УДК 517.5

ДИНАМІКА КВАНТОВАНОГО ГОМЕОМОРФІЗМУ КОЛА З КВАЗІПЕРІОДИЧНИМ ЗБУРЕННЯМ

О. Ю. Теплінський

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We introduce a notion of a quantized circle homeomorphism that is a discontinuous map of the type of an interval translation. It has a broad area of applications in the modern digital electronics. For a two-dimensional dynamical system, given by a triangular mapping, which is a quantized homeomorphism of a circle with a quasiperiodic perturbation, we prove, making some assumptions, that there exist an invariant absorbing belt and a repulsive contour, study properties of these structures, and get estimates of their sizes. To make the exposition complete, we first study the corresponding problems for three systems that are less complicated, namely, a proper homeomorphism of a circle, a proper homeomorphism of a circle with quasiperiodic perturbation, and a quantized homeomorphism of a circle with no perturbation.

Введено понятие квантованного гомеоморфизма окружности — разрывного отображения типа интервального сдвига, которое широко применяется в современной цифровой радиоэлектронике. Для двумерной динамической системы, заданной треугольным отображением — квантованным гомеоморфизмом окружности с квазипериодическим возмущением, — при определенных условиях доказано существование инвариантного поглощающего пояса и отталкивающего контура, исследованы свойства этих структур и получены оценки на их размеры. Для полноты изложения вначале исследованы соответствующие вопросы для трех систем более низких уровней сложности, а именно, истинного гомеоморфизма окружности, истинного гомеоморфизма окружности с квазипериодическим возмущением и квантованного гомеоморфизма окружности без возмущения.

1. Вступ та основні поняття. В оглядовій статті [1] пояснено важливість для сучасної радіоелектроніки вивчення динаміки відображень, що походять від зсуву інтервалів. У роботі [2] досліджено (а в [3] узагальнено) динаміку квазіперіодично збуреного зсуву двох інтервалів дійсної прямої з перекриттям, який моделює роботу поширеного електронного пристрою — сигма-дельта-модулятора. Суттєвою рисою розглянутої динамічної системи є її дисипативність в тому сенсі, що кожна траєкторія рано чи пізно потрапляє в певний наперед визначений обмежений регіон, в якому залишається назавжди. Більш складна ситуація виникає, коли досліджується зсув інтервалів не на прямій, а на колі. Таке відображення також має прикладне значення, зокрема як модель іншого радіоелектронного пристрою — цифрової системи фазового автопідлаштування частоти [4, 5].

Перейдемо до математичного викладу. *Одиничне коло* $\mathbb{S}$ можна розглядати як результат факторизації дійсної прямої за модулем 1, тобто $\mathbb{S} = \mathbb{R} \bmod 1$ із зрозумілим чином визначеними орієнтацією, мірою Лебега та груповою операцією зсуву, яка ототожнюється із додаванням дійсного числа $\bmod 1$. Відповідно, довільний гомеоморфізм одиничного кола зі збереженням орієнтації можна розглядати як гомеоморфізм дійсної прямої $\mathbb{R}$ вигляду

$$F_1 : x \mapsto x + \nu + N(x), \tag{1}$$

де *істотний зсув* ν — певне дійсне число, а *нелінійність* N — певна неперервна функція з одиничним періодом така, що значення суми $x + N(x)$ строго зростає. Відповідно, траєкторія динамічної системи x_n, $n \geq 0$, визначається своєю початковою точкою x_0 та рекурентними співвідношеннями $x_n = x_{n-1}+\nu+N(x_{n-1})$. Очевидно, що відображення (1) має властивість $F(x+1) \equiv F(x)+1$, яку називають *динамічною періодичністю*, оскільки внаслідок неї всі динамічні структури на прямій, породжені дією такого відображення, повторюють себе з одиничним періодом.

Для однозначного визначення нелінійності N слід вважати її певним чином нормованою, наприклад, співвідношенням $\int_0^1 N(x)dx = 0$. При цьому для даного гомеоморфізму кола його підняття на дійсну пряму (1) все одно визначається не однозначно, а з точністю до цілого доданка, отже, здається доцільним нормувати також і ν, наприклад, умовою $\nu \in [0,1)$. Але ми цього не робитимемо з наступної причини. Насправді гомеоморфізм кола, як правило, з'являється як відображення перерізу Пуанкаре певного потоку на двовимірному торі, і в цьому випадку ціла частина істотного зсуву ν містить інформацію про те, скільки разів траєкторії потоку обходять навколо тора до повернення на обраний переріз. Цю інформацію варто зберегти, і саме тому ми будемо розглядати не гомеоморфізми кола, а їхні підняття вигляду (1), що є спеціальним класом гомеоморфізмів дійсної прямої.

Зауважимо також, що число обертання $r = \lim\limits_{n\to\infty} x_n/n$ гомеоморфізму (1) не дорівнює, взагалі кажучи, ν, а зі збільшенням нелінійності може набувати значення найближчого до ν раціонального числа з достатньо малим знаменником, яке в цьому випадку називають *модою*. Описаний феномен *захоплення моди*, або просто *дробової синхронізації* є добре вивченим у загальній теорії одновимірних динамічних систем [6], зокрема на прикладі так званих відображень Арнольда — аналітичних дифеоморфізмів кола вигляду (1) з синусоїдальною нелінійністю $N(x) = a\sin 2\pi x$, $a < 1/(2\pi)$. Власне, явище захоплення моди і є предметом нашого дослідження, але в більш складній системі, яка включає водночас квантування нелінійності та квазіперіодичне збурення, і означення якої ми наведемо нижче.

Розглянемо випадок, коли на гомеоморфізм вигляду (1) діє квазіперіодичне збурення. В радіоелектроніці таким збуренням є зовнішній періодичний сигнал, частота якого є раціонально несумірною з частотою внутрішнього годинника приладу. Отже, рівняння траєкторії має вигляд $x_n = x_{n-1}+\nu+N(x_{n-1})+f_n$, де $f_n = f(\theta_n)$, f — певна 1-періодична функція, а $\theta_n = \theta_{n-1}+\rho = \theta_0+n\rho$ з ірраціональним кроком ρ, який можна вважати таким, що належить інтервалу $(0,1)$. Цю ситуацію описує двовимірна динамічна система, задана трикутним відображенням

$$F_2 : (\theta, x) \mapsto (\theta+\rho, x+\nu+N(x)+f(\theta+\rho)), \tag{2}$$

фазовим простором якого природно вважати циліндр $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$, а f — неперервною функцією з $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}$, для однозначності припускаючи, що $\int_{\mathbb{S}} f(\theta)d\theta = 0$. (Очевидно, відображення (2) є гомеоморфізмом циліндра $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$, а факторизація $\bmod 1$ за змінною x переводить його у гомеоморфізм двовимірного тора $\mathbb{T} = \mathbb{S}\times\mathbb{S}$.)

Пояснимо тепер, що ми називаємо квантуванням нелінійності. В радіоелектроніці квантизатором називається пристрій, що транслює аналоговий сигнал у цифровий. У математичному розумінні рівномірний *квантизатор* на крок $d > 0$ — це кусково-стала функція Q_d, яка переводить дійсне число x у найбільше число вигляду nd, що не перевищує x, із цілим n. Інакше кажучи, для кожного цілого n квантизатор Q_d відображає всі точки проміжку $[nd, (n+1)d)$ в його лівий кінець. Можна записати $Q_d(x) = d\,[x/d]$, де квадратні дужки позначають цілу частину функції. Власне кажучи, ціла частина функції є рівномірним квантизатором на одиничний крок.

Квантованим гомеоморфізмом кола будемо називати відображення дійсної прямої в себе вигляду

$$F_3 : x \mapsto x + \nu + Q_d(N(x)) \tag{3}$$

з такою нелінійністю N, що відповідне неквантоване відображення (1) є справжнім гомеоморфізмом кола. Крок квантування d вважається значно меншим за 1. Легко бачити, що квантований гомеоморфізм кола є зсувом інтервалів [1, 3] на $\mathbb{R}$, який факторизація $\bmod 1$ перетворює на зсув скінченної кількості інтервалів на одиничному колі. Зауважимо, що квантований гомеоморфізм кола не є, звичайно ж, його гомеоморфізмом, але має дуже споріднені властивості, що дає нам право використовувати такий термін. Проте з математичної точки зору квантований гомеоморфізм є дуже складним відображенням з багатьма розривами, до якого не можна застосувати жодний із класичних результатів. Власне, незастосовність класичної теорії до динаміки квантованих гомеоморфізмів за інтуїтивної очевидності її подібності до динаміки справжніх гомеоморфізмів і спонукала наші дослідження. Зауважимо, що для квантованого гомеоморфізму кола (3) припущення $\int_0^1 N(x)\,dx = 0$ вже не є природним; натомість операція одночасного додавання до ν і віднімання від N величини вигляду kd з цілим k залишає відображення (3) без змін.

Головним предметом розгляду цієї статті є квантований гомеоморфізм кола із квазіперіодичним збуренням, тобто двовимірне відображення

$$F : (\theta, x) \mapsto (\theta + \rho, \Phi_{\theta+\rho}(x)) \tag{4}$$

на циліндрі $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$, де однопараметрична сім'я квантованих гомеоморфізмів кола Φ_θ, $\theta \in \mathbb{S}$, задається формулою

$$\Phi_\theta(x) = x + \nu + f(\theta) + Q_d(N(x)) \tag{5}$$

із дійсним параметром ν, неперервною функцією $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, яка має нульове середнє значення $\int_{\mathbb{S}} f(\theta)d\theta = 0$, і неперервною функцією $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ періоду 1 такою, що значення суми $x + N(x)$ строго зростає, $d \ll 1$, а $\rho \in (0, 1)$ і є ірраціональним.

2. Формулювання результатів. Наведемо результати щодо умов і динаміки захоплення моди для кожного з відображень (1) – (4). Розглядатимемо випадок, коли нелінійність N є бімодальною (тобто має на одиничному періоді єдину точку максимуму x^* і єдину точку мінімуму x_*, зі значеннями в них $N_{\max}$ та $N_{\min}$ відповідно, між якими вона є строго монотонною; без обмежень загальності вважатимемо, що $x^* < x_* < x^* + 1$), і вивчатимемо захоплення моди $r = 0$ (тобто обмежені на дійсній прямій траєкторії x_n, $n \geq 0$). Сформулюємо результати щодо кожної з систем (1) – (4).

Зауважимо, що ці системи моделюють динаміку цілком певних радіоелектронних пристроїв — систем фазового автопідлаштування частоти (ФАПЧ) — у чотирьох випадках: (1) та (2) описують аналогові ФАПЧ, а (3) та (4) — цифрові, тоді як (1) та (3) відповідають вхідному сигналові сталої частоти, а (2) та (4) — модульованої (тобто FM-сигналу). Захоплення нульової моди є метою цих пристроїв, що призначені для вловлення приладом (наприклад, мобільним телефоном) частоти вхідного сигналу, яка не є завчасно точно відомою. Відмітимо також, що зазвичай в описаних прикладних моделях функції N і f є синусоїдами: $N(x) = a\sin 2\pi x$, $a > 0$; $f(\theta) = b\sin 2\pi\theta$, $b > 0$.

Для гомеоморфізму вигляду (1) умови захоплення нульової моди є еквівалентними наявності в нього нерухомої точки, при цьому динаміка всієї системи є дуже простою.

Твердження 1. *Нехай нелінійність N є бімодальною, а істотний зсув $\nu \in (-N_{\max}, -N_{\min})$. Тоді гомеоморфізм (1) має на (одиничному) періоді рівно дві нерухомі точки: стійку x_{s}, яка є (єдиним) коренем рівняння $\nu + N(x) = 0$ на інтервалі (x^*, x_*), та нестійку x_{u}, яка є (єдиним) коренем рівняння $\nu + N(x) = 0$ на $(x_*, x^* + 1)$; усі траєкторії системи, що стартували на інтервалі $(x_{\mathrm{u}} - 1, x_{\mathrm{u}})$, збігаються до x_{s}. Ця збіжність є рівномірною в тому сенсі, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $K(\varepsilon)$ таке, що кожна траєкторія з початковою точкою в $[x_{\mathrm{u}} - 1 + \varepsilon, x_{\mathrm{u}} - \varepsilon]$ через $K(\varepsilon)$ кроків потрапляє до $(x_{\mathrm{s}} - \varepsilon, x_{\mathrm{s}} + \varepsilon)$, де залишається назавжди.*

(У випадку синусоїдальної нелінійності $N(x) = a\sin 2\pi x$ умови на ν набирають простого вигляду $|\nu| < a$.)

Наявність квазіперіодичного збурення, за умов його малості, „розтягує” нерухомі точки в неперервні інваріантні контури на циліндрі (*контуром* на циліндрі $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$ називається графік будь-якої обмеженої функції з $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}$; оскільки це не призводить до великої плутанини, контур і відповідну функцію позначатимемо у цій статті однаково). Введемо ще одне поняття: для даних двох контурів $L \le U$ на циліндрі $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$ множину точок, що лежать між ними, будемо називати *поясом* з *межами* L та U. При цьому у випадку, коли для якихось θ має місце рівність $L(\theta) = U(\theta)$, пояс називатимемо виродженим. Межі можуть як належати поясу, так і не належати йому (аналогічно до кінців проміжку дійсної прямої). Позначення також будемо використовувати аналогічні: так, запис $B = [L, U)$ позначатиме напіввідкритий пояс B з нижньою L і верхньою U межами, тобто множину точок $\{(\theta, x) | L(\theta) \le x < U(\theta)\} \subset \mathbb{S}\times\mathbb{R}$.

Твердження 2. *Нехай виконуються умови твердження 1, функція $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ неперервна, $\int_{\mathbb{S}} f(\theta)d\theta = 0$, і до того ж для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ виконуються обмеження $f(\theta) \in \in [-N_{\max} - \nu, -N_{\min} - \nu]$. Тоді система (2) на циліндрі $\mathbb{S}\times\mathbb{R}$ має рівно два неперервних інваріантних контури на (одиничному) періоді за змінною x : стійкий $x^* < C_{\mathrm{s}} < x_*$ та нестійкий $x_* < C_{\mathrm{u}} < x^* + 1$; усі траєкторії системи, що стартували в поясі $(C_{\mathrm{u}} - 1, C_{\mathrm{u}})$, притягуються до C_{s}. Ця збіжність є рівномірною в тому сенсі, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $K(\varepsilon)$ таке, що кожна траєкторія з початковою точкою в поясі $[C_{\mathrm{u}} - 1 + \varepsilon, C_{\mathrm{u}} - \varepsilon]$ через $K(\varepsilon)$ кроків потрапляє до $(C_{\mathrm{s}} - \varepsilon, C_{\mathrm{s}} + \varepsilon)$, де залишається назавжди.*

(У випадку синусоїдальних нелінійності $N(x) = a\sin 2\pi x$ і збурення $f(\theta) = b\sin 2\pi\theta$ обмеження набирають вигляду $b \le a - |\nu|$.)

У випадку квантованого гомеоморфізму, хоча за малого кроку квантування d динаміка на одиничному масштабі в обчислювальних експериментах виглядає подібною до динаміки неквантованого, математичні структури, які при цьому виникають, є досить специфічними. Так, замість стійкої нерухомої точки x_{s} з'являється інваріантний поглинаючий (чи „абсорбуючий”) півінтервал I_{a}, довжина якого дорівнює кроку квантування, з простою динамікою всередині, який поглинає траєкторії рівномірно відносно їхніх початкових даних. А місце нестійкої нерухомої точки x_{s} займає відштовхуюча точка x_{r}, що розділяє басейни поглинання сусідніх (тобто відмінних на 1) інваріантних поглинаючих інтервалів.

Твердження 3. *Нехай нелінійність N квантованого гомеоморфізму (3) є бімодальною і задовольняє умову стискання*

$$|N(x_1) - N(x_2)| < |x_1 - x_2|, \quad x_1 \neq x_2, \tag{6}$$

а істотний зсув $\nu \in (-Q_d(N_{\max}) + d, -Q_d(N_{\min}) - d)$ і число ν/d не є цілим. Тоді на (одиничному) періоді є дві структури: інваріантний поглинаючий півінтервал $I_{\mathrm{a}} = (x_{\mathrm{a}}, x_{\mathrm{a}} + d]$, який міститься у проміжку (x^*, x_*), та відштовхуюча точка x_{r}, що належить $(x_*, x^* + 1)$; існує натуральне число K таке, що всі траєкторії системи, які стартували в півінтервалі $[x_{\mathrm{r}} - 1, x_{\mathrm{r}})$, потрапляють до I_{a} через не більше ніж K кроків. Динаміка траєкторій всередині інваріантного поглинаючого півінтервалу I_{a}, якщо зімкнути його шляхом ототожнення кінців у коло довжини d, є жорстким поворотом цього кола на величину $Q_d(\nu) + d - \nu$.

(*У випадку синусоїдальної нелінійності $N(x) = a \sin 2\pi x$ з нецілим a/d обмеження на ν набирають вигляду $\nu \in (-Q_d(a) + d, Q_d(a))$.*)

Додаткова умова нецілості ν/d, яку ми тут накладаємо, відкидає особливий випадок, коли один з інтервалів відображення зсуву інтервалів (3) насправді не зазнає ніякого зсуву. В цьому випадку цей нерухомий інтервал буде інваріантним поглинаючим півінтервалом, але його довжина не є пов'язаною з кроком квантування d і може мати порядок одиниці.

Нарешті, наш головний результат стосується квантованого гомеоморфізму з квазіперіодичним збуренням.

Теорема. *Нехай нелінійність N сім'ї квантованих гомеоморфізмів (5) є бімодальною, задовольняє умову стискання (6), число ν/d не є цілим, $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ неперервна, $\int_{\mathbb{S}} f(\theta) d\theta = 0$, і до того ж для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ виконуються обмеження $f(\theta) \in [-Q_d(N_{\max}) + d - \nu, -Q_d(N_{\min}) - d - \nu]$. Тоді система (4) на циліндрі $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ має на (одиничному) періоді за змінною x дві структури: інваріантний поглинаючий пояс $B_{\mathrm{a}} = (L_{\mathrm{a}}, U_{\mathrm{a}}]$ сталої товщини d з неперервними межами $x^* < L_{\mathrm{a}} < U_{\mathrm{a}} = L_{\mathrm{a}} + d < x_*$ та неперервний відштовхуючий контур $x_* < C_{\mathrm{r}} < x^* + 1$; існує натуральне число K таке, що всі траєкторії системи, які стартували в поясі $[C_{\mathrm{r}} - 1, C_{\mathrm{r}})$, потрапляють до B_{a} через не більше ніж K кроків. Динаміка траєкторій всередині інваріантного поглинаючого поясу B_{a}, якщо зімкнути його шляхом ототожнення меж у двовимірний тор розміру $1 \times d$, є певним косим зсувом на цьому торі.*

(*У випадку синусоїдальних нелінійності $N(x) = a \sin 2\pi x$ з нецілим a/d і збурення $f(\theta) = b \sin 2\pi\theta$ обмеження набирають вигляду $b \leq \min\{Q_d(a) - \nu, Q_d(a) + \nu - d\}$.*)

3. Доведення тверджень. За нашим припущенням, функція N строго спадає на відрізку $[x^*, x_*]$ і строго зростає на відрізку $[x_*, x^* + 1]$, а функція $(\mathrm{Id} + N) : x \mapsto x + N(x)$ строго зростає на $\mathbb{R}$, звідки

$$0 < (\mathrm{Id} + N)(x'') - (\mathrm{Id} + N)(x') < x'' - x' \quad \text{для} \quad x^* \leq x' < x'' \leq x_*, \tag{7}$$

$$0 < x'' - x' < (\mathrm{Id} + N)(x'') - (\mathrm{Id} + N)(x') \quad \text{для} \quad x_* \leq x' < x'' \leq x^* + 1. \tag{8}$$

Нерівності (7), (8) свідчать про те, що функція $(\mathrm{Id}+N)$ є на проміжку $[x^*, x_*]$ строгим стисканням, а на проміжку $[x_*, x^*+1]$ — строгим розтягненням (хоча й не обов'язково рівномірним).

Твердження 1 включено до цієї статті лише для повноти картини, його доведення є майже тривіальною вправою з теорії динаміки одновимірних неперервних відображень, тому ми його не наводимо. Доведення твердження 2 буде в певному сенсі підготовкою ідей, які будуть використані при доведенні теореми. Доведення твердження 3 є простою технічною перевіркою, але воно допоможе пояснити певні нюанси наслідків квантування нелінійності, які також знайдуть своє використання при доведенні теореми.

3.1. Доведення твердження 2. Зауважимо знову, що відображення F_2 є неперервним, оборотним і строго зростаючим відносно змінної x, крім того воно має властивість $F_2(\theta, x+1) = F_2(\theta, x) + (0, 1)$. Розглянемо такі двосторонні послідовності неперервних контурів: $U_0(\theta) \equiv x_*$, $L_0(\theta) \equiv x^*$, $U_n = F_2^n(U_0)$, $L_n = F_2^n(L_0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Внаслідок обмеження $f(\theta) \in [-N_{\max} - \nu, -N_{\min} - \nu]$, $\theta \in \mathbb{S}$, мають місце нерівності $L_1(\theta) = x^* + N_{\max} + \nu + f(\theta) \geq x^* = L_0(\theta)$, $U_1(\theta) = x_* + N_{\min} + \nu + f(\theta) \leq x_* = U_0(\theta)$, а отже, послідовність U_n, $n \in \mathbb{Z}$, є незростаючою, а послідовність L_n, $n \in \mathbb{Z}$, — неспадною. Оскільки $U_0 - 1 < L_0 < U_0 < L_0 + 1$, то ці послідовності є обмеженими з обох боків, отже, існують граничні контури $L_+ = \lim\limits_{n\to+\infty} L_n$, $L_- = \lim\limits_{n\to-\infty} L_n$, $U_+ = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, $U_- = \lim\limits_{n\to-\infty} U_n$. Граничні переходи при $n \to \pm\infty$ у рівностях $L_n = F_2(L_{n-1})$ та $U_n = F_2(U_{n-1})$ показують, що кожен із чотирьох граничних контурів L_+, L_-, U_+, U_- (а також кожна їхня копія, зсунута на ціле число за змінною x) є інваріантним відносно дії F_2, а отже, при підстановці замість невідомої функції $X : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ задовольняє функціональне рівняння

$$X(\theta) = (\mathrm{Id} + N)(X(\theta - \rho)) + \nu + f(\theta). \tag{9}$$

Зауважимо, що згідно з нашою побудовою маємо наступний порядок слідування граничних контурів:

$$x_* - 1 \leq U_- - 1 \leq L_- \leq x^* \leq L_+ \leq U_+ \leq x_* \leq U_- \leq L_- + 1 \leq x^* + 1. \tag{10}$$

Доведемо неперервність контуру U_+. *Стрибок* функції U_+ у точці θ означається як

$$\mathrm{jmp}\, U_+(\theta) = \lim \sup_{\theta_1, \theta_2 \to \theta} (U_+(\theta_2) - U_+(\theta_1)).$$

Нехай $\inf U_+ = \inf_{\theta \in \mathbb{S}} U_+(\theta)$. Для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ знайдуться $n \geq 1$ та $\theta_* \in \mathbb{S}$ такі, що $U_n(\theta_*) < \inf U_+ + \varepsilon$. Оскільки контур U_n неперервний, існує певний (відкритий) окіл $I \subset \mathbb{S}$ точки θ_* такий, що $U_n(\theta) < \inf U_+ + \varepsilon$ для всіх $\theta \in I$. Таким чином, маємо $\inf U_+ \leq U_+(\theta) < \inf U_+ + \varepsilon$ і, отже, $\mathrm{jmp}\, U_+(\theta) \leq \varepsilon$ для всіх $\theta \in I$. З (9) та (7) випливає, що $\mathrm{jmp}\, U_+(\theta + \rho) \leq \mathrm{jmp}\, U_+(\theta)$ для кожного $\theta \in \mathbb{S}$. Оскільки ρ ірраціональне, множина точок $\{\theta + m\rho \,|\, m \geq 0, \theta \in I\}$ являє собою суцільне коло $\mathbb{S}$. Отже, $\mathrm{jmp}\, U_+(\theta) \leq \varepsilon$ для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Але $\varepsilon > 0$ ми вибрали довільне, тому насправді $\mathrm{jmp}\, U_+(\theta) \equiv 0$, тобто контур U_+ є неперервним.

Неперервність решти граничних контурів доводиться аналогічно (для L_+ і U_- замість $\inf$ слід розглянути $\sup$; для L_- і U_- замість (7) використати (8)).

Нехай $\theta^* \in \mathbb{S}$ — точка максимуму (неперервної та обмеженої) функції $\Delta_+ = U_+ - L_+ \geq 0$. Припустимо, що $\Delta_+(\theta^*) > 0$. Тоді внаслідок (9) та (7) маємо $\Delta_+(\theta_* - \rho) > \Delta_+(\theta^*)$, що суперечить вибору θ^*. Отже, насправді $\Delta_+(\theta) \equiv 0$. Це означає, що L_+ та U_+ — один і той самий інваріантний контур, який ми тепер позначимо C_s. Аналогічно (з використанням (8) замість (7)) доводиться, що $L_- + 1$ та U_- — один і той самий інваріантний контур, який ми позначимо C_u.

Покажемо, що насправді виконуються строгі нерівності $x^* < C_\mathrm{s} < x_* < C_\mathrm{u} < x^* + 1$ (відповідні нестрогі нерівності ми вже довели, див. (10)). Доведемо лише першу з них (решта доводиться аналогічно). Нехай $x > x^*$, тоді $(\mathrm{Id} + N)(x) + \nu + f(\theta) > (\mathrm{Id} + N)(x^*) + \nu + f(\theta) \geq x^*$ внаслідок того, що $\mathrm{Id} + N$ зростає, та обмежень на $f(\theta)$. Отже, з (9) та нестрогої нерівності $x^* \leq C_\mathrm{s}$ випливає, що якщо $C_\mathrm{s}(\theta) = x^*$ для якогось $\theta \in \mathbb{S}$, то і $C_\mathrm{s}(\theta - \rho) = x^*$. Оскільки ρ ірраціональне, а контур C_s неперервний, то з припущення $C_\mathrm{s}(\theta) = x^*$ для якогось одного $\theta \in \mathbb{S}$ випливає $C_\mathrm{s}(\theta) = x^*$ для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Але тоді $N_{\max} + \nu + f(\theta) = 0$ для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ на підставі рівняння (9). Інтегруючи останню рівність по колу $\mathbb{S}$, отримуємо $\nu + N_{\max} = 0$, що суперечить припущенню твердження щодо обмежень на величину ν.

Оскільки послідовність неперервних функцій на компакті, яка поточково збігається до неперервної функції, збігається до неї рівномірно, то для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$, що $L_{-n_0} < C_\mathrm{u} - 1 + \varepsilon$, $L_{n_0} > C_\mathrm{s} - \varepsilon$, $U_{n_0} < C_\mathrm{s} + \varepsilon$, $U_{-n_0} > C_\mathrm{u} - \varepsilon$. Отже, $K(\varepsilon) = 2n_0(\varepsilon)$ задовольняє вимогу твердження, і прямування траєкторій з поясу $(C_\mathrm{u} - 1, C_\mathrm{u})$ до C_s є дійсно рівномірним у вказаному сенсі.

3.2. Доведення твердження 3. Опишемо наявну картину інтервального зсуву (3). Розглянемо цілі числа

$$k_{\min} = Q_d(N_{\min})/d + 1 = [N_{\min}/d] + 1, \quad k_{\max} = Q_d(N_{\max})/d = [N_{\max}/d].$$

Для кожного $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ (і лише для них) рівняння $N(x) = kd$ має єдиний розв'язок на $[x^*, x_*]$ та єдиний розв'язок на $[x_*, x^* + 1]$, які ми позначимо σ_k^+ та σ_k^- відповідно. Ці точки є точками розриву відображення F_3 (крім, можливо, точок $\sigma_{k_{\min}}^-$ та $\sigma_{k_{\min}}^+$ у випадку, коли вони обидва дорівнюють x_*). Означені точки впорядковані таким чином:

$$x^* \leq \sigma_{k_{\max}}^+ < \sigma_{k_{\max}-1}^+ < \ldots < \sigma_{k_{\min}}^+ \leq x_* \leq \sigma_{k_{\min}}^- < \sigma_{k_{\min}+1}^- < \ldots < \sigma_{k_{\max}}^- \leq x^* + 1$$

і задовольняють нерівності

$$\sigma_{k+1}^- - \sigma_k^- > d, \quad \sigma_k^+ - \sigma_{k+1}^+ > d \quad \text{для} \quad k_{\min} \leq k \leq k_{\max} - 1 \tag{11}$$

внаслідок припущення (6). Отже, одиничний період $[\sigma_{k_{\max}}^- - 1, \sigma_{k_{\max}}^-)$ виявляється розбитим на проміжки, які жорстко зсуваються відображенням F_3 на різні відстані, а саме, $F_3(x) = x + \nu + kd$ на проміжках $[\sigma_k^-, \sigma_{k+1}^-)$ та $(\sigma_{k+1}^+, \sigma_k^+]$ (які згідно з (11) є довшими за d) для $k_{\min} \leq k \leq k_{\max} - 1$; на проміжку $(\sigma_{k_{\min}}^+, \sigma_{k_{\min}}^-)$ (який може бути порожнім) для $k = k_{\min} - 1 = [N_{\min}/d]$; на проміжку $[\sigma_{k_{\max}}^- - 1, \sigma_{k_{\max}}^+]$ (який може бути виродженим у точку) для $k = k_{\max} = [N_{\max}/d]$. Зазначимо, що обмеження на ν гарантують, зокрема, що $-Q_d(N_{\max}) + d < -Q_d(N_{\min}) - d$, з чого випливає $k_{\max} - k_{\min} \geq 2$.

Звернемо увагу на властивості, що мають місце для будь-якого $k_{\min} \le k \le k_{\max}$:

$$x \le \sigma_k^+ \Rightarrow F_3(x) \le F_3(\sigma_k^+), \tag{12}$$

$$x > \sigma_k^+ \Rightarrow F_3(x) > F_3(\sigma_k^+ + 0). \tag{13}$$

Вони випливають зі строгого зростання F_3 на проміжку $(\sigma_{k_{\min}}^+ - 1, \sigma_{k_{\max}}^+]$ і на кожному з проміжків $(\sigma_{k+1}^+, \sigma_k^+]$, $k_{\min} \le k < k_{\max}$, для кінців яких внаслідок (11) виконується нерівність $F_3(\sigma_{k+1}^+) - F_3(\sigma_k^+) = (\sigma_{k+1}^+ + \nu + (k+1)d) - (\sigma_k^+ + \nu + kd) = d - (\sigma_k^+ - \sigma_{k+1}^+) < 0$.

Умову $\nu \in (-Q_d(N_{\max}) + d, -Q_d(N_{\min}) - d)$ можна записати у вигляді $\nu \in (-(k_{\max} - 1)d, -k_{\min}d)$, отже, $-(k_{\max}-1) \le [\nu/d] \le -k_{\min}-1$, $k_{\min}+1 \le -[\nu/d] \le k_{\max}-1$. Оскільки ν/d не є цілим числом, то проміжки $[\sigma_{-[\nu/d]}^-, \sigma_{-[\nu/d]+1}^-)$ та $(\sigma_{-[\nu/d]+1}^+, \sigma_{-[\nu/d]}^+]$ зсуваються під дією F_3 праворуч (тобто на додатну відстань, а саме, на $\nu - [\nu/d]$, $d = \nu - Q_d(\nu)$), а проміжки $[\sigma_{-[\nu/d]-1}^-, \sigma_{-[\nu/d]}^-)$ та $(\sigma_{-[\nu/d]}^+, \sigma_{-[\nu/d]-1}^+]$ — ліворуч (тобто на від'ємну відстань, а саме, на $\nu + (-[\nu/d] - 1)d = \nu - Q_d(\nu) - d$).

Покладемо $x_{\mathrm{r}} = \sigma_{-[\nu/d]}^-$, $x_{\mathrm{a}} = F_3(\sigma_{-[\nu/d]}^+ + 0) = \sigma_{-[\nu/d]}^+ + \nu - Q_d(\nu) - d$.

Очевидно, що $I_{\mathrm{a}} = (F_3(\sigma_{-[\nu/d]}^+ + 0), F_3(\sigma_{-[\nu/d]}^+ - 0)]$ розбивається на два підінтервали: $(\sigma_{-[\nu/d]}^+ + \nu - Q_d(\nu) - d, \sigma_{-[\nu/d]}^+]$ та $(\sigma_{-[\nu/d]}^+, \sigma_{-[\nu/d]}^+ + \nu - Q_d(\nu)]$, які під дією F_3 перекладаються, знову утворюючи I_{a}. Отже, I_{a} дійсно є інваріантним півінтервалом з динамікою, описаною в формулюванні твердження.

Покажемо, що всі траєкторії з $[x_{\mathrm{r}} - 1, x_{\mathrm{r}})$ потрапляють всередину I_{a} за універсальну скінченну кількість кроків. Легко бачити, що кожна точка з $[\sigma_{-[\nu/d]}^-, \sigma_{-[\nu/d]}^+]$ під дією F_3 зсувається праворуч принаймні на $\nu - Q_d(\nu) > 0$, а кожна точка з $(\sigma_{-[\nu/d]}^+, \sigma_{-[\nu/d]}^- + 1)$ — ліворуч принаймні на $-(\nu - Q_d(\nu) - d) > 0$, до того ж внаслідок (12), (13) ця траєкторія не може перестрибнути через I_{a}. Отже, через $K = [\max\{(\nu - Q_d(\nu))^{-1}, (-\nu + Q_d(\nu) + d)^{-1}\}] + 1$ кроків вона обов'язково потрапить до I_{a}.

3.3. Доведення теореми. Динамічна система, задана відображенням (4), поєднує в собі якості систем (2) та (3), які вивчалися в доведеннях тверджень 2 та 3 відповідно. Легко перевірити, що виконання умов теореми приводить до виконання умов тверджень 1–3. Розбиття $\mathbb{R}$ на проміжки неперервності точками σ_k^- та σ_k^+ (і їхніми копіями, зсунутими на цілі числа) залишається таким самим, як у доведенні твердження 3, лише зараз це проміжки неперервності інтервального зсуву Φ_θ, який у свою чергу неперервно залежить від параметра θ, а саме, маємо $\Phi_\theta(x) = x + \nu + f(\theta) + kd$, якщо x належить проміжку $[\sigma_k^-, \sigma_{k+1}^-)$ або $(\sigma_{k+1}^+, \sigma_k^+]$ (які згідно з (11) є довшими за d) для $k_{\min} \le k \le k_{\max} - 1$; якщо x належить проміжку $(\sigma_{k_{\min}}^+, \sigma_{k_{\min}}^-)$ (який може бути порожнім) для $k = k_{\min} - 1 = [N_{\min}/d]$; якщо x належить проміжку $[\sigma_{k_{\max}}^- - 1, \sigma_{k_{\max}}^+]$ (який може бути виродженим у точку) для $k = k_{\max} = [N_{\max}/d]$ (нагадаємо, що $k_{\max} - k_{\min} \ge 2$).

Зауважимо, що сусідні проміжки неперервності інтервального зсуву Φ_θ зі спільним кінцем σ_k^+ посуваються під його дією один до одного ближче, тоді як проміжки неперервності зі спільним кінцем σ_k^- посуваються один від одного далі. Відповідно виконуються нерівності

$$\Phi_\theta(x_2) - \Phi_\theta(x_1) \le x_2 - x_1, \quad x^* \le x_1 \le x_2 \le x_*, \quad \theta \in \mathbb{S}, \tag{14}$$

$$\Phi_\theta(x_2) - \Phi_\theta(x_1) \ge x_2 - x_1, \quad x_* \ge x_1 \le x_2 \le x^* + 1, \quad \theta \in \mathbb{S}. \tag{15}$$

Аналогічно властивостям (12), (13) для F_3, для всіх $k_{\min} \le k \le k_{\max}$, $\theta \in \mathbb{S}$ маємо

$$x \le \sigma_k^+ \Rightarrow \Phi_\theta(x) \le \Phi_\theta(\sigma_k^+), \tag{16}$$

$$x > \sigma_k^+ \Rightarrow \Phi_\theta(x) > \Phi_\theta(\sigma_k^+ + 0). \tag{17}$$

Для доведення теореми скористаємося ідеєю доведення твердження 2, а саме, побудуємо дві послідовності неперервних поясів $B_n^+ = (L_n^+, U_n^+]$ та $B_n^- = [L_n^-, U_n^-)$, $n \ge 0$, де $B_0^+ = \mathbb{S} \times (\sigma_{k_{\max}}^+, \sigma_{k_{\min}}^+]$, $B_0^- = \mathbb{S} \times [\sigma_{k_{\min}}^-, \sigma_{k_{\max}}^-)$, а далі індуктивно $B_n^+ = F(B_{n-1}^+)$, $B_n^- = F^{-1}(B_{n-1}^-)$, $n \ge 1$. Перша з цих послідовностей стягнеться до інваріантного поясу B_{a}, а друга — до відштовхуючого контуру C_{r}. Але спершу переконаємось, що наведена конструкція насправді приводить до послідовностей поясів вказаного вигляду, які до того ж насправді стягуються.

Для побудови першої послідовності означимо, виходячи з функції Φ_θ, її *верхню* $\hat{\Phi}_\theta$ та *нижню* $\check{\Phi}_\theta$ *зрізки* на відрізку $[x^*, x_*]$ таким чином:

$$\hat{\Phi}_\theta(x) = \sup_{y \in [x^*, x]} \Phi_\theta(y), \quad \check{\Phi}_\theta(x) = \inf_{y \in [x, x_*]} \Phi_\theta(y), \quad x \in [x^*, x_*], \quad \theta \in \mathbb{S}.$$

Ці функції неважко виразити у явному вигляді:

$$\hat{\Phi}_\theta(x) = \begin{cases} \sigma_k^+ + \nu + f(\theta) + kd & \text{для} \quad x \in [\sigma_k^+, \sigma_k^+ + d], \quad k_{\min} \le k \le k_{\max}, \\ \Phi_\theta(x) & \text{для решти} \quad x \in [x^*, x_*], \end{cases} \tag{18}$$

$$\check{\Phi}_\theta(x) = \begin{cases} \sigma_k^+ + \nu + f(\theta) + kd - d & \text{для} \quad x \in [\sigma_k^+ - d, \sigma_k^+], \quad k_{\min} \le k \le k_{\max}, \\ \Phi_\theta(x) & \text{для решти} \quad x \in [x^*, x_*]. \end{cases} \tag{19}$$

Очевидно, що вирази $\hat{\Phi}_\theta(x)$ та $\check{\Phi}_\theta(x)$ є неперервними за двома змінними $(\theta, x) \in \mathbb{S} \times [x^*, x_*]$, до того ж для кожного фіксованого $\theta \in \mathbb{S}$ функції $\hat{\Phi}_\theta$ та $\check{\Phi}_\theta$ є кусково-лінійними, складаючись з кусків нахилу 1 та 0 почергово, а отже, задовольняють умови неспадання та нерозтягнення

$$0 \le \hat{\Phi}_\theta(x_2) - \hat{\Phi}_\theta(x_1) \le x_2 - x_1, \; 0 \le \check{\Phi}_\theta(x_2) - \check{\Phi}_\theta(x_1) \le x_2 - x_1, \qquad x^* \le x_1 \le x_2 \le x_*. \tag{20}$$

Легко переконатися, що з (18) та (19) для довільного $\theta \in \mathbb{S}$ випливають нерівності

$$\hat{\Phi}_\theta(x) - d \le \Phi_\theta(x) \le \hat{\Phi}_\theta(x), \quad \check{\Phi}_\theta(x) \le \Phi_\theta(x) \le \check{\Phi}_\theta(x) + d, \quad x \in [x^*, x_*], \tag{21}$$

а також симетрична тотожність

$$\hat{\Phi}_\theta(x + d) = \check{\Phi}_\theta(x) + d, \qquad x \in [x^*, x_* - d]. \tag{22}$$

Лема 1. *Для довільного поясу $B_1 = (L_1, U_1] \subset B_0^+$ товщини $U_1 - L_1 \ge d$ його образ $F(B_1)$ також є поясом $B_2 = (L_2, U_2] \subset B_0^+$ товщини $U_2 - L_2 \ge d$. Межі поясу B_2 задовольняють рівняння*

$$U_2(\theta) = \hat{\Phi}_\theta(U_1(\theta - \rho)), \tag{23}$$

$$L_2(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L_1(\theta - \rho)) \tag{24}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Якщо контури L_1 та U_1 неперервні, то L_2 та U_2 також неперервні.

Доведення. Спочатку покажемо, що $F(B_0^+) \subset B_0^+$. Обмеження на збурення $f(\theta)$ в умові теореми можна переписати як $\nu + f(\theta) + Q_d(N_{\min}) + d \le 0$, $\nu + f(\theta) + Q_d(N_{\max}) - d \ge 0$. Іншими словами, вони означають, що проміжки $(\sigma^+_{k_{\min}+1}, \sigma^+_{k_{\min}}]$ та $[\sigma^-_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\min}+1})$ зсуваються на недодатну величину (тобто ліворуч або не рухаються), а проміжки $(\sigma^+_{k_{\max}}, \sigma^+_{k_{\max}-1}]$ та $[\sigma^-_{k_{\max}-1}, \sigma^-_{k_{\max}})$ — на невід'ємну величину (тобто праворуч або не рухаються). Оскільки це має місце для кожного $\theta \in \mathbb{S}$, то, враховуючи властивості (16), (17), переконуємося, що дійсно $F(B_0^+) \subset B_0^+$.

Розглянемо довільне $\theta \in \mathbb{S}$. Проміжок $(L_1(\theta - \rho), U_1(\theta - \rho)]$ покриває кілька послідовних точок розриву σ_k^+, $k_1 \le k \le k_2$ (можливо, не покриває жодної), а отже, поділяється ними на декілька підпроміжків, що зсуваються жорстко під дією Φ_θ на різні відстані. З нерівності (11) та умови $U_1 - L_1 \ge d$ випливає, що спільна довжина будь-яких двох сусідніх таких підпроміжків є не меншою за d. Оскільки ці два сусідні підпроміжки дія Φ_θ зсуває один відносно одного назустріч на величину d, то між їхніми образами не може утворитися щілина, а тому їхнє об'єднання є (піввідкритим) проміжком довжини не меншої за d. Оскільки це має місце для кожної пари сусідніх підпроміжків, то це правильно і для всього їхнього набору в цілому, отже,

$$F\Big(\{\theta - \rho\} \times \big(L_1(\theta - \rho), U_1(\theta - \rho)\big]\Big) = \{\theta\} \times \big(L_2(\theta), U_2(\theta)\big]$$

для певних значень $U_2(\theta)$, $L_2(\theta)$ таких, що $U_2(\theta) - L_2(\theta) \ge d$. Рівняння (23) та (24) випливають з означень верхньої $\hat{\Phi}_\theta$ та нижньої $\check{\Phi}_\theta$ зрізок. Твердження щодо неперервності випливає з рівнянь (23), (24) та неперервності $\hat{\Phi}_\theta(x)$ і $\check{\Phi}_\theta(x)$ за двома змінними.

Лему 1 доведено.

З леми 1 випливає, що запропонована вище конструкція щодо послідовності поясів $B_n^+ = (L_n^+, U_n^+]$, $n \ge 0$, де $B_0^+ = \mathbb{S} \times (\sigma^+_{k_{\max}}, \sigma^+_{k_{\min}}]$, а $B_n^+ = F(B_{n-1}^+)$, є коректною, в ній насправді має місце вкладення $B_n^+ \subset B_{n-1}^+$ (для $n = 1$ за лемою, а далі за індукцією), до того ж межові контури поясів задовольняють для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ співвідношення

$$U_n^+(\theta) = \hat{\Phi}_\theta(U_{n-1}^+(\theta - \rho)), \tag{25}$$

$$L_n^+(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L_{n-1}^+(\theta - \rho)) \tag{26}$$

і обмеження знизу на товщину

$$\Delta_n^+(\theta) = U_n^+(\theta) - L_n^+(\theta) \ge d. \tag{27}$$

Монотонні обмежені послідовності контурів $U_n^+ \downarrow$, $n \ge 0$, та $L_n^+ \uparrow$, $n \ge 0$, мають поточкові межі — контури U_{a} та L_{a} відповідно. Таким чином побудовано межовий пояс $B_{\mathrm{a}} = [L_{\mathrm{a}}, U_{\mathrm{a}}) \subset B_0^+$. Використовуючи граничний перехід у (25)–(27), для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ отримуємо рівності

$$U_{\mathrm{a}}(\theta) = \hat{\Phi}_\theta(U_{\mathrm{a}}(\theta - \rho)), \tag{28}$$

$$L_{\mathrm{a}}(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)) \tag{29}$$

та оцінку знизу на товщину $\Delta_{\mathrm{a}}(\theta) = U_{\mathrm{a}}(\theta) - L_{\mathrm{a}}(\theta) \geq d$.

Згідно з лемою 1, з тотожностей (28), (29) випливає, що $F(B_{\mathrm{a}}) = B_{\mathrm{a}}$, тобто пояс B_{a} є інваріантним.

Неперервність контурів U_{a} та L_{a} доводиться аналогічно тому, як це зроблено щодо контуру U_+ у доведенні твердження 2, лише замість (9) слід розглянути (28) та (29), а замість (7) — умови нерозтягнення з (20) щодо $\hat{\Phi}_\theta$ та $\check{\Phi}_\theta$ відповідно.

Послідовно застосувавши (28), (29), (22) та (20), одержимо

$$\Delta_{\mathrm{a}}(\theta) = \hat{\Phi}_\theta(U_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)) - \check{\Phi}_\theta(L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)) =$$

$$= d + \check{\Phi}_\theta(U_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)-d) - \check{\Phi}_\theta(L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)) \leq \Delta_{\mathrm{a}}(\theta-\rho) \tag{30}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$.

Нехай $\theta^* \in \mathbb{S}$ — точка максимуму (неперервної та обмеженої) функції Δ_{a}. Внаслідок нерівності (30) маємо $\Delta_{\mathrm{a}}(\theta^*-m\rho) = \max\limits_{\theta\in\mathbb{S}} \Delta_{\mathrm{a}}(\theta)$ для всіх $m \geq 0$. Оскільки множина точок $\{\theta^* - m\omega | m \geq 0\}$ є щільною в $\mathbb{S}$, а товщина $\Delta_{\mathrm{a}} = U_{\mathrm{a}} - L_{\mathrm{a}}$ поясу B_{a}, як ми тільки що довели, є неперервною, то вона є сталою.

З цього факту випливає, що нерівність (30) насправді є рівністю, отже,

$$\check{\Phi}_\theta(U_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)-d) - \check{\Phi}_\theta(L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)) = (U_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)-d) - L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho) \tag{31}$$

для кожного $\theta \in \mathbb{S}$. Якщо ми припустимо, що $\Delta_{\mathrm{a}} > d$, то для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ матимемо $U_{\mathrm{a}}(\theta - -\rho) - d > L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)$, і з огляду на (19) рівність (31) може виконуватися лише тоді, коли обидві величини $U_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)-d$ та $L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)$ належать одному й тому ж самому лінійному куску функції $\check{\Phi}_\theta$ з нахилом 1. Внаслідок неперервності $\check{\Phi}_\theta$, U_{a} та L_{a} по θ цей лінійний кусок є одним і тим самим для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, отже, $L_{\mathrm{a}}(\theta) = \check{\Phi}_\theta(L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho)) = L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho) + +\nu + f(\theta) + kd$ з одним і тим самим k для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Зінтегрувавши останню рівність по колу $\mathbb{S}$, отримаємо $\nu + kd = 0$, що суперечить припущенню теореми про нецілість ν/d. Ця суперечність доводить, що $\Delta_{\mathrm{a}} = d$ на всьому колі, тобто

$$U_{\mathrm{a}}(\theta) = L_{\mathrm{a}}(\theta) + d, \quad \theta \in \mathbb{S}. \tag{32}$$

Тепер покажемо, що інваріантний пояс B_{a} рівномірно поглинає усі траєкторії з поясу B_0^+, тобто існує таке натуральне K^+, що кожна траєкторія з початковою точкою в B_0^+ через не більше ніж K^+ кроків потрапить в B_{a}. Для цього розглянемо динаміку траєкторій в B_0^+ відносно меж B_{a}. Насамперед зауважимо, що якби жодна з ліній розриву $\mathbb{S}\times\{\sigma_k^+\}$, $k_{\min} < k < k_{\max}$, не перетинала внутрішність поясу B_{a}, то з (29) та (19) випливало б, що $L_{\mathrm{a}}(\theta) = L_{\mathrm{a}}(\theta-\rho) + \nu + f(\theta) + kd$ з одним і тим самим k для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, неможливість чого ми щойно довели. Отже, існують $k_{\min} < k^+ < k_{\max}$ та замкнений відрізок $I^+ \subset \mathbb{S}$ ненульової довжини такі, що $\sigma_{k^+}^+ \in \big(L_{\mathrm{a}}(\theta), L_{\mathrm{a}}(\theta)+d\big)$ для всіх $\theta \in I^+$. Згідно з (11), жодна з інших точок розриву, відмінних від $\sigma_{k^+}^+$, відрізку $[L_{\mathrm{a}}(\theta), U_{\mathrm{a}}(\theta)]$ при $\theta \in I^+$ належати не може. Позначимо $d^+ = \min_{\theta\in I^+}\{\sigma_{k^+}^+ - L_{\mathrm{a}}(\theta), U_{\mathrm{a}}(\theta) - \sigma_{k^+}^+\} > 0$.

Нехай $x \in (\sigma_{k_{\max}}^+, L(\theta)]$ при деякому $\theta \in \mathbb{S}$. Послідовно застосовуючи (32), (21), (29) та (20), отримуємо $U_{\mathrm{a}}(\theta+\rho) - \Phi_{\theta+\rho}(x) = L_{\mathrm{a}}(\theta+\rho) - (\Phi_{\theta+\rho}(x) - d) \geq L_{\mathrm{a}}(\theta+\rho) - \check{\Phi}_{\theta+\rho}(x) =$

$= \check{\Phi}_{\theta+\rho}(L_{\rm a}(\theta)) - \check{\Phi}_{\theta+\rho}(x) \ge 0$. З іншого боку, з наведених формул випливає $U_{\rm a}(\theta+\rho) - \Phi_{\theta+\rho}(x) = d + L_{\rm a}(\theta+\rho) - \Phi_{\theta+\rho}(x) \le d + \check{\Phi}_{\theta+\rho}(L_{\rm a}(\theta)) - \check{\Phi}_{\theta+\rho}(x) \le d + L_{\rm a}(\theta) - x = U_{\rm a}(\theta) - x$. В результаті маємо $0 \le U_{\rm a}(\theta+\rho) - \Phi_{\theta+\rho}(x) \le U_{\rm a}(\theta) - x$, а це означає, що якщо точка $(\theta, x) \in B_0^+$ лежить нижче за інваріантний пояс $B_{\rm a}$, то її образ $F(\theta, x) = (\theta+\rho, \Phi_{\theta+\rho}(x))$ не може ані віддалитися від $B_{\rm a}$, ані перестрибнути через нього вгору.

Нехай тепер $x \in (\sigma^+_{k_{\max}}, L(\theta)]$ для деякого $\theta \in I^+$. Згідно з (29) та (19) маємо $L_{\rm a}(\theta+\rho) = \check{\Phi}_{\theta+\rho}(L_{\rm a}(\theta)) = \sigma^+_{k^+} + \nu + f(\theta+\rho) + k^+ d - d = \Phi_{\theta+\rho}(\sigma^+_{k^+}) - d$. Тому, враховуючи, що $x \le L(\theta) < \sigma^+_{k^+}$, внаслідок (14) отримуємо нерівність $L_{\rm a}(\theta+\rho) - \Phi_{\theta+\rho}(x) = \Phi_{\theta+\rho}(\sigma^+_{k^+}) - \Phi_{\theta+\rho}(x) - d \le \sigma^+_{k^+} - x - d = (L_{\rm a}(\theta) - x) - (U_{\rm a}(\theta) - \sigma^+_{k^+}) \le (L_{\rm a}(\theta) - x) - d^+$, яка означає, що якщо точка $(\theta, x) \in B_0^+$ лежить нижче за інваріантний пояс $B_{\rm a}$, причому $\theta \in I^+$, то її образ $F(\theta, x) = (\theta+\rho, \Phi_{\theta+\rho}(x))$ або потрапляє до $B_{\rm a}$, або наближається до нього принаймні на $d^+ > 0$.

Аналогічні міркування доводять, що якщо точка $(\theta, x) \in B_0^+$ лежить вище за інваріантний пояс $B_{\rm a}$, то її образ $F(\theta, x)$ не може ані віддалитися від $B_{\rm a}$, ані перестрибнути через нього вниз, а якщо додатково відомо, що $\theta \in I^+$, то цей образ або потрапляє до $B_{\rm a}$, або наближається до нього принаймні на $d^+ > 0$.

Оскільки ρ ірраціональне, то існує таке $m^+ \ge 1$, що $\bigcup_{m=1}^{m^+}(I^+ - m\rho) = \mathbb{S}$, отже, серед кожних послідовних m^+ точок довільної траєкторії знайдеться принаймні одна, координата θ якої належить відрізку I^+. Тому через m^+ кроків будь-яка траєкторія в B_0^+ або потрапить до інваріантного поясу $B_{\rm a}$, або наблизиться до нього принаймні на $d^+ > 0$. Отже, через $K^+ = ([(x_* - x^*)/d^+] + 1)m^+$ кроків будь-яка траєкторія з початковою точкою в B_0^+ напевно потрапить до $B_{\rm a}$, де і залишиться назавжди. Зокрема, звідси випливає, що побудована нами послідовність поясів B_n^+, $n \ge 0$, насправді є фінітною: $B_n^+ = B_{\rm a}$ для всіх $n \ge K^+$.

Наступна побудова стосується проміжку $[x_*, x^* + 1]$. Зауважимо, що обмеження F на $B_0^- = \mathbb{S} \times [\sigma^-_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\max}})$ є ін'єкцією, оскільки Φ_θ строго зростає на $[x_*, x^* + 1]$ для кожного $\theta \in \mathbb{S}$. Природно означити, виходячи з функції Φ_θ, її *розширену обернену* функцію $\bar{\Phi}_\theta$ на проміжку $[\Phi_\theta(x_*), \Phi_\theta(x^*) + 1]$ (який для кожного $\theta \in \mathbb{S}$ включає в себе $[x_*, x^* + 1]$ внаслідок обмежень на $f(\theta)$) таким чином:

$$\bar{\Phi}_\theta(y) = \sup\{x \in [x_*, x^* + 1] \,|\, \Phi_\theta(x) \le y\} = \inf\{x \in [x_*, x^* + 1] \,|\, \Phi_\theta(x) \ge y\},$$

$$y \in [\Phi_\theta(x_*), \Phi_\theta(x^*) + 1], \quad \theta \in \mathbb{S}$$

(зрозуміло, що записані супремум та інфімум мають одне й те саме значення внаслідок зростання Φ_θ).

В явному вигляді ця функція записується таким чином:

$$\bar{\Phi}_\theta(y) = \begin{cases} \sigma_k^- \quad \text{для} \quad y \in [\sigma_k^- + \nu + f(\theta) + kd - d, \sigma_k^- + \nu + f(\theta) + kd], k_{\min} \le k \le k_{\max}, \\ \Phi_\theta^{-1}(y) \quad \text{для решти} \quad y \in [\Phi_\theta(x_*), \Phi_\theta(x^*) + 1]. \end{cases} \tag{33}$$

Кажучи словами, розширена обернена функція $\bar{\Phi}_\theta$ дорівнює оберненій функції Φ_θ^{-1} на проміжках, на яких та існує, а між цими проміжками є сталою. Легко бачити, що вираз $\bar{\Phi}_\theta(y)$ є неперервним за двома змінними (θ, y), до того ж для кожного фіксованого $\theta \in \mathbb{S}$

функція $\bar{\Phi}_\theta$ є кусково-лінійною, складаючись з кусків нахилу 1 та 0 почергово, а отже, задовольняє умови неспадання та нерозтягнення

$$0 \leq \bar{\Phi}_\theta(y_2) - \bar{\Phi}_\theta(y_1) \leq y_2 - y_1 \quad \text{для всіх} \quad \Phi_\theta(x_*) \leq y_1 \leq y_2 \leq \Phi_\theta(x^*) + 1. \tag{34}$$

Лема 2. *Для довільного поясу $B_1 = [L_1, U_1) \subset B_0^-$, $U_1 - L_1 \geq 0$, його прообраз $F^{-1}(B_1)$ також є поясом $B_2 = [L_2, U_2) \subset B_0^-$, $U_2 - L_2 \geq 0$. Межі поясу B_2 задовольняють рівняння*

$$U_2(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(U_1(\theta+\rho)), \tag{35}$$

$$L_2(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(L_1(\theta+\rho)) \tag{36}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Якщо контури L_1 та U_1 неперервні, то L_2 та U_2 також неперервні.

Доведення. Спочатку покажемо, що $F^{-1}(B_0^-) \subset B_0^-$. Властивості (16), (17) разом із доведеним в лемі 1 фактом $F^{-1}(B_0^+) \subset B_0^+$ свідчать про те, що $\Phi_\theta((-\infty, \sigma^+_{k_{\min}}] \cup (\sigma^+_{k_{\max}} + 1, +\infty)) \subset \mathbb{R} \backslash [\sigma^-_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\max}})$. З обмежень на збурення $f(\theta)$ в умові теореми випливає, що проміжок $(\sigma^+_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\min}})$ під дією Φ_θ зсувається ліворуч або не рухається, а проміжок $[\sigma^-_{k_{\max}}, \sigma^+_{k_{\max}} + 1]$ — праворуч або не рухається, отже, $\Phi_\theta((\sigma^+_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\min}}) \cup [\sigma^-_{k_{\max}}, \sigma^+_{k_{\max}} + 1]) \subset \subset \mathbb{R} \backslash [\sigma^-_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\max}})$. Об'єднуючи ці властивості, одержуємо $\Phi_\theta(\mathbb{R} \backslash [\sigma^-_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\max}})) \subset \mathbb{R} \backslash [\sigma^-_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\max}})$. Оскільки це має місце для кожного $\theta \in \mathbb{S}$, то $F((\mathbb{S} \times \mathbb{R}) \backslash B_0^-) \subset (\mathbb{S} \times \mathbb{R}) \backslash B_0^-$, звідки $F^{-1}(B_0^-) \subset B_0^-$.

Легко перевірити, що $\Phi_\theta^{-1}\big([y_1, y_2)\big) = [\bar{\Phi}_\theta(y_1), \bar{\Phi}_\theta(y_2))$ для будь-яких $x_* \leq y_1 \leq y_2 \leq \leq x^* + 1$ за означенням $\bar{\Phi}_\theta$. Головне твердження леми випливає з формули

$$F^{-1}(B_1) = \bigcup_{\theta \in \mathbb{S}} \{\theta\} \times \Phi^{-1}_{\theta+\rho}\big([L_1(\theta+\rho), U_1(\theta+\rho))\big).$$

Твердження щодо неперервності випливає з рівнянь (35), (36) та неперервності $\bar{\Phi}_\theta(y)$ за двома змінними.

Лему 2 доведено.

З леми 2 випливає, що запропонована вище конструкція щодо послідовності поясів $B_n^- = [L_n^-, U_n^-)$, $n \geq 0$, де $B_0^- = \mathbb{S} \times [\sigma^-_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\max}})$, а $B_n^- = F^{-1}(B_{n-1}^-)$, є коректною, в ній насправді має місце вкладення $B_n^- \subset B_{n-1}^-$ (для $n = 1$ за лемою, а далі за індукцією), до того ж межові контури поясів задовольняють співвідношення

$$U_n^-(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(U_{n-1}^-(\theta+\rho)), \tag{37}$$

$$L_n^-(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(L_{n-1}^-(\theta+\rho)) \tag{38}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ (але на відміну від (27) додатного обмеження знизу на товщину

$$\Delta_n^-(\theta) = U_n^-(\theta) - L_n^-(\theta) \geq 0 \tag{39}$$

немає, тобто пояси B_n^- можуть бути виродженими). В термінах динамічної системи сенс цих поясів є таким: якщо точка $(\theta, \phi) \in B_0^-$ не належить поясу B_n^-, то її образ $F(\theta, \phi)$ не належить поясу B_{n-1}^-, $n \geq 1$.

Монотонні обмежені послідовності контурів $U_n^- \downarrow$, $n \geq 0$, та $L_n^- \uparrow$, $n \geq 0$, мають поточкові межі — контури U^- та L^- відповідно. Таким чином побудовано межовий пояс $B^- = [L^-, U^-) \subset B_0^-$. Використовуючи граничний перехід у (37)–(39), для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ отримуємо рівності

$$U^-(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(U^-(\theta+\rho)), \tag{40}$$

$$L^-(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(L^-(\theta+\rho)) \tag{41}$$

та нерівність $\Delta^- = U^- - L^- \geq 0$.

Згідно з лемою 2, з тотожностей (40), (41) випливає $F^{-1}(B^-) = B^-$.

Неперервність контурів U^- та L^- доводиться знову ж таки аналогічно тому, як це зроблено щодо контуру U_+ у доведенні твердження 2, лише замість (9) слід розглянути (40) та (41), а замість (7) — умови нерозтягнення з (34) щодо $\bar{\Phi}_\theta$.

Щодо товщини поясу B^- зі співвідношень (40), (41) та (34) випливає, що $\Delta^-(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(U^-(\theta+\rho)) - \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(L^-(\theta+\rho)) \leq U^-(\theta+\rho) - L^-(\theta+\rho)$ для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, а отже, Δ^- є сталою на колі; доведення цього аналогічне доведенню сталості Δ_{a}. З цього безпосередньо випливає, що

$$\bar{\Phi}_\theta(U^-(\theta)) - \bar{\Phi}_\theta(L^-(\theta)) = U^-(\theta) - L^-(\theta) \tag{42}$$

для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Якщо припустити, що $\Delta^- > 0$, то рівність (42) може виконуватися лише у випадку, коли точки $U^-(\theta)$ і $L^-(\theta)$ належать одному й тому самому лінійному кускові $\bar{\Phi}_\theta$ з нахилом 1. Оскільки $\bar{\Phi}_\theta$, U^- та L^- неперервні по θ, цей лінійний кусок є одним і тим самим для всіх $\theta \in \mathbb{S}$, тому $L^-(\theta-\rho) = L^-(\theta) - \nu - f(\theta) - kd$ з одним і тим самим k для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Зінтегрувавши останню рівність по колу $\mathbb{S}$, отримаємо $\nu + kd = 0$, що суперечить припущенню теореми про нецілість ν/d. Ця суперечність доводить, що $\Delta^- = 0$ на всьому колі, тобто $U^- = L^-$, і пояс B^- є повністю виродженим (порожньою множиною). Покладемо $C_{\mathrm{r}} = U^- = L^-$, тоді для цього неперервного контуру рівняння (40), (41) набирають вигляду

$$C_{\mathrm{r}}(\theta) = \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(C_{\mathrm{r}}(\theta+\rho)), \quad \theta \in \mathbb{S}. \tag{43}$$

Тепер покажемо, що траєкторії рівномірно виштовхуються з поясу B_0^-, тобто існує таке натуральне K^-, що кожна траєкторія з початковою точкою в B_0^- через не більше ніж K^- кроків залишить B_0^- назавжди. Для цього розглянемо динаміку траєкторій в B_0^- відносно контуру C_{r}. Ми щойно показали, що $C_{\mathrm{r}}(\theta)$ не може належати одному й тому самому лінійному куску $\bar{\Phi}_\theta$ з нахилом 1 для всіх $\theta \in \mathbb{S}$. Отже, знайдуться $k_{\min} < k^- < k_{\max}$ та замкнений відрізок $I^- \subset \mathbb{S}$ ненульової довжини такі, що $C_{\mathrm{r}}(\theta) \in (\sigma_{k^-}^- + \nu + f(\theta) + k^- d - d, \sigma_{k^-}^- + \nu + f(\theta) + k^- d)$ для всіх $\theta \in I^-$. Позначимо $d^- = \min_{\theta \in I^+}\{C_{\mathrm{r}}(\theta) - \sigma_{k^-}^- - \nu - f(\theta) - k^- d + d, \sigma_{k^-}^- + \nu + f(\theta) + k^- d - C_{\mathrm{r}}(\theta)\} > 0$.

З рівняння (43) та нерівностей (34) легко вивести (як і у випадку для B_{a}), що якщо точка $(\theta+\rho, x) \in B_0^-$ лежить вище (нижче) за контур C_{r}, то її „майже прообраз" $(\theta, \bar{\Phi}_{\theta+\rho}(x)) \in B_0^-$ не може ані перестрибнути через контур C_{r} вниз (вгору), ані віддалитися від нього, а якщо додатково відомо, що $\theta + \rho \in I^-$, то цей майже прообраз або потрапляє на C_{r}, або наближається до нього принаймні на $d^- > 0$. Внаслідок ірраціональності

ρ існує таке натуральне m^-, що серед m^- послідовних точок будь-якої траєкторії знайдеться принаймні одна, координата θ якої належить відрізку $\theta \in I^-$. З нашої побудови випливає, що послідовність поясів B_n^- є фінітною: $B_n^- = [C_\mathrm{r}, C_\mathrm{r}) = \varnothing$ для всіх $n \geq K^- = ([(x^* + 1 - x_*)/d^-] + 1)m^-$. В термінах відображення F це означає, що $F^{-K^-}(B_0^-) = \varnothing$, отже, через K^- кроків будь-яка траєкторія з початковою точкою в B_0^- залишить цей пояс назавжди.

Оскільки $\bar{\Phi}_\theta$ не спадає, то з (37), (38) випливає наступне: якщо точка лежить в B_0^- нижче (вище) за пояс B_n^-, то її образ лежить нижче (вище) за пояс B_{n-1}^-, $n \geq 1$. З цього випливає, що кожна точка, що лежить в B_0^- нижче (вище) за контур C_r, через не більш ніж K^- кроків лежатиме нижче (вище) за пояс B_0^-. Враховуючи 1-періодичність динамічної системи по x (та властивості (12), (13), які не дозволяють точці перестрибнути через поглинаючий пояс), робимо висновок, що кожна точка, яка стартувала з поясу $[C_\mathrm{r} - 1, C_\mathrm{r})$, через не більш ніж K^- кроків потрапить до множини $\mathbb{S} \times \big([\sigma^-_{k_{\max}} - 1, \sigma^+_{k_{\max}}] \cup$ $\cup (\sigma^+_{k_{\max}}, \sigma^+_{k_{\min}}] \cup (\sigma^+_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\min}})\big)$. Оскільки внаслідок обмежень на $f(\theta)$ для кожного $\theta \in \mathbb{S}$ проміжок $[\sigma^-_{k_{\max}} - 1, \sigma^+_{k_{\max}}]$ зсувається функцією Φ_θ праворуч не менш ніж на d, а проміжок $(\sigma^+_{k_{\min}}, \sigma^-_{k_{\min}})$ — ліворуч не менш ніж на d, то через не більш ніж $K^0 =$ $= [\max\{\sigma^+_{k_{\max}} - \sigma^-_{k_{\max}} + 1, \sigma^-_{k_{\min}} - \sigma^+_{k_{\min}}\}/d] + 1$ кроків будь-яка точка зі згаданої вище множини потрапить до поясу $B_0^+ = \mathbb{S} \times (\sigma^+_{k_{\max}}, \sigma^+_{k_{\min}}]$, звідки в свою чергу через не більш ніж K^+ кроків опиниться всередині інваріантного поглинаючого поясу B_a.

Таким чином, твердження теореми щодо рівномірного поглинання траєкторій з поясу $[C_\mathrm{r} - 1, C_\mathrm{r})$ поясом B_a доведено з $K = K^- + K^0 + K^+$.

Поклавши $\xi(\theta, x) = x - L_\mathrm{a}(\theta) \bmod d$, легко переконатися, що в координатах (θ, ξ) обмеження відображення F на інваріантний поглинаючий пояс B_a дійсно є косим зсувом на двовимірному торі $\mathbb{S} \times (d\mathbb{S})$ вигляду $(\theta, \xi) \mapsto (\theta + \rho, \xi + \phi(\theta))$ з неперервною функцією $\phi : \mathbb{S} \to (d\mathbb{S})$, яку можна описати таким чином. Якщо для даного $\theta \in \mathbb{S}$ на інтервалі $(L_\mathrm{a}(\theta), L_\mathrm{a}(\theta) + d)$ лежить якесь σ_k^+, $k_{\min} < k < k_{\max}$ (а воно тоді єдине внаслідок (11)), то $\phi(\theta) = L_\mathrm{a}(\theta) + d - \sigma_k^+ (\bmod d)$; якщо ж не лежить жодного, то $\phi(\theta) = 0 (\bmod d)$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай $k_* = [-(\nu + f_{\max})/d]$, $k^* = -[(\nu + f_{\min})/d] + 1$, де $f_{\max} =$ $= \max_{\theta \in \mathbb{S}} f(\theta)$, $f_{\min} = \min_{\theta \in \mathbb{S}} f(\theta)$ (при цьому маємо $k_{\min} \leq k_* < k^* \leq k_{\max}$). Неважко довести наступні нерівності (що є важливими для прикладних застосувань оцінками зверху та знизу множини значень координати x у стаціонарному стані системи):

$$\sigma^+_{k^*} < L_\mathrm{a} < U_\mathrm{a} < \sigma^+_{k_*}, \quad \sigma^-_{k_*} < C_\mathrm{r} < \sigma^-_{k^*}.$$

Дійсно, k_* та k^* — відповідно найбільше та найменше цілі числа такі, що для всіх $\theta \in \mathbb{S}$ мають місце обмеження $f(\theta) \in [-k^* d + d - \nu, -k_* d - \nu]$, тобто $\nu + f(\theta) + k^* d - d \geq 0$, $\nu + f(\theta) + k_* d \leq 0$, а отже, кожна точка з проміжку $[\sigma^-_{k^*} - 1, \sigma^+_{k^*}]$ зсувається функцією Φ_θ праворуч не менш ніж на d, а кожна точка з проміжку $(\sigma^+_{k_*}, \sigma^-_{k_*})$ — ліворуч не менш ніж на d, з чого випливає, що суцільні множини $\mathbb{S} \times [\sigma^-_{k^*} - 1, \sigma^+_{k^*}]$ та $\mathbb{S} \times (\sigma^+_{k_*}, \sigma^-_{k_*})$ не можуть, згідно з нашою побудовою, перетинатися ані з інваріантним поглинаючим поясом B_a, ані з відштовхуючим контуром C_r.

Зауваження 2. Можна показати, що побудовані контури U_a, L_a та C_r є насправді єдиними неперервними розв'язками функціональних рівнянь (28), (29) та (43) відповідно.

1. *Теплінський О. Ю.* Відображення зсуву інтервалів як об'єднавчий підхід до вивчення динаміки ряду моделей дискретизованих електронних пристроїв // Доп. НАН України. — 2008. — № 12. — С. 40 – 45.
2. *Teplinsky A., Condon E., Feely O.* Driven interval shift dynamics in sigma-delta modulators and phase-locked loops // IEEE Trans. Circ. and Systems. Pt I. — 2005. — **52**, № 6. — P. 1224 – 1235.
3. *Теплінський О. Ю.* Граничний абсорбуючий пояс для квазіперіодично керованого відображення зсуву відрізків // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 3. — С. 408 – 417.
4. *Teplinsky A., Feely O., Rogers A.* Phase-jitter dynamics of digital phase-locked loops // IEEE Trans. Circ. and Systems. Pt I. — 1999. — **46**, № 5. — P. 545 – 558.
5. *Teplinsky A., Feely O.* Phase-jitter dynamics of digital phase-locked loops. Part II // Ibid. — 2000. — **47**, № 4. — P. 458 – 472.
6. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. — Киев: Наук. думка, 1989. — 216 с.

Одержано 16.02.09