) = v\left(\frac{1}{x\varepsilon}, \mu\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{x_0}^{x} x^g \lambda\left(\frac{1}{x\varepsilon}, \mu\right) dx\right) \tag{12}$$

де $v\left(\dfrac{1}{x\varepsilon}, \mu\right)$ — n-вимірний вектор, $\lambda\left(\dfrac{1}{x\varepsilon}, \mu\right)$ — скалярна функція, які допускають формальні розвинення

$$v\left(\frac{1}{x\varepsilon}, \mu\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^s \mu^k v_{sk}, \tag{13}$$

$$\lambda\left(\frac{1}{x\varepsilon}, \mu\right) = \lambda_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^s \mu^k \lambda_{sk}, \tag{14}$$

$$\mu = \sqrt[p_m]{\varepsilon}, \quad m = \overline{1, \nu}.$$

Доведення. Підставимо вектор (12) у систему (4). Врахуваши розвинення (2), (13), (14), прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях $\dfrac{1}{x\varepsilon}$ та μ. Дістанемо систему алгебраїчних рівнянь

$$(A_{00} - \lambda_0 E)\, v_{s0} = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

$$(A_{00} - \lambda_0 E)\, v_{sk} = b_{sk}, \quad s = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

$$b_{sk} = \lambda_{sk} v_{00} + \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_{ik} v_{s-i,0} + \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{ij} v_{s-i,k-j} - a_{sk}, \tag{17}$$

$$a_{sk} = \sum_{1=1}^{s} A_{i0} v_{s-i,k-ip_m} + \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{p_m}\right]-i} A_{ij} v_{s-i,k-(i+j)p_m} + (s-(g+1)) v_{s-(g+1),k-p_m(h+g+1)}. \tag{18}$$

Покажемо, що з системи (15), (16) можна визначити коефіцієнти розвинень (13), (14). З (15) маємо

$$v_{s0} = u_{s0}, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

де u_{s0} — вектори з підпростору U_0, які визначимо далі.

Рівняння (16) будуть розв'язні відносно v_{sk} тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься умова [4, с. 112]

$$\mathcal{D}_j b_{sk} = 0, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad s \geq 0, \quad k > 0. \tag{20}$$

Якщо ця умова виконується, то вектори v_{sk}, $s = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots$, визначатимемо за формулою

$$v_{sk} = H b_{sk} + u_{sk}, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

де u_{sk} — вектори з підпростору U_0, які визначимо далі.

Для знаходження λ_{sk} та векторів u_{sk} використаємо умову (20). З цією метою виразимо вектори b_{sk} через λ_{ij} та u_{ij}. Послідовно підставляючи (19), (21) у (17), отримуємо

$$\begin{aligned} b_{sk} = {} & \sum_{j_1=1}^{k} P_{j_1}^{s,k}(\lambda) H^{j_1-1} u_{00} + \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j_1=1}^{k} P_{j_1}^{i,k}(\lambda) H^{j_1-1} u_{s-i,0} + \\ & + \sum_{i=0}^{s} \sum_{j_2=1}^{k-1} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{i,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} u_{s-i,k-j_2} - \\ & - \sum_{i=0}^{s} \sum_{j_2=1}^{k-p_m} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{i,j_2}(\lambda) H^{j_1} a_{s-i,k-j_2} - a_{sk}, \quad a_{sk} = 0, \quad k < p_m. \end{aligned} \tag{22}$$

Символом $P^{s,k}_{j_1}(\lambda)$ позначимо суму всіх можливих добутків j множників $\lambda_{s_i k_i}$ з цілими невід'ємними індексами, суми яких $s_1+s_2+\ldots+s_j=s$, $k_1+k_2+\ldots+k_j=k$, тобто

$$P^{s,k}_{j_1}(\lambda)=\sum_{\substack{s_1+s_2+\ldots+s_j=s\\ k_1+k_2+\ldots+k_j=k}}\lambda_{s_1k_1}\lambda_{s_2k_2}\cdots\lambda_{s_jk_j}. \tag{23}$$

Враховуючи властивості суми (23)

$$\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{j=1}^{r_2-j_1}\lambda_{ij}P^{i_2-i,r_2-j}_{j_1}(\lambda)=P^{i_2,r_2}_{j_1+1}(\lambda), \tag{24}$$

справедливість формули (22) доведемо методом математичної індукції.

Припустимо, що вона має місце при $k<l$. З огляду на те, що

$$\begin{aligned}v_{s-i,k-j}&=\sum_{j_1=1}^{k-j}P^{s-i,k-j}_{j_1}(\lambda)H^{j_1}u_{00}+\sum_{i_1=0}^{s-i-1}\sum_{j_1=1}^{k-j}P^{i_1,k-j}_{j_1}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,0}+\\&+\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{k-j-1}\sum_{j_1=1}^{r}P^{i_1,r}_{j_1}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,k-j-r}-\\&-\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{k-j-p_m}\sum_{j_1=1}^{r}P^{i_1,r}_{j_1}(\lambda)H^{j_1+1}a_{s-i-i_1,k-j-r}-\\&-Ha_{s-i,k-j}+u_{s-i,k-j},\quad i=\overline{0,s},\quad j=\overline{1,k-1},\end{aligned} \tag{25}$$

підставимо вирази (19), (25) у (17). Тоді

$$\begin{aligned}b_{sl}&=\lambda_{sl}u_{00}+\sum_{i=0}^{s-1}\lambda_{il}u_{s-i,0}+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{j_1=1}^{l-j}\lambda_{ij}P^{s,l-j}_{j_1}(\lambda)H^{j_1}u_{00}+\\&+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i_1=0}^{s-i-1}\sum_{j_1=1}^{l-j}\lambda_{ij}P^{i_1,l-j}_{j_1}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,0}+\\&+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{l-j-1}\sum_{j_1=1}^{r}\lambda_{ij}P^{i_1,r}_{j_1}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i-i_1,l-j-r}-\\&-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-p_m}\sum_{i_1=0}^{s-i}\sum_{r=1}^{l-j-p_m}\sum_{j_1=1}^{r}\lambda_{ij}P^{i_1,r}_{j_1}(\lambda)H^{j_1+1}a_{s-i-i_1,l-j-r}-\\&-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}Ha_{s-i,l-j}+\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}u_{s-i,l-j}-a_{sl}.\end{aligned}$$

Змінивши порядок підсумовування у третьому доданку та замінивши $i+i_1 = i_2, j+r = r_1$ замість i_1 та r у четвертому, п'ятому та шостому доданках, зведемо цей вираз до вигляду

$$b_{sl} = \lambda_{sl}u_{00} + \sum_{i=0}^{s-1}\lambda_{il}u_{s-i,0} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j_1=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{l-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{s-i,l-j}(\lambda)H^{j_1}u_{00}+$$

$$+\sum_{i_2=0}^{s-1}\sum_{j_1=1}^{l-1}\sum_{i=1}^{i_2}\sum_{j=1}^{l-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_2-i,l-j}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i_2,0}+$$

$$+\sum_{i_2=0}^{s}\sum_{r_1=2}^{l-1}\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{j_1=1}^{r_1-1}\sum_{j=1}^{r_1-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_2-i,r_1-j}(\lambda)H^{j_1}u_{s-i_2,l-r_1}-$$

$$-\sum_{i_2=0}^{s}\sum_{r_1=2}^{l-p_m}\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{j_1=1}^{r_1-1}\sum_{j=1}^{r_1-j_1}\lambda_{ij}P_{j_1}^{i_2-i,r_1-j}(\lambda)H^{j_1+1}a_{s-i_2,l-r_1}-$$

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}Ha_{s-i,l-j} + \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{ij}u_{s-i,l-j} - a_{sl}.$$

Врахувавши співвідношення (24) та перепозначивши індекси, будемо мати

$$b_{sl} = \lambda_{sl}u_{00} + \sum_{j=2}^{l}P_j^{s,l}(\lambda)H^{j-1}u_{00} + \sum_{i=0}^{s-1}P_1^{i,l}(\lambda)u_{s-i,0} + \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=2}^{l}P_j^{i,l}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,0}+$$

$$+\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=2}^{l-1}\sum_{j=2}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,l-r} + \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-1}P_1^{i,r}(\lambda)u_{s-i,l-r}-$$

$$-\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=2}^{l-p}\sum_{j=2}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j}a_{s-i,l-r} - \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-p}P_1^{i,r}(\lambda)Ha_{s-i,l-r} - a_{sl} =$$

$$= \sum_{j=1}^{l}P_j^{s,l}(\lambda)H^{j-1}u_{00} + \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=1}^{l}P_j^{i,l}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,0}+$$

$$+\sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j-1}u_{s-i,l-r} - \sum_{i=0}^{s}\sum_{r=1}^{l-p}\sum_{j=1}^{r}P_j^{i,r}(\lambda)H^{j}a_{s-i,l-r} - a_{sl},$$

що й потрібно було довести.

Подамо вектори u_{ij} у вигляді

$$u_{ij} = \sum_{r=1}^{\nu}u_{ij}^{(r)}, \quad u_{ij}^{(r)} \in U_{0r}, \quad r = \overline{1,\nu}, \quad i,j = 0,1,\ldots .$$

Тоді з (22) дістанемо

$$b_{sk} = \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{j_1=1}^{k} P_{j_1}^{s,k}(\lambda) H^{j_1-1} u_{00}^{(r)} + \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{i=0}^{s} \sum_{j_2=1}^{k} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{i,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} u_{s-i,k-j_2}^{(r)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{s} \sum_{j_2=1}^{k-p_m} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{i,j_2}(\lambda) H^{j_1} a_{s-i,k-j_2} - a_{sk}.$$

Подіємо операторами $\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$, на вектори b_{sk}. При $s = 0$ матимемо

$$b_{0k} = \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{j_2=1}^{k} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{0,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} u_{0,k-j_2}^{(r)} - \sum_{j_2=1}^{k-p_m} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{0,j_2}(\lambda) H^{j_1} a_{0,k-j_2} - a_{0k}, \quad k \geq 1.$$

Застосувавши умову (20) до вектора b_{0,p_ν} та врахувавши (10), отримаємо рівняння

$$\lambda_{01}^{p_\nu} u_{00}^{(\nu)} = 0.$$

Оскільки λ_{01} повинно бути відмінним від нуля, то

$$u_{00}^{(\nu)} = 0. \tag{26}$$

Застосувавши умову (20) до вектора $b_{0,p_\nu+1}$, матимемо

$$\lambda_{01}^{p_\nu} u_{01}^{(\nu)} + \sum_{j_1=p_\nu+1}^{p_\nu+1} P_{j_1}^{0,p_\nu+1}(\lambda) \mathcal{D}_\nu H^{j_1+1} u_{00}^{(\nu)} + P_{p_\nu}^{0,p_\nu+1}(\lambda) u_{00}^{(\nu)} = 0,$$

звідки згідно з (26) дістанемо

$$u_{01}^{(\nu)} = 0.$$

Продовживши цей процес при $p_\nu < k < p_{\nu-1}$, отримаємо

$$u_{0j}^{(\nu)} = 0, \quad j = p_{\nu-1} - p_\nu. \tag{27}$$

Дійсно, нехай $u_{0j}^{(\nu)} = 0$ при $j < r < p_{\nu-1} - p_\nu$. Тоді, враховуючи властивості (10) операторів $\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$, та співвідношення (23), маємо

$$\mathcal{D}_j\, b_{0,p_\nu+r} = \sum_{j_2=p_\nu}^{p_\nu+r} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{0,j_2}(\lambda) \mathcal{D}_j H^{j_1-1} u_{0,p_\nu+r-j_2}^{(\nu)} = P_{p_\nu}^{0,p_\nu}(\lambda) u_{0r}^{(\nu)},$$

звідки $u_{0r}^{(\nu)} = 0$.

Нехай $k = p_{\nu-1}$, тоді, згідно з (10), (27), умова (20), застосована до вектора $b_{0,p_{\nu-1}}$, набере вигляду

$$\lambda_{01}^{p_\nu} u_{0,p_{\nu-1}-p_\nu}^{(\nu)} = 0, \quad \lambda_{01}^{p_{\nu-1}} u_{00}^{(\nu-1)} = 0,$$

звідки

$$u^{(\nu)}_{0,p_{\nu-1}-p_\nu} = 0, \quad u^{(\nu-1)}_{00} = 0.$$

Використовуючи умову (20) при $k < p_{\nu-2}$, знаходимо

$$u^{(\nu)}_{0j} = 0, \quad j < p_{\nu-2} - p_\nu,$$

$$u^{(\nu-1)}_{0j} = 0, \quad j < p_{\nu-2} - p_{\nu-1}.$$

Аналогічно можна показати, що при $p_{\nu-2} < k < p_m$

$$u^{(\sigma)}_{0j} = 0, \quad \text{якщо} \quad \sigma > m, \quad j < p_m - p_\sigma. \tag{28}$$

Введемо позначення

$$w^{(k)}_{0j} = u^{(k)}_{0,j+p_m-p_k}, \quad j \geq 0, \quad k > m.$$

Згідно з (28) $w^{(k)}_{0j} = 0$, $j < 0$, $k > m$.

Позначимо

$$\overline{u}_{0j} = \sum_{k=1}^{m-1} u^{(k)}_{0j}, \quad j \geq 0,$$

тоді вектор u_{0j} можна подати у вигляді

$$u_{0j} = \overline{u}_{0j} + u^{(m)}_{0j} + \sum_{q=m+1}^{\nu} w^{(q)}_{0,j-(p_m-p_q)}, \quad j \geq 0.$$

Розглянемо тепер умову розв'язності (20) для векторів b_{0k} при $k = p_m$. Оскільки

$$b_{0p_m} = \sum_{j_2=1}^{p_m} \sum_{j_1=1}^{j_2} P^{0,j_2}_{j_1}(\lambda) H^{j_1-1} \overline{u}_{0,p_m-j_2} + \sum_{j_2=1}^{p_m} \sum_{j_1=1}^{j_2} P^{0,j_2}_{j_1}(\lambda) H^{j_1-1} u^{(m)}_{0,p_m-j_2} +$$

$$+ \sum_{q=m+1}^{\nu} \sum_{j_2=1}^{p_q} \sum_{j_1=1}^{j_2} P^{0,j_2}_{j_1}(\lambda) H^{j_1-1} w^{(q)}_{0,p_q-j_2} - A_{01}\overline{u}_{00} - A_{00} u^{(m)}_{00},$$

то ця умова запишеться у вигляді

$$\mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{00} + \mathcal{D}_j A_{01} u^{(m)}_{00} = 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \tag{29}$$

$$\lambda^{p_m}_{01} u^{(m)}_{00} - \mathcal{D}_m A_{01} \overline{u}_{00} - \mathcal{D}_m A_{01} u^{(m)}_{00} = 0, \tag{30}$$

$$\lambda^{p_j}_{01} w^{(j)}_{00} - \mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{00} - \mathcal{D}_j A_{01} u^{(m)}_{00} = 0, \quad j = \overline{m+1, \nu}. \tag{31}$$

Система (29) еквівалентна рівнянню

$$\sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{00} + \sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_j A_{01} u_{00}^{(m)} = 0. \tag{32}$$

Нехай

$$\mathcal{R}_m = \sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_j A_{01}.$$

Оператор $\mathcal{R}_m$ відображає простір U на підпростір $U_{01} \oplus U_{02} \oplus \ldots \oplus U_{0,m-1}$. Позначимо через $\overline{\mathcal{R}}_m$ його звуження на цей підпростір, тоді рівняння (32) можна записати у вигляді

$$\overline{\mathcal{R}}_m \overline{u}_{00} + \mathcal{R}_m u_{00}^{(m)} = 0. \tag{33}$$

У базисі підпростору $U_{01} \oplus U_{02} \oplus \ldots \oplus U_{0,m-1}$ оператор $\overline{\mathcal{R}}_m$ задається квадратною матрицею розмірності $r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1}$:

$$\overline{R}_m = \|(A_{01}\varphi_j, \psi_i)\|_1^{r_1+\ldots+r_{m-1}},$$

а матриця R_m оператора $\mathcal{R}_m$ у базисі $\varphi_{r_1+\ldots+r_{m-1}+i}$, $i = \overline{1, r_m}$, підпростору U_{0m} є прямокутною розмірності $(r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1}) \times r_m$:

$$R_m = \left\| \left(A_{01} \varphi_{r_1+r_2+\ldots+r_{m-1}+j}, \psi_i \right) \right\|_{j=\overline{1,r_m}, i=\overline{1,r_1+\ldots+r_{m-1}}}.$$

Тоді, подавши вектори $\overline{u}_{00}$ та $u_{00}^{(m)}$ їх координатами у підпросторах $U_{01} \oplus U_{02} \oplus \ldots \oplus U_{0,m-1}$ та U_{0m} відповідно, з (33) отримаємо

$$\overline{R}_m \overline{u}_{00} + R_m u_{00}^{(m)} = 0.$$

Оскільки за умовою теореми матриця R_m є неособливою, то з цього рівняння знайдемо

$$\overline{u}_{00} = -\overline{R}_m^{-1} R_m u_{00}^{(m)}. \tag{34}$$

Розглянемо рівняння (30). Нехай $\mathcal{D}_m A_{01} = \Gamma_m$ — оператор, який відображає підпростір U на підпростір U_{0m}. У базисі $\varphi_{r_1+\ldots+r_{m-1}+i}$, $i = \overline{1, r_m}$, цього підпростору він задається квадратною матрицею $\overline{T}_m$ r_m-го порядку:

$$\overline{T}_m = \left\| \left(A_{01} \varphi_{r_1+\ldots+r_{m-1}+j}, \psi_{r_1+\ldots+r_{m-1}+i} \right) \right\|_{i,j=\overline{1,r_m}},$$

а в базисі $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r_1+\ldots+r_{m-1}}$ підпростору $U_{01} \oplus U_{02} \oplus \ldots \oplus U_{0,m-1}$ — прямокутною матрицею T_m розмірності $r_m \times (r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1})$:

$$T_m = \left\| \left(A_{01} \varphi_j, \psi_{r_1+\ldots+r_{m-1}+i} \right) \right\|_{i=\overline{1,r_m}, j=\overline{1,r_1+\ldots+r_{m-1}}}.$$

Якщо вектори $\overline{u}_{00}$ та $u_{00}^{(m)}$ у рівнянні (30) подати їх координатами у відповідних підпросторах, то це рівняння набере вигляду

$$\lambda_{01}^{p_m} u_{00}^{(m)} - T_m \overline{u}_{00} - \overline{T}_m u_{00}^{(m)} = 0.$$

Підставивши сюди вираз (34), отримаємо рівняння відносно вектора $u_{00}^{(m)}$, заданого своїми координатами у підпросторі U_{0m} :

$$\left(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m - \lambda_{01}^{p_m} E_{r_m}\right) u_{00}^{(m)} = 0, \tag{35}$$

де E_{r_m} — одинична матриця порядку r_m. Воно має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\det\left(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m - \lambda_{01}^{p_m} E_{r_m}\right) = 0. \tag{36}$$

Враховуючи вигляд матриць $\overline{T}_m$, T_m, $\overline{R}_m$, R_m і використовуючи формули Шура [3, с. 55], встановлюємо, що рівняння (36) рівносильне такому:

$$\begin{vmatrix} \overline{R}_m & R_m \\ T_m & \overline{T}_m - \lambda_{01}^{p_m} E_{r_m} \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\det\left(\|(A_{01}\varphi_i, \psi_j)\|_1^{r_1+\ldots+r_m} - \lambda_{01}^{p_m} \Gamma_{r_m}\right) = 0.$$

Звідси, згідно з умовою 3 теореми, знайдемо $r_m p_m$ різних відмінних від нуля значень λ_{01} :

$$\lambda_{01} = \sqrt[p_m]{|\eta_j|} \exp\left(i\,\frac{\arg\eta_j + 2(k-1)\pi}{p_m}\right), \quad k = \overline{1, p_m}, \quad j = \overline{1, r_m}. \tag{37}$$

З рівняння (35) визначимо відповідні вектори $u_{00}^{(m)}$:

$$u_{00}^{(m)} = \varphi_j^*, \quad j = \overline{1, r_m}, \tag{38}$$

де φ_j^* — власні вектори матриці $(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m)$, що відповідають власним значенням η_j, $j = \overline{1, r_m}$. Тоді за формулою (34) знайдемо відповідний вектор $\overline{u}_{00}$, а з рівняння (31) — вектори $w_{00}^{(j)}$:

$$w_{00}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{01}^{p_j}}\left(\mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{00} + \mathcal{D}_j A_{01} u_{00}^{(m)}\right), \quad j = \overline{m+1, \nu}.$$

Зафіксуємо одне із значень λ_{01}, що виражаються за формулою (37), і позначимо через η власне значення, а через φ^* — відповідний власний вектор матриці $(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m)$. Нехай $\lambda_{i,j+1}$ і u_{ij} вже відомі. Тоді для визначення $\lambda_{s,k+1}$ та u_{sk} використаємо умову (20) для вектора b_{s,p_m+k}, який можна подати у вигляді

$$b_{s,p_m+k} = P_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda) H^{p_m-1} u_{00}^{(m)} + \lambda_{01}^{p_m} H^{p_m-1} u_{sk}^{(m)} + \sum_{j=m+1}^{\nu} \lambda_{01}^{p_j} H^{p_j-1} w_{sk}^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{\nu} P_{p_j}^{s,p_j+k}(\lambda) H^{p_j-1} w_{00}^{(j)} - A_{01}\overline{u}_{sk} - A_{s1} u_{0k}^{(m)} + y_{sk} + \overline{y}_{sk},$$

де

$$y_{sk} = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{j_1=p_j}^{p_m+k} P_{j_1}^{s,p_m+k}(\lambda) H^{j_1-1} u_{00}^{(j)} + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j_1=p_j}^{p_m+k} P_{j_1}^{i,p_m+k}(\lambda) H^{j_1-1} u_{s-i,0}^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j_1=p_m+1}^{p_m+k} P_{j_1}^{s,p_m+k}(\lambda) H^{j_1-1} u_{00}^{(m)} + \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j_1=p_m}^{p_m+k} P_{j_1}^{i,p_m+k}(\lambda) H^{j_1-1} u_{p-i,0}^{(m)} +$$

$$+ \sum_{j_2=p_m+1}^{p_m+k} \sum_{j_1=p_m}^{j_2} P_{j_1}^{0,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} u_{s,p_m+k-j_2}^{(m)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j_2=p_m}^{p_m+k-1} \sum_{j_1=p_m}^{j_2} P_{j_1}^{i,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} u_{s-i,k+p_m-j_2}^{(m)} +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{j_2=p_j+1}^{p_j+k} \sum_{j_1=p_j}^{j_2} P_{j_1}^{0,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} w_{s,k+p_j-j_2}^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j_2=p_j}^{p_j+k} \sum_{j_1=p_j}^{j_2} P_{j_1}^{i,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} w_{s-i,k+p_j-j_2}^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{j_2=p_j}^{p_j+k-1} \sum_{j_1=p_j}^{j_2} P_{j_1}^{s,j_2}(\lambda) H^{j_1-1} w_{0,k+p_j-j_2}^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{j_1=p_j+1}^{p_j+k} P_{j_1}^{s,p_j+k}(\lambda) H^{j_1-1} w_{00}^{(j)} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{\nu} A_{01} w_{s,k-(p_m-p_j)}^{(j)} - \widetilde{a}_{s,p_m+k},$$

$$\widetilde{a}_{s,p_m+k} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j_2=1}^{k} \sum_{j_1=1}^{j_2} P_{j_1}^{i,j_2}(\lambda) H^{j_1} a_{s-i,k+p_m-j_2} + a_{s,k+p_m} - A_{01} u_{sk}.$$

Тут символом $\overline{y}_{sk}$ позначено суму всіх тих доданків у складі b_{s,p_m+k}, які анулюються під дією операторів $\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$. В результаті дістанемо

$$\mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{sk} + \mathcal{D}_j A_{01} u_{sk}^{(m)} = \mathcal{D}_j y_{sk}, \quad j = \overline{1, m-1}, \tag{39}$$

$$\mathcal{D}_m A_{01} \overline{u}_{sk} + \mathcal{D}_m A_{01} u_{sk}^{(m)} - \lambda_{01}^{p_m} u_{00}^{(m)} = P_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda) u_{00}^{(m)} + \mathcal{D}_m y_{sk}, \tag{40}$$

$$\mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{sk} + \mathcal{D}_j A_{01} u_{sk}^{(m)} + \lambda_{01}^{p_j} w_{sk}^{(j)} = P_{p_j}^{s,p_j+k}(\lambda) w_{00}^{(m)} + \mathcal{D}_j y_{sk}, \quad j = \overline{m+1, \nu}. \tag{41}$$

Система рівнянь (39) еквівалентна рівнянню

$$\sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{sk} + \sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_j A_{01} u_{sk}^{(m)} = \sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_j y_{sk}.$$

Подавши вектори $\overline{u}_{sk}$ та $u_{sk}^{(m)}$ їх координатами у відповідних підпросторах $U_{01} \oplus U_{02} \oplus \ldots \ldots \oplus U_{0,m-1}$ та U_{0m} і використавши введені раніше позначення, запишемо це рівняння у вигляді

$$\overline{R}_m \overline{u}_{sk} + R_m u_{sk}^{(m)} = \widetilde{y}_{sk},$$

де $\widetilde{y}_{sk} = \sum_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_j y_{sk}$ — вектор із підпростору $U_{01} \oplus U_{02} \oplus \ldots \oplus U_{0,m-1}$. Звідси

$$\overline{u}_{sk} = -\overline{R}_m^{-1} R_m u_{sk}^{(m)} + \overline{R}_m^{-1} \widetilde{y}_{sk}. \tag{42}$$

Здійснивши перехід до базисів відповідних підпросторів, підставимо (42) в (40). Врахувавши, що $\lambda_{01}^{p_m} = \eta$, $u_{00}^{(m)} = \varphi^*$, $P_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda) = p_m \lambda_{01}^{p_m-1} \lambda_{s,k+1} + \widetilde{P}_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda)$, де $\widetilde{P}_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda)$ — доданки $P_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda)$, які не містять $\lambda_{s,k+1}$, дістанемо

$$\left(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m - \eta E_{r_m}\right) u_{sk}^{(m)} = \widetilde{b}_{sk}, \tag{43}$$

де

$$\widetilde{b}_{sk} = \mathcal{D}_m y_{sk} - T_m \overline{R}_m^{-1} \widetilde{y}_{sk} + p_m \lambda_{01}^{p_m-1} \lambda_{s,k+1} \varphi^* + \widetilde{P}_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda) \varphi^*.$$

Позначимо через ψ^* елемент нуль-простору матриці $(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m - \eta E_{r_m})^*$, спряженої до $(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m - \eta E_{r_m})$, який виберемо так, щоб виконувалось співвідношення $(\varphi^*, \psi^*) = 1$. Тоді з умови $(\widetilde{b}_{sk}, \psi^*) = 0$ розв'язності рівняння (43) знайдемо

$$\lambda_{s,k+1} = \frac{1}{p_m \lambda_{01}^{p_m-1}} \left(\left(T_m \overline{R}_m^{-1} \widetilde{y}_{sk}, \psi^* \right) - (\mathcal{D}_m y_{sk}, \psi^*) - \widetilde{P}_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda) \right), \tag{44}$$

а вектор $u_{sk}^{(m)}$ визначимо за формулою

$$u_{sk}^{(m)} = \widetilde{H} \widetilde{b}_{sk}, \tag{45}$$

де $\widetilde{H}$ — напівобернена матриця до матриці $(\overline{T}_m - T_m \overline{R}_m^{-1} R_m - \eta E_{r_m})$. Оскільки $u_{sk}^{(m)}$ вже відомий, то $\overline{u}_{sk}$ знайдемо за формулою (42), а з рівнянь (41) отримаємо

$$w_{sk}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{01}^{p_j}} \left(\mathcal{D}_j A_{01} \overline{u}_{sk} + \mathcal{D}_j A_{01} u_{sk}^{m} - \widetilde{P}_{p_m}^{s,p_m+k}(\lambda) w_{00}^{(m)} - \mathcal{D}_j y_{sk} \right), \quad j = \overline{m+1, \nu}. \tag{46}$$

Вектори u_{sk} знаходимо у вигляді

$$u_{sk} = \overline{u}_{sk} + u_{sk}^{m} + \sum_{j=m+1}^{\nu} w_{s,k-(p_m-p_j)}^{(j)}, \tag{47}$$

виразивши заздалегідь вектори-доданки через базисні вектори відповідних підпросторів. Після цього за формулою (21) визначимо вектори v_{sk}. Рекурентні формули (19), (20), (37), (38), (42), (44) – (47) дають можливість визначити будь-які коефіцієнти розвинень (13), (14).

Теорему доведено.

Неважко переконатися, що знайдені частинні розв'язки системи (4) лінійно незалежні при досить малих ε і $\dfrac{1}{x\varepsilon}$ і, отже, дозволяють побудувати її загальний формальний розв'язок.

3. Побудуємо частинний розв'язок неоднорідної системи (1). При цьому необхідно розрізняти два випадки:

1) „резонансу", коли значення θ збігається з коренем характеристичного рівняння $\det(A_{00} - \lambda E) = 0$;

2) „нерезонансу", коли θ не дорівнює жодному з коренів характеристичного рівняння.

Проведемо дослідження у випадку „резонансу", коли $\theta = \lambda_0$, за виконання умов, передбачених у п. 2. Справджується наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 1 і матриця $R = \|(A_{01}\varphi_j, \psi_i)\|_{i,j=\overline{1,r}}$ є невиродженою. Тоді система рівнянь (1) має частинний формальний розв'язок вигляду*

$$z(x,\varepsilon) = p\left(\frac{1}{x\varepsilon}, \varepsilon\right) \exp\left(\varepsilon^{-h}\frac{\lambda_0 x^{g+1}}{g+1}\right), \tag{48}$$

де $p\left(\dfrac{1}{x\varepsilon}, \varepsilon\right)$ — n-вимірний вектор, який в областях S та π_ε зображується у вигляді формального розвинення

$$p\left(\frac{1}{x\varepsilon}, \varepsilon\right) = x^{-g}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^s \varepsilon^k z_{sk}. \tag{49}$$

Доведення. Підставимо вектор (48) у систему (1) при $\theta = \lambda_0$ і, врахувавши розвинення (2), (3), (49), прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε та $\dfrac{1}{x\varepsilon}$. Отримаємо систему рівнянь

$$(A_{00} - \lambda E)z_{s,-1} = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{50}$$

$$(A_{00} - \lambda E)z_{s,k} = b_{s,k}, \quad s, k = 0, 1, \ldots, \tag{51}$$

де

$$\begin{gathered} b_{s,k} = \bar{b}_{s,k} - (g + s - (g+1))z_{s-(g+1),k-(h+g+1)}, \\ \bar{b}_{s,k} = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{k+1-i} A_{ij}z_{s-i,k-i-j} - \sum_{j=1}^{k+1} A_{0j}z_{s,k-j} - f_{s,k-s}. \end{gathered} \tag{52}$$

З рівнянь (50) маємо

$$z_{s,-1} = u_{s,-1}, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{53}$$

де $u_{s,-1}$ — вектори з підпростору U_0, що є прямою сумою (8) підпросторів U_{0j}, $j = \overline{1,\nu}$.

Якщо умова (20) розв'язності рівнянь (51) виконується, то вектори z_{sk} шукатимемо у вигляді

$$z_{sk} = Hb_{sk} + u_{sk}, \quad k, s = 0, 1, \ldots, \quad u_{sk} \in U_0. \tag{54}$$

Для визначення векторів u_{sk}, $s \geq 0$, $k \geq -1$, використаємо умову (20):

$$\sum_{j=1}^{\nu} \mathcal{D}_j b_{s,k+1} = 0. \tag{55}$$

Якщо індекси s і k такі, що

$$0 \leq s < g + 1, \quad k \geq -1,$$

або

$$s \geq 0, \quad -1 \leq k < h + g + 1,$$

то вектори $b_{s,k+1}$ можна подати у вигляді

$$b_{s,k+1} = -A_{01} u_{sk} - d_{s,k+1}, \tag{56}$$

де

$$d_{s,k+1} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{k+2-i} A_{ij} z_{s-i,k+1-i-j} + \sum_{j=2}^{k+1} A_{0j} z_{s,k+1-j} + f_{s,k+1-s} + A_{01} H b_{sk}. \tag{57}$$

Тоді рівність (55) запишеться у вигляді

$$\sum_{j=1}^{\nu} \mathcal{D}_j A_{01} u_{sk} = -\sum_{j=1}^{\nu} \mathcal{D}_j d_{s,k+1}.$$

Оператор $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \mathcal{D}_j A_{01}$ відображає U на r-вимірний підпростір U_0. Його звуження на цей підпростір позначимо через $\mathcal{R}$. Матриця цього оператора у підпросторі U_0 має вигляд

$$R = \|(A_{01}\varphi_j, \psi_i)\|_{i,j=\overline{1,r}}\,. \tag{58}$$

Тоді у підпросторі U_0 останнє рівняння запишеться у вигляді

$$R u_{sk} = -\sum_{j=1}^{\nu} \mathcal{D}_j d_{s,k+1}.$$

Оскільки, згідно з умовою теореми, $\det R \neq 0$, то

$$u_{sk} = -R^{-1} \sum_{j=1}^{\nu} \mathcal{D}_j d_{s,k+1}.$$

Нехай індекси s і k такі, що

$$s \geq m(g+1), \quad m(h+g+1)-2 \leq k < (m+1)(h+g+1)-2,$$

або

$$m(g+1) \leq s < (m+1)(g+1), \quad k \geq m(h+g+1)-2,$$

де $m = \min\left\{\left[\frac{s}{g+1}\right], \left[\frac{k+2}{h+g+1}\right]\right\}$, $m \geq 1$.

Тоді

$$b_{s,k+1} = -c_{sk}A_{01}\varphi - \overline{d}_{s,k+1} - \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{p_j}(-1)^{i+1}\prod_{j_1=1}^{i}(g+s-j_1(g+1))H^{i-1}u^{(j)}_{s-i(g+1),k+1-i(h+g+1)},$$

де

$$\overline{d}_{s,k+1} = d_{s,k+1} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\prod_{j_1=1}^{i}(g+s-j_1(g+1))H^{i}\overline{b}_{s-i(g+1),k+1-i(h+g+1)} +$$
$$+\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=p_j+1}^{m}(-1)^{i+1}\prod_{j_1=1}^{i}(g+s-j_1(g+1))H^{i-1}u^{(j)}_{s-i(g+1),k+1-i(h+g+1)},$$

і, отже, умова (55) запишеться у вигляді

$$Ru_{sk} = -\left(\sum_{j=1}^{\nu}\mathcal{D}_j\overline{d}_{s,k+1} + \sum_{j=1}^{\nu}(-1)^{p_j+1}\prod_{j_1=1}^{p_j}(g+s-j_1(g+1))u^{(j)}_{s-p_j(g+1),k+1-p_j(h+g+1)}\right),$$

звідки

$$u_{sk} = -R^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\nu}\mathcal{D}_j\overline{d}_{s,k+1} + \sum_{j=1}^{\nu}(-1)^{p_j+1}\prod_{j_1=1}^{p_j}(g+s-j_1(g+1))u^{(j)}_{s-p_j(g+1),k+1-p_j(h+g+1)}\right). \tag{59}$$

Виразивши вектори u_{sk}, $s \geq 0$, $k \geq -1$, через базис підпростору U_0, за формулами (53), (54) визначимо вектори z_{sk}, $s \geq 0$, $k \geq -1$.

Рекурентні формули (53), (54) та (59) (при $m \geq 0$) дозволяють визначити будь-які коефіцієнти розвинення (49).

Теорему доведено.

Використовуючи методи [4], можна довести, що побудовані розв'язки є асимптотичними розвиненнями деяких точних розв'язків цих систем при $\varepsilon \to 0$, $x \to \infty$, $\left|\frac{1}{x\varepsilon}\right| < 1$.

1. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. — Киев, 1980. — 48 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 80.3).

2. *Давидюк Г.П.* Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1983. — 132 с.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

4. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.

Одержано 10.06.09