УДК 517.9

ПРО ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ, ВИЗНАЧЕНИХ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ТОРАХ

А. М. Самойленко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: sam@imath.kiev.ua

Ю. В. Теплінський

Кам'янець-Поділ. нац. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський Хмельницької обл.,
вул. Івана Огієнка, 61

К. В. Пасюк

Буковин. держ. фін. академія
Україна, 58000, Чернівці, вул. Штерна, 1

In the space of bounded number sequences, sufficient conditions of existence of invariant tori for linear and quasi-linear countable systems of differential-difference equations defined on infinite-dimensional tori and containing an infinite set of constant deviations of scalar argument are obtained.

Получены достаточные условия существования в пространстве ограниченных числовых последовательностей инвариантных торов линейных и квазилинейных счетных систем дифференциально-разностных уравнений, определенных на бесконечномерных торах и содержащих бесконечное множество постоянных отклонений скалярного аргумента.

1. Постановка задачі. Відомо, що дослідження інваріантних множин і, зокрема, інваріантних торів посідають важливе місце як в теорії неперервних динамічних систем (потоків), так і в теорії дискретних динамічних систем (каскадів), визначених у різноманітних нормованих просторах. Велика кількість фундаментальних результатів, одержаних у цій галузі математики протягом майже чотирьох останніх десятиліть, пов'язана із застосуванням методу функції Гріна задачі про інваріантний тор лінійного розширення динамічної системи на торі, запропонованого А. М. Самойленком у 1970 році [1, 2]. У роботах [3 – 6] вказаний метод застосовано до дослідження інваріантних торів зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, визначених на торах. Протягом останніх десяти років було опубліковано ряд наукових праць [7 – 15], в яких цей метод застосовано до дослідження інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь. У цій роботі поставлено і розв'язано задачу відшукання достатніх умов існування у просторі обмежених числових послідовностей інваріантних торів лінійних та квазілінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, що визначені на нескінченновимірних торах і містять нескінченну множину різнознакових сталих відхилень скалярного аргументу. До цього часу така задача у математичній літературі не досліджувалась.

2. Основне допоміжне твердження. Розглянемо спочатку рівняння

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \tag{1}$$

де $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots) \in \mathfrak{M}$; відображення $a(\phi) = \{a_1(\phi), a_2(\phi), a_3(\phi), \ldots\}$ визначено періодичними для всіх $i \in N$ відносно координат ϕ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, з періодом 2π функціями $a_i(\phi) : \mathfrak{M} \to R^1$, що дозволяє вважати рівняння (1) визначеним на нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$, а ці координати — кутовими координатами на ньому; N — множина натуральних чисел, $\mathfrak{M}$ — простір обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ зі стандартною нормою $\|x\| = \sup_i\{|x_i|\}$; символом $\dfrac{d\phi}{dt}$ позначено вектор $\left\{\dfrac{d\phi_1}{dt}; \dfrac{d\phi_2}{dt}; \dfrac{d\phi_3}{dt}, \ldots\right\}$.

Домовимося надалі диференціювати та інтегрувати векторні функції лише у покоординатному сенсі.

Наступні умови назвемо умовами $(\mathbf{A})$:

1) $\|a(\phi)\| = \sup_i\{|a_i(\phi)|\} \le A = \text{const} > 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{T}_\infty$;

2) $\|a(\phi) - a(\psi)\| \le \alpha\|\phi - \psi\|$, де $\alpha = \text{const} > 0, \quad \forall\{\phi, \psi\} \subset \mathcal{T}_\infty$.

Якщо ці умови виконуються, то за теоремою 1.3 з [3, с. 12] для будь-якого $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ рівняння (1) має у класі функцій, обмежених за нормою на будь-якому скінченному сегменті числової осі, єдиний розв'язок $\phi = \phi_t(\phi) = (\phi_{1_t}(\phi), \phi_{2_t}(\phi), \ldots)$, що визначений на всій осі і задовольняє початкову умову $\phi = \phi_0(\phi)$, причому цей розв'язок є неперервним відносно t відображенням $R^1 \to \mathfrak{M}$.

Запишемо тепер систему рівнянь

$$\frac{d\phi}{dt} = a(\phi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\phi)x, \tag{2}$$

де $x \in \mathfrak{M}$; $P(\phi) = [p_{ij}(\phi)]_{ij=1}^{\infty}$ — така нескінченна матриця з неперервними по ϕ і періодичними відносно ϕ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, з періодом 2π елементами, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\phi \in \mathcal{T}_\infty} |p_{sj}(\phi)| \le P^0 = \text{const} < \infty, \quad s = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

Якщо справджуються умови $(\mathbf{A})$ та нерівності (3), то для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = P(\phi_t(\phi))x \tag{4}$$

існує 2π-періодичний відносно ϕ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, матрицант $\Omega_\tau^t(\phi)$ (див. [3, с. 108]), елементи якого неперервні по τ для всіх $\tau \in R^1$ (див. наслідок 5.1 з [3, с. 38]).

Норму матриці $P(\phi)$ з (2) задамо рівністю $\|P(\phi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\phi)|$ і через $C^0(\mathcal{T}_\infty)$ позначимо множину визначених на торі $\mathcal{T}_\infty$ обмежених за нормою вектор-функцій і матриць, координати і елементи яких відповідно 2π-періодичні по ϕ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, і неперервні відносно ϕ. Множину елементів з $C^0(\mathcal{T}_\infty)$, що задовольняють умову Ліпшиця по ϕ, позначимо через $C^0_{\text{Lip}}(\mathcal{T}_\infty)$ і вважатимемо, що матриця $P(\phi) \in C_\phi(\mathcal{T}_\infty)$, якщо вона належить множині $C^0(\mathcal{T}_\infty)$ і для неї справджується умова (3).

Якщо існує така матриця $C(\phi) \in C_\phi(\mathcal{T}_\infty)$, що функція

$$G_t(\tau, \phi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(\phi) C(\phi_\tau(\phi)) & \text{при} \qquad \tau \le t, \\ \\ \Omega_\tau^t(\phi)[C(\phi_\tau(\phi)) - E] & \text{при} \qquad \tau > t \end{cases}$$

задовольняє нерівність

$$\|G_t(\tau, \phi)\| \le K \exp\{-\gamma |t - \tau|\} \tag{5}$$

для всіх $\{t, \tau\} \subset R^1$, $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, де K і γ — додатні сталі, що не залежать від ϕ, t, τ, E — нескінченна одинична матриця, то цю функцію називають функцією Гріна – Самойленка (скорочено ФГС) задачі про обмежені розв'язки, а функцію $G_0(\tau, \phi)$ — функцією Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори лінійних розширень рівняння (4) або системи рівнянь (2).

Неважко поширити доведення зауваження 7.1 з [3, с. 71] на випадок $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ і переконатися в еквівалентності нерівності (5) та оцінки $\|G_0(\tau, \phi)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\}$. Легко переконатися також, що для е-дихотомічного на R^1 рівняння (4) з матричним проектором (див. [3, с. 72]) існує вказана вище матриця $C(\phi)$. Зауважимо, що до рівнянь такого типу належить рівняння (4), матрицант якого задовольняє оцінку $\|\Omega_\tau^t(\phi)\| \le K \exp\{-\gamma|t - \tau|\}$.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + c(\phi, t), \tag{6}$$

що відповідає рівнянню (4), де функція

$$c(\phi, t) = (c_1(z_1(\phi, t), z_2(\phi, t), \ldots), c_2(z_1(\phi, t), z_2(\phi, t), \ldots), \ldots)$$

здійснює відображення множини $\mathcal{T}_\infty^\infty = \mathcal{T}_\infty \times \mathcal{T}_\infty \times \ldots$ у простір $\mathfrak{M}$, тобто $c_i(z_1(\phi, t), z_2(\phi, t), \ldots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1$ для будь-якого натурального числа i; точки $z_i(\phi, t) = (\phi_{1_{t+\Delta_{i1}}}(\phi), \phi_{2_{t+\Delta_{i2}}}(\phi), \ldots)$, $t \in R^1$, належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Δ_{ij} — довільні фіксовані дійсні числа (сталі відхилення аргументу t), $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i, j\} \subset N$. У випадку, коли $\Delta_{k1} = \Delta_{k2} = \ldots = \Delta_k = \text{const}$, одержуємо рівність $z_k = \phi_{t+\Delta_k}(\phi)$.

Наступні умови назвемо умовами $(\mathbf{C})$:

1) функції $c_i(z) = c_i(z_1, z_2, \ldots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора z_j для будь-яких натуральних i та j;

2) функції $c_i(z)$ неперервні відносно z на $\mathcal{T}_\infty^\infty$ і рівномірно обмежені на цій множині, тобто $\|c(z)\| = \sup_i |c_i(z)| \le C^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Інваріантним тором $\mathcal{T}^0$ системи рівнянь (1), (6) (рівняння (6)) називають множину точок $x \in \mathfrak{M}$, породжену функцією

$$x = u^0(\phi) = (u_1^0(\phi), u_2^0(\phi), \ldots), \quad \phi \in \mathcal{T}_\infty,$$

якщо вона 2π-періодична відносно ϕ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, обмежена за нормою і при будь-яких $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, $t \in R^1$ задовольняє рівність

$$\frac{du^0(\phi_t(\phi))}{dt} = P(\phi_t(\phi))u^0(\phi_t(\phi)) + c(\phi, t). \tag{7}$$

Справджується таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $a(\phi) \in C^0_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_\infty)$, $P(\phi) \in C_\phi(\mathcal{T}_\infty)$, *виконуються умови* $(\mathbf{C})$ *та для рівняння (4) існує ФГС* $G_t(\tau, \phi)$. *Тоді рівняня (6) має інваріантний тор* $\mathcal{T}^0$, *породжений функцією*

$$u^0(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \phi) c(\phi, \tau) d\tau. \tag{8}$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що з включення $a(\phi) \in C^0_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_\infty)$ випливають умови $(\mathbf{A})$, тобто рівняння (6) записується однозначно. Неважко перевірити, що невласний інтеграл у рівності (8) збігається рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ у покоординатному сенсі, якщо функції $c_i(z(\phi, t))$ неперервні по t на R^1 при всіх $i \in N$. Переконаємося у виконанні останньої вимоги. Очевидно, що для $\{t_1, t_2\} \subset R^1$ рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ справджуються нерівності

$$\|\phi_{t_1}(\phi) - \phi_{t_2}(\phi)\| \le \left| \int\limits_{t_2}^{t_1} \|a(\phi_t(\phi))\| dt \right| \le A|t_1 - t_2| < \varepsilon = \mathrm{const}\ > 0,$$

$$\|z_i(\phi, t_1) - z_i(\phi, t_2)\| = \sup_{j \in N} \{|\phi_{j_{t_1 + \Delta_{ij}}}(\phi) - \phi_{j_{t_2 + \Delta_{ij}}}(\phi)|\} \le A|t_1 - t_2| < \varepsilon \quad \forall i \in N,$$

якщо $|t_1 - t_2| < \delta$, а $\delta < \dfrac{\varepsilon}{A}$. Це означає рівностепеневу відносно $i \in N$ неперервність послідовності функцій $z_i(\phi, t)$, а разом з тим і неперервність функцій $c_i(z(\phi, t))$ по t на R^1 при всіх $i \in N$. Далі, беручи до уваги включення $\{P(\phi), C(\phi)\} \subset C_\phi(\mathcal{T}_\infty)$ та оцінку $\sup_{i \in N} \sum_{j=1}^{\infty} \max_{t \in T} |\omega_{ij}(t, \tau, \phi)| \le e^{P^0 \sigma}$, де $\Omega^t_\tau(\phi) = [\omega_{ij}(t, \tau, \phi)]_{i,j=1}^{\infty}$, σ — довжина сегмента T числової прямої, який містить точку τ (див. [3, с. 31]), переконуємося, що координати підінтегральної векторної функції $G_0(\tau, \phi) c(\phi, \tau)$ з (8) є неперервними відносно τ на $R^1 \setminus \{0\}$.

Залишається показати, що:

а) функція $u^0(\phi)$ є 2π-періодичною відносно ϕ_i для будь-якого $i \in N$;

б) при всіх $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, $t \in R^1$ справджується рівність

$$u^0(\phi_t(\phi)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \phi) c(\phi, \tau) d\tau;$$

в) функція $u^0(\phi_t(\phi))$ диференційовна відносно t на всій числовій прямій і задовольняє рівняння (7) при всіх $t \in R^1$.

Наявність сталих відхилень Δ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots$, у рівнянні (6) та у рівності (8) не дуже ускладнює обґрунтування правильності трьох останніх тверджень, яке проводиться аналогічно до доведень теорем 7.1 та 8.1 з [3, с. 60, 75]. При доведенні третього твердження слід врахувати, що інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} G_t(\tau, \phi) c(\phi, \tau) d\tau$ збігається рівномірно відносно t на довільному скінченному відрізку числової осі, а елементи матриці $\Omega^t_\tau(\phi)$ неперервні за сукупністю змінних $\{t, \tau\} \subset R^1$, оскільки таку властивість має будь-який її вектор-стовпець, який ми позначимо через $x(t, \tau, x_0)$. Дійсно,

$$\|x(t + \Delta t, \tau + \Delta\tau, x_0) - x(t, \tau, x_0)\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

де $\varepsilon_1 = \|x(t+\Delta t, \tau+\Delta\tau, x_0) - x(t+\Delta t, \tau, x_0)\|$, $\varepsilon_2 = \|x(t+\Delta t, \tau, x_0) - x(t, \tau, x_0)\|$. Очевидно, для будь-якого $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ існує $\rho > 0$ таке, що $\varepsilon_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $\Delta t < \rho$. Крім того, із доведення теореми 5.3 з [3, с. 37] випливає, що $\varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $|\Delta\tau| < \dfrac{1}{P^0} \ln \dfrac{\varepsilon}{2g}$, де g — деяка додатна стала.

3. Існування інваріантного тора лінійної системи. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi, t)x(t + \Delta) + c(\phi, t), \tag{9}$$

де $B(\phi, t) = [b_{ij}(\phi, t)]_{ij=1}^{\infty}$ — нескінченна матриця, функції

$$b_{ij}(\phi, t) = b_{ij}(y_1(\phi, t), y_2(\phi, t), \ldots)$$

здійснюють відображення множини $\mathcal{T}_\infty^\infty$ у простір R^1, точки

$$y_i(\phi, t) = (\phi_{1_{t+\Gamma_{i1}}}(\phi), \phi_{2_{t+\Gamma_{i2}}}(\phi), \ldots) \quad \forall t \in R^1$$

належать тору $\mathcal{T}_\infty$; $x(t + \Delta) = (x_1(t + \Delta_1), x_2(t + \Delta_2), \ldots)$; Γ_{ij} та Δ_i — довільні фіксовані дійсні числа (сталі відхилення аргументу t); $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i, j\} \subset N$.

Наступні умови назвемо умовами $(\mathbf{B})$:

1) функції $b_{ij}(y) = b_{ij}(y_1, y_2, \ldots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора y_s для будь-яких натуральних i, j, s;

2) для будь-яких $\{i, j\} \subset N$ функції $b_{ij}(y)$ неперервні відносно y на $\mathcal{T}_\infty^\infty$ і

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{y \in \mathcal{T}_\infty^\infty} |b_{sj}(y)| \leq B^0 = \text{const} < \infty \quad \forall s \in N.$$

Поняття інваріантного тора $\mathcal{T} : x = u(\phi) = (u_1(\phi), u_2(\phi), \ldots)$ для рівняння (9) вводиться аналогічно до наведеного раніше означення множини $\mathcal{T}^0 : x = u^0(\phi)$, лише співвідношення (7) у ньому слід замінити рівністю

$$\frac{du(\phi_t(\phi))}{dt} = P(\phi_t(\phi))u(\phi_t(\phi)) + B(\phi, t)u(\phi, t + \Delta) + c(\phi, t), \tag{10}$$

де $u(\phi, t + \Delta) = (u_1(\phi_{t+\Delta_1}(\phi)), u_2(\phi_{t+\Delta_2}(\phi)), \ldots)$.

Запишемо тепер рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi, t)u^0(\phi, t + \Delta) + c(\phi, t) \tag{11}$$

і, використавши схему доведення леми 1, переконаємося, що воно визначає у просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathcal{T}^1$, породжений функцією

$$x = u^1(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\phi)c^1(\phi,\tau)d\tau, \tag{12}$$

де $c^1(\phi,\tau) = B(\phi,\tau)u^0(\phi,\tau+\Delta) + c(\phi,\tau)$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1, умови* $(\mathbf{B})$ *та наступні вимоги:*

1) $\|P(\phi) - P(\bar\phi)\| \le p^0\|\phi - \bar\phi\|$, $p^0 = \mathrm{const} > 0$, $\forall\{\phi,\bar\phi\} \subset \mathcal{T}_\infty$;

2) $\|c(z) - c(\bar z)\| \le \eta\|z - \bar z\|$, $\eta = \mathrm{const} > 0$, $\forall\{z,\bar z\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty$;

3) рівняння (4) не має обмежених на всій числовій осі розв'язків, крім нульового;

4) множина Δ_{ij} *відхилень аргументу* t *обмежена, тобто* $|\Delta_{ij}| \le \Delta^* = \mathrm{const} < \infty$ $\forall\{i,j\} \subset N$.

Тоді рівняння (11) має інваріантний тор $\mathcal{T}^1$, *породжений функцією (12).*

Доведення. Врахувавши 2π-періодичність функцій $c_i^1(\phi,\tau)$ відносно ϕ_j, $\{i,j\} \subset N$, рівність $c^1(\phi_t(\phi),\tau) = c^1(\phi,\tau+t)$, оцінки

$$\|u^0(\phi)\| \le \frac{2KC^0}{\gamma}, \quad \|c^1(\phi,\tau)\| \le C^0\left(1 + \frac{2KB^0}{\gamma}\right)$$

і доведення леми 1, неважко зрозуміти, що невласний інтеграл у рівності (12) збігається рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ у покоординатному сенсі і породжує інваріантний тор $\mathcal{T}^1$ рівняння (11), якщо функції $c_i^1(\phi,\tau)$ неперервні по τ на R^1 при всіх $i \in N$. Оскільки для будь-яких $\{i,j\} \subset N$ такими є функції $c_i(\phi,\tau)$ та $b_{ij}(\phi,\tau)$, то залишається показати, що цю властивість мають функції $u_i^0(\phi,\tau+\Delta)$ при всіх $i \in N$. Останнє випливає з неперервності функції $u^0(\phi)$ відносно ϕ, що ми обґрунтуємо аналогічно до доведення теореми 8.2 з [3, с. 76], в якій наведено умови гельдеровості інваріантного тора рівняння вигляду (6), що не містить відхилень аргументу і визначене на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$. Не становить труднощів переконатись у правильності оцінки

$$\|u^0(\phi) - u^0(\bar\phi)\| \le I_1^0 + I_2^0, \tag{13}$$

де ϕ та $\bar\phi$ — довільні точки тора $\mathcal{T}_\infty$,

$$I_1^0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\phi) - G_0(\tau,\bar\phi)\|\|c(\phi,\tau)\|d\tau,$$

$$I_2^0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\bar\phi)\|\|c(\phi,\tau) - c(\bar\phi,\tau)\|d\tau.$$

Повторюючи практично без змін фрагменти доведення теореми 8.2 з [3, с. 76], одержуємо $I_1^0 \le S_1\|\phi - \bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де

$$S_1 = \frac{4C^0}{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{\nu+1}}K^3(2P^0(p^0)^\nu)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ν — довільне додатне число, при якому $\dfrac{\nu\alpha}{\nu+1} < \gamma$.

Далі вважатимемо, що число ν задовольняє цю нерівність.

Знайдемо аналогічну оцінку для інтеграла I_2^0. Справджуються співвідношення

$$\|c(\phi,\tau) - c(\bar{\phi},\tau)\| \le \eta \sup_{i\in N}\sup_{j\in N}\left\{|\phi_{j_{\tau+\Delta_{ij}}}(\phi) - \phi_{j_{\tau+\Delta_{ij}}}(\bar{\phi})|\right\} \le$$

$$\le \eta \sup_{i\in N}\sup_{j\in N}\exp\{\alpha|\tau+\Delta_{ij}|\}\|\phi-\bar{\phi}\| \le \eta\exp\{\alpha|\tau|\}\exp\{\alpha\Delta^*\}\|\phi-\bar{\phi}\|,$$

з якого для будь-якого $\nu > 0$ випливає нерівність

$$\|c(\phi,\tau) - c(\bar{\phi},\tau)\| \le K_\nu \exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\|\phi-\bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $K_\nu = \left\{2C^0\left[2C^0(\eta\exp\{\alpha\Delta^*\})^\nu\right]^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Звідси одержуємо $I_2^0 \le S_2\|\phi-\bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де $S_2 = KK_\nu\dfrac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}$.

Використавши нерівність (13), отримаємо оцінку

$$\|u^0(\phi) - u^0(\bar{\phi})\| \le \Gamma^0\|\phi-\bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \quad \Gamma^0 = (S_1+S_2),$$

що завершує доведення леми 2.

Запишемо тепер рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi,t)u^1(\phi,t+\Delta) + c(\phi,t) \tag{14}$$

і, використавши схему доведення леми 2, переконаємось у правильності наступного твердження.

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми 2 та наступні вимоги:*

1) $\|B(y) - B(\bar{y})\| \le \beta\|y-\bar{y}\|$, $\beta = \mathrm{const} > 0$, $\forall\{y,\bar{y}\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty$;

2) множини відхилень Γ_{ij} *та* Δ_i *аргументу* t *обмежені, тобто* $|\Gamma_{ij}| \le \Gamma^* = \mathrm{const} < \infty$ *та* $|\Delta_i| \le \Delta_* = \mathrm{const} < \infty\ \forall\{i,j\} \subset N$.

Тоді рівняння (14) визначає у просторі $\mathfrak{M}$ *інваріантний тор* $\mathcal{T}^2$, *породжений функцією*

$$x = u^2(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\phi)c^2(\phi,\tau)d\tau,$$

де $c^2(\phi,\tau) = B(\phi,\tau)u^1(\phi,\tau+\Delta) + c(\phi,\tau)$.

Доведення. Зрозуміло, що достатньо обґрунтувати неперервність функції $u^1(\phi)$ відносно ϕ на $\mathcal{T}_\infty$.

Неважко переконатись у правильності оцінки

$$\|u^1(\phi) - u^1(\bar{\phi})\| \le I_1^1 + I_2^1,$$

де ϕ та $\bar{\phi}$ — довільні точки тора $\mathcal{T}_\infty$,

$$I_1^1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \phi) - G_0(\tau, \bar{\phi})\| \|c^1(\phi, \tau)\| d\tau,$$

$$I_2^1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau, \bar{\phi})\| \|c^1(\phi, \tau) - c^1(\bar{\phi}, \tau)\| d\tau.$$

Очевидно, що $I_1^1 \leq S_3 \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де

$$S_3 = \frac{4C^0}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{\nu+1}} K^3 (2P^0 (p^0)^\nu)^{\frac{1}{\nu+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2KB^0}{\gamma} \right).$$

Знайдемо аналогічну оцінку для інтеграла I_2^1. Виконуються нерівності

$$\|u^0(\phi, \tau + \Delta) - u^0(\bar{\phi}, \tau + \Delta)\| \leq \sup_{i \in N} \Gamma^0 \|\phi_{\tau + \Delta_i}(\phi) - \phi_{\tau + \Delta_i}(\bar{\phi})\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \leq$$

$$\leq \Gamma^0 \left\{ \exp\{\alpha(|\tau| + \Delta_*)\} \|\phi - \bar{\phi}\| \right\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \leq$$

$$\leq S_4 \exp\left\{ \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)} |\tau| \right\} \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $S_4 = \Gamma^0 \exp\{\alpha\Delta_*\}$.

Крім того, справджуються оцінки

$$\|B(\phi, \tau) - B(\bar{\phi}, \tau)\| \leq \beta \sup_{i \in N} \sup_{j \in N} \left\{ |\phi_{j_{\tau + \Gamma_{ij}}}(\phi) - \phi_{j_{\tau + \Gamma_{ij}}}(\bar{\phi})| \right\} \leq$$

$$\leq \beta \sup_{i \in N} \sup_{j \in N} \exp\{\alpha|\tau + \Gamma_{ij}|\} \|\phi - \bar{\phi}\| \leq \beta \exp\{\alpha|\tau|\} \exp\{\alpha\Gamma^*\} \|\phi - \bar{\phi}\|,$$

з яких випливає нерівність

$$\|B(\phi, \tau) - B(\bar{\phi}, \tau)\| \leq S_5 \exp\left\{ \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)} |\tau| \right\} \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $S_5 = \left\{ 2B^0 \left[2B^0 (\beta \exp\{\alpha\Gamma^*\})^\nu \right]^{\frac{1}{\nu+1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Нарешті одержуємо оцінки

$$\|c^1(\phi, \tau) - c^1(\bar{\phi}, \tau)\| \leq \|c(\phi, \tau) - c(\bar{\phi}, \tau)\| +$$

$$+ \|B(\phi, \tau)\| \|u^0(\phi, \tau + \Delta) - u^0(\bar{\phi}, \tau + \Delta)\| +$$

$$+ \|B(\phi, \tau) - B(\bar{\phi}, \tau)\| \|u^0(\bar{\phi}, \tau + \Delta)\| \leq$$

$$\leq \left\{ K_\nu + B^0 S_4 + \frac{2KC^0 S_5}{\gamma} \right\} \exp\left\{ \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)} |\tau| \right\} \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

звідки випливає $I_2^1 \le S_6\|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де

$$S_6 = K\left\{K_\nu + B^0 S_4 + \frac{2KC^0 S_5}{\gamma}\right\}\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}.$$

Остаточно маємо оцінку

$$\|u^1(\phi) - u^1(\bar{\phi})\| \le (S_3 + S_6)\|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

що завершує доведення леми 3.

Індуктивна лема 4. *Припустимо, що виконуються умови леми 3. Тоді для будь-якого $k \in N\bigcup\{0\}$ рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi,t)u^k(\phi,t+\Delta) + c(\phi,t)$$

визначає у просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathcal{T}^{k+1}$, породжений функцією

$$x = u^{k+1}(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\phi)c^{k+1}(\phi,\tau)d\tau,$$

де $c^{k+1}(\phi,\tau) = B(\phi,\tau)u^k(\phi,\tau+\Delta) + c(\phi,\tau)$, функція $u^k(\phi)$ задовольняє умову Гельдера

$$\|u^k(\phi) - u^k(\bar{\phi})\| \le \Gamma^k\|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \quad \{\phi,\bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty,$$

а функція $u^0(\phi)$ породжує інваріантний тор $\mathcal{T}^0$ рівняння (6).

Доведення. Цю лему доведено вище для $k \in \{0,1\}$. Далі використаємо метод повної математичної індукції, тобто припустимо, що вказане твердження виконується при всіх натуральних $k \le n$, і доведемо, що воно справджується при $k = n+1$. Очевидно, для цього достатньо показати, що функція $u^{n+1}(\phi)$ задовольняє умову Гельдера відносно ϕ на $\mathcal{T}_\infty$. Неважко перевірити, що при всіх натуральних $k \le n+1$ мають місце нерівності

$$\|c^k(\phi,\tau)\| \le C^0\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^i + C^0 = C^0\frac{\left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^{k+1} - 1}{\frac{2KB^0}{\gamma} - 1} \stackrel{\text{df}}{=} C^k, \tag{15}$$

$$\|u^k(\phi)\| \le \frac{2KC^0}{\gamma}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^i = \frac{2KC^0}{\gamma}\,\frac{\left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^{k+1} - 1}{\frac{2KB^0}{\gamma} - 1} \stackrel{\text{df}}{=} U^k. \tag{16}$$

Для всіх $\{\phi,\bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$ справджується оцінка

$$\|u^{n+1}(\phi) - u^{n+1}(\bar{\phi})\| \le I_1^{n+1} + I_2^{n+1},$$

де

$$I_1^{n+1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\phi) - G_0(\tau,\bar{\phi})\| \|c^{n+1}(\phi,\tau)\| d\tau,$$

$$I_2^{n+1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\bar{\phi})\| \|c^{n+1}(\phi,\tau) - c^{n+1}(\bar{\phi},\tau)\| d\tau.$$

Врахувавши (15), запишемо нерівність $I_1^{n+1} \le S_3^{n+1} \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де

$$S_3^{n+1} = \frac{4}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{\nu+1}} K^3 (2P^0 (p^0)^\nu)^{\frac{1}{\nu+1}} \right)^{\frac{1}{2}} C^{n+1}.$$

Оцінимо тепер інтеграл I_2^{n+1}. Запишемо нерівності

$$\|u^n(\phi,\tau+\Delta) - u^n(\bar{\phi},\tau+\Delta)\| \le \sup_{i\in N} \Gamma^n \|\phi_{t+\Delta_i}(\phi) - \phi_{t+\Delta_i}(\bar{\phi})\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \le$$

$$\le \Gamma^n \left\{ \exp\{\alpha(|\tau| + \Delta_*)\} \|\phi - \bar{\phi}\| \right\}^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

звідки

$$\|u^n(\phi,\tau+\Delta) - u^n(\bar{\phi},\tau+\Delta)\| \le S_4^n \exp\left\{ \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)} |\tau| \right\} \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $S_4^n = \Gamma^n \exp\{\alpha\Delta_*\}$.

Крім того, враховуючи (16), маємо

$$\|c^{n+1}(\phi,\tau) - c^{n+1}(\bar{\phi},\tau)\| \le \|c(\phi,\tau) - c(\bar{\phi},\tau)\| +$$

$$+ \|B(\phi,\tau)\| \|u^n(\phi,\tau+\Delta) - u^n(\bar{\phi},\tau+\Delta)\| +$$

$$+ \|B(\phi,\tau) - B(\bar{\phi},\tau)\| \|u^n(\bar{\phi},\tau+\Delta)\| \le$$

$$\le \left\{ K_\nu + B^0 S_4^n + U^n S_5 \right\} \exp\left\{ \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)} |\tau| \right\} \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

звідки випливає $I_2^{n+1} \le S_6^{n+1} \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де

$$S_6^{n+1} = K \left\{ K_\nu + B^0 S_4^n + U^n S_5 \right\} \frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}.$$

Остаточно маємо оцінку

$$\|u^{n+1}(\phi) - u^{n+1}(\bar{\phi})\| \le (S_3^{n+1} + S_6^{n+1}) \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \tag{17}$$

що й завершує доведення леми 4.

Наступне твердження надає достатні умови існування інваріантного тора рівняння (9).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми 3 та справджується нерівність* $2KB^0 < < \gamma$. *Тоді послідовність* $\{u^k(\phi)\}_{k=1}^{\infty}$ *рівномірно відносно* $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ *збігається за нормою простору* $\mathfrak{M}$ *до неперервної на* $\mathcal{T}_\infty$ *функції* $u(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, *що визначає інваріантний тор* $\mathcal{T}$ *рівняння (9).*

При додатковій умові $\gamma > 2KB^0 \exp\{\alpha\Delta_*\}$ *ця функція задовольняє умову Гельдера, тобто для* $\{\phi, \bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u(\phi) - u(\bar{\phi})\| \leq U\|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \quad U = \text{const} > 0, \tag{18}$$

де ν — *довільне число, що задовольняє нерівність* $\gamma - \dfrac{\alpha\nu}{\nu+1} > 2KB^0 \exp\{\alpha\Delta_*\}$.

Доведення. Перевіряючи оцінку (16) для випадку $k = n + 2$, переконуємося в її правильності для будь-якого $k \in N$, причому при $2KB^0 < \gamma$ із співвідношень (15) та (16) випливає, що

$$C^k \leq \frac{C^0\gamma}{\gamma - 2KB^0}, \quad U^k \leq \frac{2KC^0}{\gamma - 2KB^0}$$

рівномірно відносно $k \in N$.

З нерівностей

$$\|c^{k+1}(\phi,\tau) - c^k(\phi,\tau)\| \leq \|B(\phi,\tau)u^k(\phi,\tau+\Delta) + c(\phi,\tau) - B(\phi,\tau)u^{k-1}(\phi,\tau+\Delta) - c(\phi,\tau)\| \leq$$
$$\leq B^0\|u^k(\phi,\tau+\Delta) - u^{k-1}(\phi,\tau+\Delta)\|,$$

$$\|u^{k+1}(\phi) - u^k(\phi)\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\phi)\|\|c^{k+1}(\phi,\tau) - c^k(\phi,\tau)\|d\tau,$$

поклавши

$$\|u^{k+1}(\phi) - u^k(\phi)\|_0 = \sup_{\phi\in\mathcal{T}_\infty} \|u^{k+1}(\phi) - u^k(\phi)\|,$$

неважко одержати індуктивну оцінку

$$\|u^{k+1}(\phi) - u^k(\phi)\|_0 \leq \frac{2KB^0}{\gamma}\|u^k(\phi) - u^{k-1}(\phi)\|_0,$$

що приводить до нерівності

$$\|u^{k+1}(\phi) - u^k(\phi)\|_0 \leq \left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^k \|u^1(\phi) - u^0(\phi)\|_0.$$

Враховуючи (16), одержуємо оцінку

$$\|u^{k+1}(\phi) - u^k(\phi)\|_0 \leq \left(\frac{2KB^0}{\gamma}\right)^k (U^1 + U^0),$$

з якої при $2KB^0 < \gamma$ випливає фундаментальність послідовності $\{u^k(\phi)\}_{k=1}^{\infty}$ у повному метричному просторі $\mathfrak{M}$. Отже, ця послідовність рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ до неперервної на $\mathcal{T}_\infty$ функції $u(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$.

Залишається показати, що ця функція визначає інваріантний тор рівняння (9). При всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ справджуються тотожності

$$\frac{du^{k+1}(\phi_t(\phi))}{dt} = P(\phi_t(\phi))u^{k+1}(\phi_t(\phi)) + B(\phi, t)u^k(\phi, t + \Delta) + c(\phi, t), \tag{19}$$

тобто у покоординатному вигляді одержуємо рівності

$$\frac{du_s^{k+1}(\phi_t(\phi))}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j^{k+1}(\varphi_t(\varphi))$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} b_{sj}(\phi, t)u_j^k(\phi, t + \Delta) + c_s(\phi, t),$$

де $s = 1, 2, \ldots, \varphi \in \mathcal{T}_\infty$.

Очевидно, що для будь-якого $s \in N$ ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j^{k+1}(\varphi_t(\varphi)) + b_{sj}(\phi, t)u_j^k(\phi, t + \Delta) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

збігаються рівномірно відносно k та $t \in R^1$, оскільки вони мажоруються збіжним числовим рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2KC^0}{\gamma - 2KB^0} \left\{ \sup_{\phi \in \mathcal{T}_\infty} |p_{sj}| + \sup_{y \in \mathcal{T}_\infty^\infty} |b_{sj}(y)| \right\}.$$

У цьому випадку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j^{k+1}(\varphi_t(\varphi)) + b_{sj}(\phi, t)u_j^k(\phi, t + \Delta) \right\} \to$$

$$\to \sum_{j=1}^{\infty} \{ p_{sj}(\varphi_t(\varphi))u_j(\varphi_t(\varphi)) + b_{sj}(\phi, t)u_j(\phi, t + \Delta) \}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

при $k \to \infty$ рівномірно відносно $t \in R^1$. Це дає можливість у рівності (19) перейти у покоординатному сенсі до границі при $k \to \infty$ і одержати тотожність (10). При додатковій умові теореми $\Gamma^k \le U \;\forall k \in N$ і для доведення нерівності (18) достатньо перейти до границі при $n \to \infty$ у нерівності (17).

Зауваження 1. Виберемо будь-яку функцію $\rho(\phi) = (\rho_1(\phi), \rho_2(\phi), \ldots)$, що задовольняє наступні умови:

1) є 2π-періодичною відносно ϕ_i для будь-якого $i \in N$;

2) на торі $\mathcal{T}_\infty$ задовольняє умову Гельдера з показником $\dfrac{\nu}{2(\nu+1)}$, де ν вибрано так, як вказано раніше, і $\|\rho(\phi)\| \le \dfrac{2KC^0}{\gamma}$.

Очевидно, такі функції існують (наприклад, ці властивості має кожна з функцій $u^k(\phi)$, $k \in N\bigcup\{0\}$. Поклавши у рівняння (11) замість $u^0(\phi, t+\Delta)$ функцію $\rho(\phi, t+\Delta)$, неважко переконатися, що індуктивна лема 4 і теорема 1 залишаються правильними, до того ж функція $u(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}$ рівняння (9), при цьому не змінюється.

4. Існування інваріантного тора квазілінійної системи. Тепер запишемо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi,t)x(t+\Delta) + f(v(\phi,t), x(t), x(t+\Theta)), \tag{20}$$

де функція $f(v,x,\chi) = \{f_1(v,x,\chi), f_2(v,x,\chi), \ldots\}$ відображує множину $D^* = D_0 \times D \times D$ у простір $\mathfrak{M}$, $\{x,\chi\} \subset D$, $v \in D_0$, $D = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \le d = \text{const} > 0\}$, $D_0 = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \le \le V^0 = \text{const} > 0\}$; функція

$$v = v(\phi,t) = (v_1(\psi_1(\phi,t), \psi_2(\phi,t), \ldots), v_2(\psi_1(\phi,t), \psi_2(\phi,t), \ldots), \ldots)$$

здійснює відображення $\mathcal{T}_\infty^\infty \to \mathfrak{M}$, тобто $v_i(\psi_1(\phi,t), \psi_2(\phi,t), \ldots) : \mathcal{T}_\infty^\infty \mapsto R^1 \ \forall i \in N$; точки $\psi_i(\phi,t) = (\phi_{1_{t+\Theta_{i1}}}(\phi), \phi_{2_{t+\Theta_{i2}}}(\phi), \ldots) \ \forall t \in R^1$ належать тору $\mathcal{T}_\infty$, Θ_{ij} та Θ_i — довільні дійсні числа, $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i,j\} \subset N$; $x(t+\Theta) = (x_1(t+\Theta_1), x_2(t+\Theta_2), \ldots)$.

Наступні умови назвемо умовами (**F**):

1) функції $v_i(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ є 2π-періодичними відносно кожної координати вектора ψ_j для будь-яких натуральних i та j;

2) для будь-яких $\{\psi, \bar\psi\} \subset \mathcal{T}_\infty^\infty$ справджуються нерівності $\|v(\psi) - v(\bar\psi)\| \le \zeta \|\psi - \bar\psi\|$, $\|v(\psi)\| \le V^0$, де $\zeta = \text{const} > 0$;

3) функція $f(v,x,\chi)$ задовольняє умову Ліпшиця за сукупністю змінних v, x, χ на D^* і обмежена на цій множині, тобто

$$\|f(v,x,\chi) - f(\bar v, \bar x, \bar\chi)\| \le \xi_1 \|v - \bar v\| + \xi_2 \|x - \bar x\| + \xi_3 \|\chi - \bar\chi\|,$$

$$\|f(v,x,\chi)\| = \sup_{i \in N} |f_i(v,x,\chi)| \le F^0$$

$$\forall \{(v,x,\chi), (\bar v, \bar x, \bar\chi)\} \subset D^*,$$

де F^0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — додатні сталі.

Поняття інваріантного тора $\mathcal{T}^*$ для рівняння (20) вводиться аналогічно до наведеного раніше означення множини $\mathcal{T}^0$ для рівняння (6), лише співвідношення (7) у ньому слід замінити рівністю

$$\frac{du_*(\phi_t(\phi))}{dt} = P(\phi_t(\phi))u_*(\phi_t(\phi)) +$$

$$+ B(\phi,t)u_*(\phi, t+\Delta) + f(v(\phi,t), u_*(\phi_t(\phi)), u_*(\phi, t+\Theta)), \tag{21}$$

де $u_*(\phi)$ — функція, що породжує інваріантний тор $\mathcal{T}^*$,

$$u_*(\phi, t+\Theta) = (u_{*_1}(\phi_{t+\Theta_1}(\phi)), u_{*_2}(\phi_{t+\Theta_2}(\phi)), \ldots).$$

Сукупність наступних умов назвемо умовами $(\mathbf{V})$:

1) функція $a(\phi) \in C^0_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_\infty)$, матриця $P(\phi) \in C_\phi(\mathcal{T}_\infty)$ і є ліпшіцевою відносно ϕ з коефіцієнтом p^0, для рівняння (4) існує ФГС $G_t(\tau, \phi)$, яка задовольняє нерівність (5), і воно не має обмежених на всій осі розв'язків, крім тривіального;

2) справджуються умови $(\mathbf{B})$ та $(\mathbf{F})$, до того ж матриця $B(y)$ є ліпшицевою відносно $y \in \mathcal{T}^\infty_\infty$ з коефіцієнтом β;

3) множини відхилень Γ_{ij}, Δ_i, Θ_{ij} та Θ_i аргументу t обмежені, тобто $|\Gamma_{ij}| \leq \Gamma^*$, $|\Delta_i| \leq \Delta_*$, $|\Theta_{ij}| \leq \Theta^*$ та $|\Theta_i| \leq \Theta_* \; \forall \{i,j\} \subset N$, де Γ^*, Δ_*, Θ^*, Θ_* — додатні сталі;

4) виконується нерівність $2KB^0 < \gamma$.

Сформулюємо наступне твердження.

Лема 5. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{V})$. *Тоді лінеаризоване рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi, t)x(t+\Delta) + f(v(\phi, t), 0, 0), \quad 0 \in \mathfrak{M}, \tag{22}$$

визначає у просторі $\mathfrak{M}$ *інваріантний тор* $\mathcal{T}^0_*$, *породжуюча функція якого* $\tilde{u}(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$ *неперервна на торі* $\mathcal{T}_\infty$, *причому*

$$\|\tilde{u}(\phi)\| \leq \frac{2KF^0}{\gamma - 2KB^0} \stackrel{\mathrm{df}}{=} U_0. \tag{23}$$

Доведення леми очевидне, оскільки рівняння (22) має вигляд рівняння (9) і при умовах $(\mathbf{V})$ для нього виконуються всі умови теореми 1.

Припустимо тепер, що $U_0 \leq d$, і покладемо $u^0_*(\phi) = \tilde{u}(\phi)$, якщо ця функція задовольняє умову Гельдера з показником $\dfrac{\nu}{2(\nu+1)}$. У протилежному випадку покладемо $u^0_*(\phi) = \rho(\phi)$, де $\rho(\phi)$ — довільна функція, що має властивості, вказані у зауваженні 1, до того ж $\|\rho(\phi)\| \leq U_0$.

У цьому випадку при всіх $\{\phi, \bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u^0_*(\phi) - u^0_*(\bar{\phi})\| \leq U^0_* \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \quad U^0_* = \mathrm{const} > 0,$$

і має сенс рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi, t)u^0_*(\phi, t+\Delta) + f(v(\phi, t), u^0_*(\phi_t(\phi)), u^0_*(\phi, t+\Theta)). \tag{24}$$

Переконаємося, що функція

$$x = u^1_*(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \phi) f^1(\phi, \tau) d\tau, \tag{25}$$

де $f^1(\phi,\tau) = B(\phi,\tau)u_*^0(\phi,\tau+\Delta) + f(v(\phi,\tau), u_*^0(\phi_\tau(\phi)), u_*^0(\phi,\tau+\Theta))$, визначає у просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathcal{T}_*^1$ рівняння (24).

Врахувавши нерівність (23), 2π-періодичність функцій $f_i^1(\phi,\tau)$ відносно ϕ_j $\forall\{i,j\}\subset N$, рівність $f^1(\phi_t(\phi),\tau) = f^1(\phi,\tau+t)$, очевидну оцінку

$$\|f^1(\phi,\tau)\| \le B^0\frac{2KF^0}{\gamma - 2KB^0} + F^0$$

і доведення леми 2, неважко зрозуміти, що невласний інтеграл у рівності (25) збігається рівномірно відносно $\phi\in\mathcal{T}_\infty$ у покоординатному сенсі і породжує інваріантний тор $\mathcal{T}_*^1$ рівняння (24), якщо функції $f_i^1(\phi,\tau)$ неперервні по τ на R^1 при всіх $i\in N$. Остання вимога дійсно виконується, оскільки функція $f(v,x,\chi)$ неперервна на множині D^* за сукупністю змінних, що випливає з третьої умови $(\mathbf{F})$, функції $u_*^0(\phi_\tau(\phi))$ та $u_*^0(\phi,\tau+\Theta)$ неперервні відносно $\tau\in R^1$ за нормою простору $\mathfrak{M}$, оскільки неперервною на торі $\mathcal{T}_\infty$ є функція $u_*^0(\phi)$, і, нарешті, функція $v(\phi,\tau)$ неперервна по $\tau\in R^1$ у сенсі норми простору $\mathcal{T}_\infty^\infty$, оскільки із співвідношень

$$\|v_i(\phi,\tau_1) - v_i(\phi,\tau_2)\| \le \zeta\sup_{j\in N}\{|\phi_{j_{\tau_1+\Theta_{ij}}}(\phi) - \phi_{j_{\tau_2+\Theta_{ij}}}(\phi)|\} \le A|\tau_1-\tau_2|,$$

які справджуються при всіх $i\in N, \{\tau_1,\tau_2\}\subset R^1$, випливає рівностепенева неперервність відносно τ на R^1 послідовності функцій $\{v_i(\phi,\tau)\}_{i=1}^\infty$. Більш того, очевидно, що функція $f(\phi,\tau)$ неперервна відносно τ і в сенсі норми простору $\mathfrak{M}$.

При цьому має місце нерівність

$$\|u_*^1(\phi)\| \le \frac{2KB^0}{\gamma}U_0 + \frac{2KF^0}{\gamma} = U_0.$$

Покажемо тепер, що функція $u_*^1(\phi)$ задовольняє умову Гельдера по ϕ. З рівності (25) для всіх $\{\phi,\bar\phi\}\subset\mathcal{T}_\infty$ випливає аналог нерівності (13):

$$\|u_*^1(\phi) - u_*^1(\bar\phi)\| \le I_*^1 + I_*^2,$$

де

$$I_*^1 = \int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\tau,\phi) - G_0(\tau,\bar\phi)\|\,\|f^1(\phi,\tau)\|d\tau,$$

$$I_*^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\|G_0(\tau,\bar\phi)\|\,\|f^1(\phi,\tau) - f^1(\bar\phi,\tau)\|d\tau.$$

Повторюючи хід доведення леми 2, одержуємо $I_*^1 \le S_1^*\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}$, де

$$S_1^* = \frac{4(B^0U_0+F^0)}{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma - \frac{\alpha\nu}{\nu+1}}K^3(2P^0(p^0)^\nu)^{\frac{1}{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Знайдемо аналогічну оцінку для інтеграла I_*^2. Враховуючи нерівності

$$\|B(\phi,\tau)-B(\bar\phi,\tau)\|\|u_*^0(\phi,\tau+\Delta)\| \le U_0S_5\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

$$\|B(\bar\phi,\tau)\|\|u_*^0(\phi,\tau+\Delta)-u_*^0(\bar\phi,\tau+\Delta)\| \le$$

$$\le B^0U_*^0\exp\{\alpha\Delta_*\}\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

$$\|u_*^0(\phi_\tau(\phi))-u_*^0(\phi_\tau(\bar\phi))\| \le U_*^0\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

$$\|u_*^0(\phi,\tau+\Theta)-u_*^0(\bar\phi,\tau+\Theta)\| \le U_*^0\exp\{\alpha\Theta_*\}\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

$$\|v(\phi,\tau)-v(\bar\phi,\tau)\| \le \left\{2V^0\left\{2V^0\zeta^\nu\right\}^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac12}\exp\{\alpha\Theta^*\}\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

одержуємо такі оцінки:

$$\|f^1(\phi,\tau)-f^1(\bar\phi,\tau)\| \le \|B(\phi,\tau)-B(\bar\phi,\tau)\|\|u_*^0(\phi,\tau+\Delta)\|+$$
$$+\|B(\bar\phi,\tau)\|\|u_*^0(\phi,\tau+\Delta)-u_*^0(\bar\phi,\tau+\Delta)\|+\xi_1\|v(\phi,\tau)-v(\bar\phi,\tau)\|+$$
$$+\xi_2\|u_*^0(\phi_\tau(\phi))-u_*^0(\phi_\tau(\bar\phi))\|+\xi_3\|u_*^0(\phi,\tau+\Theta)-u_*^0(\bar\phi,\tau+\Theta)\| \le$$
$$\le F^*\exp\left\{\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}|\tau|\right\}\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де

$$F^* = U_0S_5+B^0U_*^0\exp\{\alpha\Delta_*\}+\xi_1\left\{2V^0\left\{2V^0\zeta^\nu\right\}^{\frac{1}{\nu+1}}\right\}^{\frac12}\exp\{\alpha\Theta^*\}+\xi_2U_*^0+$$
$$+\xi_3U_*^0\exp\{\alpha\Theta_*\} = \text{const} > 0.$$

Тоді

$$I_*^2 \le S_*^2\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},\quad S_*^2=\frac{2KF^*}{\gamma-\frac{\alpha\nu}{2(\nu+1)}}=\text{const} > 0$$

і

$$\|u_*^1(\phi)-u_*^1(\bar\phi)\| \le U_*^1\|\phi-\bar\phi\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $U_*^1 = S_*^1 + S_*^2$, тобто функція $u_*^1(\phi)$ задовольняє умову Гельдера по ϕ.

Оскільки $\|u_*^1(\phi)\| \le U_0 \le d$, то має сенс рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi, t)u_*^1(\phi, t+\Delta) + f(v(\phi, t), u_*^1(\phi_t(\phi)), u_*^1(\phi, t+\Theta)), \tag{26}$$

аналогічне до рівняння (24). Повторивши попередні міркування, приходимо до висновку, що функція

$$x = u_*^2(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \phi) f^2(\phi, \tau) d\tau,$$

де $f^2(\phi, \tau) = B(\phi, \tau)u_*^1(\phi, \tau+\Delta) + f(v(\phi, \tau), u_*^1(\phi_\tau(\phi)), u_*^1(\phi, \tau+\Theta))$, визначає у просторі $\mathfrak{M}$ інваріантний тор $\mathcal{T}_*^2$ рівняння (26), до того ж для будь-яких $\{\phi, \bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u_*^2(\phi) - u_*^2(\bar{\phi})\| \le U_*^2 \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}},$$

де $U_*^2 = \mathrm{const} > 0$, $\|u_*^2(\phi)\| \le U_0 \le d$.

Прості індуктивні міркування показують, що цей рекурентний процес можна продовжити нескінченно, що дає можливість сформулювати наступне твердження.

Індуктивна лема 6. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{V})$ *і* $\dfrac{2KF^0}{\gamma - 2KB^0} \le d$. *Тоді для будь-якого* $k \in N \bigcup \{0\}$ *рекурентне рівняння*

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi, t)u_*^k(\phi, t+\Delta) + f(v(\phi, t), u_*^k(\phi_t(\phi)), u_*^k(\phi, t+\Theta))$$

визначає у просторі $\mathfrak{M}$ *інваріантний тор* $\mathcal{T}_*^{k+1}$, *породжений функцією*

$$x = u_*^{k+1}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \phi) f^{k+1}(\phi, \tau) d\tau,$$

де $f^{k+1}(\phi, \tau) = B(\phi, \tau)u_*^k(\phi, \tau+\Delta) + f(v(\phi, \tau), u_*^k(\phi_\tau(\phi)), u_*^k(\phi, \tau+\Theta))$, *функція* $u_*^k(\phi)$ *задовольняє умову Гельдера*

$$\|u_*^k(\phi) - u_*^k(\bar{\phi})\| \le U_*^k \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}} \quad \forall \{\phi, \bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty \tag{27}$$

і обмежена на торі $\mathcal{T}_\infty$ *сталою* d, *тобто* $\|u_*^k(\phi)\| \le d$ *і* $U_*^k = \mathrm{const} > 0$.

Наступне твердження визначає достатні умови збіжності послідовності $\{u_*^k(\phi)\}_{k=1}^\infty$ до функції $u_*(\phi)$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}_*$ рівняння (20).

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови* $(\mathbf{V})$, *четверту з яких замінено нерівністю* $2K(B^0 + \xi_2 + \xi_3) < \gamma$, *і* $\dfrac{2KF^0}{\gamma - 2KB^0} \le d$. *Тоді послідовність* $\{u_*^k(\phi)\}_{k=1}^\infty$ *рівномірно відносно* $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ *збігається за нормою простору* $\mathfrak{M}$ *до неперервної функції* $u_*(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, *що визначає інваріантний тор* $\mathcal{T}_*$ *рівняння (20).*

Якщо множина чисел $U_*^k (k \in N)$ обмежена, то ця функція задовольняє умову Гельдера по ϕ, тобто для будь-яких $\{\phi, \bar{\phi}\} \subset \mathcal{T}_\infty$

$$\|u_*(\phi) - u_*(\bar{\phi})\| \leq U_* \|\phi - \bar{\phi}\|^{\frac{\nu}{2(\nu+1)}}, \quad U_* = \text{const } > 0. \tag{28}$$

Доведення проведемо аналогічно до доведення теореми 1. З нерівностей

$$\|f^{k+1}(\phi,\tau) - f^k(\phi,\tau)\| \leq B^0 \|u_*^k(\phi,\tau+\Delta) - u_*^{k-1}(\phi,\tau+\Delta)\| +$$
$$+ \xi_2 \|u_*^k(\phi_\tau(\phi)) - u_*^{k-1}(\phi_\tau(\phi))\| + \xi_3 \|u_*^k(\phi,\tau+\Theta) - u_*^{k-1}(\phi,\tau+\Theta)\|,$$

$$\|u_*^{k+1}(\phi) - u_*^k(\phi)\| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G_0(\tau,\phi)\| \|f^{k+1}(\phi,\tau) - f^k(\phi,\tau)\| d\tau,$$

поклавши

$$\|u_*^{k+1}(\phi) - u_*^k(\phi)\|_0 = \sup_{\phi \in \mathcal{T}_\infty} \|u_*^{k+1}(\phi) - u_*^k(\phi)\|,$$

неважко одержати індуктивну оцінку

$$\|u_*^{k+1}(\phi) - u_*^k(\phi)\|_0 \leq \frac{2K(B^0 + \xi_2 + \xi_3)}{\gamma} \|u_*^k(\phi) - u_*^{k-1}(\phi)\|_0,$$

що приводить до нерівності

$$\|u_*^{k+1}(\phi) - u_*^k(\phi)\|_0 \leq \left(\frac{2K(B^0 + \xi_2 + \xi_3)}{\gamma} \right)^k \|u_*^1(\phi) - u_*^0(\phi)\|_0.$$

Нарешті одержуємо оцінку

$$\|u_*^{k+1}(\phi) - u_*^k(\phi)\|_0 \leq \left(\frac{2K(B^0 + \xi_2 + \xi_3)}{\gamma} \right)^k 2d,$$

з якої при $2K(B^0 + \xi_2 + \xi_3) < \gamma$ випливає фундаментальність послідовності $\{u_*^k(\phi)\}_{k=1}^\infty$ у повному метричному просторі $\mathfrak{M}$. Отже, ця послідовність рівномірно відносно $\phi \in \mathcal{T}_\infty$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ до неперервної на $\mathcal{T}_\infty$ функції $u_*(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$.

Залишилося показати, що ця функція визначає інваріантний тор рівняння (20). При всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ справджуються тотожності

$$\frac{du_*^{k+1}(\phi_t(\phi))}{dt} = P(\phi_t(\phi)) u_*^{k+1}(\phi_t(\phi)) + B(\phi,t) u_*^k(\phi,t+\Delta) +$$
$$+ f(v(\phi,t), u_*^k(\phi_t(\phi)), u_*^k(\phi,t+\Theta)), \tag{29}$$

тобто у покоординатному вигляді одержуємо рівності

$$\frac{du_{*s}^{k+1}(\phi_t(\phi))}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(\phi_t(\phi))u_{*j}^{k+1}(\phi_t(\phi)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} b_{sj}(\phi, t)u_{*j}^{k}(\phi, \tau + \Delta) + f_s(v(\phi, t), u_*^k(\phi_t(\phi)), u_*^k(\phi, t + \Theta)),$$

де $s = 1, 2, \ldots, \phi \in \mathcal{T}_\infty$.

Очевидно, що для будь-якого $s \in N$ ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ p_{sj}(\phi_t(\phi))u_{*j}^{k+1}(\phi_t(\phi)) + b_{sj}(\phi, t)u_{*j}^{k}(\phi, t + \Delta) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

збігаються рівномірно відносно k та $t \in R^1$, оскільки вони мажоруються збіжним числовим рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} d \left\{ \sup_{\phi \in \mathcal{T}_\infty} |p_{sj}(\phi)| + \sup_{y \in \mathcal{T}_\infty^\infty} |b_{sj}(y)| \right\}.$$

Неважко також переконатися в тому, що

$$\lim_{k \to \infty} f(v(\phi, t), u_*^k(\phi_t(\phi)), u_*^k(\phi, t + \Theta)) = f(v(\phi, t), u_*(\phi_t(\phi)), u_*(\phi, t + \Theta))$$

у сенсі норми простору $\mathfrak{M}$.

Це дає можливість у рівності (29) перейти у покоординатному сенсі до границі при $k \to \infty$ і одержати тотожність (21). При умові, що $U_*^k \leq U_* \ \forall k \in N$, для доведення нерівності (28) достатньо перейти до границі при $k \to \infty$ у нерівності (27).

Теорему доведено.

Зауваження 2. Неоднозначність вибору функції $u_*^0(\phi)$ при побудові ітераційного процесу в останньому пункті не приводить до зміни функції $u_*(\phi) : \mathcal{T}_\infty \to \mathfrak{M}$, що визначає інваріантний тор $\mathcal{T}_*$ рівняння (20).

Зауваження 3. Ліпшицевість на торі $\mathcal{T}_\infty$ функцій $u^k(\phi)$ та $u_*^k(\phi)$ при будь-якому $k \in \in N \bigcup \{0\}$ з наведених вище тверджень не випливає. Щоб ця властивість мала місце, достатньо до умов леми 2 та умов $(\mathbf{V})$ додати нерівність $\gamma > \alpha$ і функцію $\rho(\phi)$ у зауваженні 1 вважати ліпшицевою на цьому торі. Це саме стосується вибору функції $u_*^0(\phi)$. Після цього формулювання наведених вище лем і теорем та їх доведення слід адаптувати до вказаних змін.

Приклад. Розглянемо систему рівнянь вигляду (9):

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \mathrm{trig}\,(\phi_i + \phi_{i+1}),$$
$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+2}}\,\mathrm{trig}\,\left(\phi_{s^{ij}{}_{t+c_{ij}}}(\phi)\right) x_j(t+\Delta_j)+$$
$$+\,\mathrm{trig}\,\left(\phi_{s^i{}_{t+a_{is}}}(\phi) + \phi_{k^i{}_{t+a_{ik}}}(\phi)\right), \quad i = 1,2,3,\ldots, \tag{30}$$

де символом trig позначено функції синус або косинус, s^{ij}, s^i, k^i — довільні натуральні числа, серед яких може бути скільки завгодно однакових, c_{ij}, a_{is}, a_{ik}, Δ_j — довільні дійсні числа з обмеженого відрізка числової осі, серед яких також може бути скільки завгодно однакових. Очевидно, що перше рівняння цієї системи задовольняє умови **(A)**, матриця $P(\phi)$ для неї є сталою діагональною матрицею, до того ж $\mathrm{diag}\,P(\phi) = \{-1,-1,-1,\ldots\}$ і $\|P(\phi)\| = P^0 = 1$. При цьому матриця Ω^0_τ для системи рівнянь $\dfrac{dx_i}{dt} = -x_i$, $i = 1,2,3,\ldots$, теж є діагональною матрицею, причому $\mathrm{diag}\,\Omega^0_\tau = \{\exp\{\tau\},\exp\{\tau\},\exp\{\tau\},\ldots\}$ і при $\tau \leq 0$ $\|\Omega^0_\tau\| = \exp\{-1|\tau|\}$. Це означає, що остання система не має жодного обмеженого на всій осі розв'язку, крім нульового, і для неї існує ФГС

$$G_0(\tau,\phi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\phi) & \text{при} \quad \tau \leq 0, \\ 0 & \text{при} \quad \tau > 0, \end{cases}$$

для якої коефіцієнти $K = 1$, $\gamma = 1$. Неважко переконатися, що матриця $B(\phi,t)$ та функція $c(\phi,t)$, які відповідають системі (30), задовольняють умови теореми 1, причому $\|B(\phi,t)\| \leq B^0 = \dfrac{1}{4}$, тобто виконується нерівність $2KB^0 < \gamma$. Таким чином, у просторі $\mathfrak{M}$ система рівнянь (30) визначає неперервний інваріантний тор.

На завершення зазначимо, що одержані результати є новими і для випадку, коли рівняння (9) та (20) розглядаються у скінченновимірному просторі і визначені на скінченновимірних торах.

1. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. I. Аналитические методы. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. — С. 495–499.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу о сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — **34**, № 6. — С. 1219–1240.
3. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
4. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Об инвариантных торах дифференциальных систем с импульсами в пространствах ограниченных числовых последовательностей // Дифференц. уравнения. — 1985. — **21**, № 8. — С. 1353–1361.
5. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О гладкости инвариантного тора счетного линейного расширения динамической системы на m-мерном торе // Там же. — 1994. — **30**, № 5. — С. 781–790.
6. *Samoilenko A. M., Teplinskiy Yu. V.* Countable systems of differential equations.— Utrecht; Boston: VSP, 2003. — 287 p.

7. *Ельназаров А. А.* Деякі питання теорії зліченних систем та асимптотичних методів: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 1998. — 16 с.

8. *Жанбусинова Б. Х.* Квазипериодические решения счетных систем дифференциально-разностных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1991. — 12 с.

9. *Мартинюк Д. І., Верьовкіна Г. В.* Інваріантні множини зліченних систем різницевих рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. — 1997. — Вип. 1. — С. 117–127.

10. *Мартынюк Д. И., Кравец В. И., Жанбусинова Б. Х.* Об инвариантном торе счетной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Асимптотические методы в задачах математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 77–86.

11. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Инвариантные торы линейных счетных систем дискретных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 244–251.

12. *Теплінський Ю. В., Марчук Н. А.* Про C^ρ-гладкість інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, визначеної на m-вимірному торі // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 251–265.

13. *Теплінський Ю. В., Марчук Н. А.* Про диференційовність в сенсі Фреше інваріантних торів зчисленних систем різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 1. — С. 75–90.

14. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Семенишина І. В.* Про існування гладкого обмеженого напівінваріантного многовиду виродженої нелінійної системи різницевих рівнянь у просторі m // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 3. — С. 378–400.

15. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — 496 с.

Одержано 18.10.08