УДК 517.9

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЛІНІЙНИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ*

Н. Л. Денисенко

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 03056, Київ, просп. Перемоги, 37
e-mail: natalia_den@bigmir.net

Sufficient conditions for existence of periodic solutions of systems of linear and nonlinear differential-functional equations with linear deviations of the argument have been established and their properties have been studied.

Установлены достаточные условия существования периодических решений систем линейных и нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с линейными отклонениями аргумента и исследованы их свойства.

Різні частинні випадки систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)\big), \tag{1}$$

де $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, f — деяка вектор-функція розмірності n, досліджувались багатьма математиками і на сьогодні низку питань їх теорії досить добре вивчено (див. [1–7] і наведену там бібліографію). Наприклад, в [1] достатньо повно досліджено асимптотичні властивості розв'язків лінійного скалярного рівняння ($n = 1$), в [3] одержано достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, в [4] досліджено питання існування неперервних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків лінійних систем рівнянь з лінійно перетвореним аргументом, в [5] — асимптотичні властивості неперервно диференційовних і обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків систем лінійних та нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу. У даній роботі досліджується існування періодичних розв'язків деяких класів систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду (1) та вивчаються їх властивості.

1. Розглянемо систему диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i(t) x(\lambda_i t) + f(t) \tag{2}$$

у випадку, коли $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,k}$, $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, Λ — стала дійсна $(n \times n)$-матриця, $B_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, — дійсні матричні T-періодичні функції розмірності $n \times n$, $f(t)$ — дійсна

* Частково підтримано проектом Ф25.1/021.

T-періодична векторна функція розмірності n, тобто

$$B_i(t+T) \equiv B_i(t), \quad i = \overline{1,k}, \quad f(t+T) \equiv f(t).$$

Позначимо через μ_i, $i = \overline{1,n}$, власні значення матриці Λ і припустимо, що вони задовольняють умову $\operatorname{Re}\mu_i(\Lambda) \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. Тоді існує неособлива матриця C, яка приводить матрицю Λ до вигляду

$$\Lambda = C^{-1}\operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)C,$$

де Λ_1, Λ_2 — сталі матриці розмірності $p \times p$ і $(n-p)\times(n-p)$, власні значення яких задовольняють умови

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\mu_i(\Lambda_1) < 0, \quad i = 1,\ldots,p, \\ \operatorname{Re}\mu_i(\Lambda_2) > 0, \quad i = p+1,\ldots,n \quad (0 < p \leq n). \end{gathered} \tag{3}$$

Для дослідження питання про існування T-періодичних розв'язків системи рівнянь (2) виконаємо перетворення

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t) + y(t), \tag{4}$$

де $y(t) \in C^0$, C^0 — простір неперервних T-періодичних вектор-функцій з нормою $\|y(t)\| = \max_t |y(t)|$. Внаслідок (3) із (4) безпосередньо випливає, що $x(t)$ визначається єдиним чином за допомогою співвідношення

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y(\tau)d\tau, \tag{5}$$

де

$$G(t) = \begin{cases} C^{-1}\operatorname{diag}(e^{\Lambda_1 t}, 0)C & \text{при} \quad t > 0, \\ -C^{-1}\operatorname{diag}(0, e^{\Lambda_2 t})C & \text{при} \quad t < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Неважко показати, що для матричної функції $G(t) = (g_{ij}(t))$ виконуються наступні умови:

а) $G(+0) - G(-0) = E$, де E — одинична матриця розмірності $n \times n$;

б) $|G(t)| \leq Ke^{-\alpha|t|}$ при всіх $t \neq 0$, де $K > 0$, $\alpha > 0$ і $|G| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |g_{ij}|$;

в) $\dot{G} = \Lambda G$, $t \neq 0$.

Оскільки

$$\dot{x}(t) = y(t) + \Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y(\tau)d\tau,$$

то в результаті перетворення (4) система рівнянь (2) набирає вигляду

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} B_i(t) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i t - \tau) y(\tau) d\tau + f(t)$$

або

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} B_i(t) \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i (t - \tau)) y(\lambda_i \tau) d\tau + f(t). \tag{7}$$

Для системи рівнянь (7) має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) власні значення $\mu_i, i = \overline{1,n}$, матриці Λ такі, що має місце (3);

2) всі елементи матриць $B_i(t), i = \overline{1,k}$, і вектора $f(t)$ є неперервними, T-періодичними при $t \in \mathbb{R}$ функціями і

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |B_i(t)| \leq b_i < \infty, \quad i = \overline{1,k}, \quad \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \leq f^* < \infty;$$

3) має місце співвідношення

$$\frac{2K}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} b_i < 1. \tag{8}$$

Тоді існує єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $\gamma = \gamma(t)$ системи рівнянь (7).

Доведення. Побудуємо розв'язок системи рівнянь (7) за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо формулами

$$\begin{aligned} y_0(t) &= f(t), \\ y_m(t) &= \sum_{i=1}^{k} B_i(t) \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_i (t - \tau)) y_{m-1}(\lambda_i \tau) d\tau, \quad m = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{9}$$

Покажемо спочатку, що при всіх $m = 1, 2, \ldots, t \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq N \theta^{m-1}, \tag{10}$$

де

$$N := f^* \left(\frac{2K}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} b_i + 1 \right), \quad \theta := \frac{2K}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Справді, на підставі умов теореми маємо

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \sum_{i=1}^{k} |B_i(t)|\lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))||y_0(\lambda_i\tau)|d\tau + |f(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} b_i\lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|} f^* d\tau + f^* \leq f^* \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\lambda_i \frac{2K}{\alpha\lambda_i} + 1 \right) \leq$$

$$\leq f^* \left(\frac{2K}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} b_i + 1 \right),$$

тобто при $m = 1$ оцінка (10) має місце. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (10) доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми, із (9) одержуємо

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq \sum_{i=1}^{k} |B_i(t)|\lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))||y_m(\lambda_i\tau) - y_{m-1}(\lambda_i\tau)|d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} b_i\lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|} N\theta^{m-1} d\tau \leq N\theta^{m-1} \sum_{i=1}^{k} b_i\lambda_i \frac{2K}{\alpha\lambda_i} = N\theta^m.$$

Цим доведено, що оцінка (10) має місце для довільного $m \geq 1$.

Таким чином, усі наближення $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, мають сенс, є неперервними T-періодичними вектор-функціями (випливає з (9)) і для них справджується оцінка (10). Внаслідок (8) і (10) ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (y_m(t) - y_{m-1}(t))$$

рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $\gamma(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (7) (це легко показати, якщо в (9) перейти до границі при $m \to +\infty$).

Покажемо, що система рівнянь (7) не має інших неперервних T-періодичних розв'язків. Справді, нехай існує ще один неперервний T-періодичний розв'язок $\overline{\gamma}(t)$ системи рівнянь (7) і $\gamma(t) \neq \overline{\gamma}(t)$. Тоді

$$|\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)| \leq \sum_{i=1}^{k} b_i\lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))||\gamma(\lambda_i\tau) - \overline{\gamma}(\lambda_i\tau)|d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2K}{\alpha} \sum_{i=1}^{k} b_i \max_t |\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)|.$$

Отже,

$$\|\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)\| \leq \theta \|\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)\|.$$

Одержане співвідношення може мати місце лише у випадку, коли $\theta \geq 1$, що суперечить зробленому припущенню. Цим доведено, що вектор-функція $\gamma(t)$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (7).

Теорему доведено.

Враховуючи теорему 1 і співвідношення (4), (5), знаходимо, що вектор-функція $\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\gamma(\tau)d\tau$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (2).

Продовжуючи дослідження неперервно диференційовних розв'язків системи рівнянь (2), виконаємо в (2) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \overline{x}(t), \tag{11}$$

де $\overline{x}(t)$ — T-періодичний розв'язок цієї системи рівнянь.

Тоді дослідження системи рівнянь (2) зводиться до дослідження системи

$$\dot{y}(t) = \Lambda y(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i(t) y(\lambda_i t), \tag{12}$$

для якої має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і співвідношення**

$$\frac{2K}{\alpha - \alpha_*} \sum_{i=1}^{k} b_i < 1, \tag{13}$$

де $0 < \alpha_* < \alpha$. *Тоді справедливими є такі твердження:*

1) система рівнянь (12) має сім'ю неперервно диференційовних обмежених при $t \in [0, +\infty)$ *розв'язків* $y(t) = y(t, c)$, *де* $c = (c_1, \ldots, c_p, 0, \ldots, 0)$, c_i, $i = \overline{1, p}$, — *довільні сталі, що задовольняють умову* $\lim\limits_{t\to+\infty} |y(t, c)| = 0$;

2) система рівнянь (12) має сім'ю неперервно диференційовних обмежених при $t \in (-\infty, 0]$ *розв'язків* $y(t) = y(t, c)$, *де* $c = (0, \ldots, 0, c_{p+1}, \ldots, c_n)$, c_i, $i = \overline{p+1, n}$, — *довільні сталі, що задовольняють умову* $\lim\limits_{t\to-\infty} |y(t, c)| = 0$.

Доведення. Розв'язки системи рівнянь (12) шукатимемо у вигляді

$$y(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} y_m(t), \tag{14}$$

де $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, — деякі, поки що невідомі, функції. Підставляючи (14) в (12), отримуємо

$$\sum_{m=0}^{+\infty} y'_m(t) = \Lambda \sum_{m=0}^{+\infty} y_m(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i(t) \sum_{m=0}^{+\infty} y_m(\lambda_i t).$$

* Якщо виконується умова (13), то виконується й умова (8) і, таким чином, теорема 1 має місце.

Зрозуміло, що якщо $y_m(t)$ вибрати такими, що

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= \Lambda y_0(t), \\ y_m'(t) &= \Lambda y_m(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i(t) y_{m-1}(\lambda_i t), \quad m = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

то ряд (14) буде формальним розв'язком системи рівнянь (12). Безпосередньою підстановкою в (15) можна переконатися, що векторні функції

$$\begin{aligned} y_0(t) &= G(t)c, \quad \text{де} \quad c = (c_1, \ldots, c_p, 0, \ldots, 0), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, p}, \\ y_m(t) &= \int\limits_0^{+\infty} G(t-\tau) \sum_{i=1}^{k} B_i(\tau) y_{m-1}(\lambda_i \tau) d\tau, \quad m = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

є неперервно диференційовними при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язками відповідних систем рівнянь (15).

Доведемо, що ряд (14), члени якого визначені співідношеннями (16), рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$. Для цього достатньо показати, що при всіх $m = 0, 1, 2, \ldots, t \in \mathbb{R}^+$ виконуються співвідношення

$$|y_m(t)| \leq N\theta^m e^{-\alpha_* t}, \tag{17}$$

де

$$N := K|c|, \quad \theta := 2K \sum_{i=1}^{k} b_i \frac{1}{\alpha - \alpha_*}.$$

Справді, зважаючи на умову 1 теореми 1, маємо

$$|y_0(t)| \leq |G(t)||c| \leq Ke^{-\alpha t}|c| < K|c|e^{-\alpha_* t},$$

тобто при $m = 0$ оцінка (17) має місце. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (17) доведено для деякого $m \geq 0$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми, із (16) одержуємо

$$|y_{m+1}(t)| \le \int\limits_0^t |G(t-\tau)| \sum_{i=1}^k |B_i(\tau)||y_m(\lambda_i\tau)|d\tau +$$

$$+ \int\limits_t^{+\infty} |G(t-\tau)| \sum_{i=1}^k |B_i(\tau)||y_m(\lambda_i\tau)|d\tau \le$$

$$\le KN\theta^m \left(\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_{i=1}^k b_i e^{-\alpha_*\lambda_i\tau} d\tau + \int\limits_t^{+\infty} e^{\alpha(t-\tau)} \sum_{i=1}^k b_i e^{-\alpha_*\lambda_i\tau} d\tau \right) \le$$

$$\le KN\theta^m \left(e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha\tau} \sum_{i=1}^k b_i e^{-\alpha_*\tau} d\tau + e^{\alpha t} \int\limits_t^{+\infty} e^{-\alpha\tau} \sum_{i=1}^k b_i e^{-\alpha_*\tau} d\tau \right) \le$$

$$\le N\theta^m K \sum_{i=1}^k b_i \left(e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{(\alpha-\alpha_*)\tau} d\tau + e^{\alpha t} \int\limits_t^{+\infty} e^{-(\alpha+\alpha_*)\tau} d\tau \right) \le$$

$$\le N\theta^m K \sum_{i=1}^k b_i \left(e^{-\alpha t} \frac{e^{(\alpha-\alpha_*)t}}{\alpha-\alpha_*} + e^{\alpha t} \frac{e^{-(\alpha+\alpha_*)t}}{\alpha+\alpha_*} \right) =$$

$$= N\theta^m K \sum_{i=1}^k b_i e^{-\alpha_* t} \left(\frac{1}{\alpha-\alpha_*} + \frac{1}{\alpha+\alpha_*} \right) = N\theta^m K \sum_{i=1}^k b_i \frac{2\alpha}{\alpha^2-\alpha_*^2} e^{-\alpha_* t} \le$$

$$\le N\theta^m K \sum_{i=1}^k b_i \frac{2}{\alpha-\alpha_*} e^{-\alpha_* t} = N\theta^{m+1} e^{-\alpha_* t}.$$

Цим доведено, що оцінка (17) має місце для довільного $m \ge 0$.

Звідси безпосередньо випливає, що ряд (14) рівномірно збігається для довільного $t \in \in \mathbb{R}^+$, $|c| \le c^*$ (c^* — додатна стала) до деякої неперервної вектор-функції $y(t,c)$, яка є розв'язком системи рівнянь (12).

При цьому для вектор-функції $y(t,c)$ справджується оцінка

$$|y(t,c)| \le \sum_{m=0}^{+\infty} |y_m(t)| \le e^{-\alpha_* t} N \sum_{m=0}^{+\infty} \theta^m \le \frac{N}{1-\theta} e^{-\alpha_* t},$$

звідки випливає, що $\lim\limits_{t\to+\infty} |y(t,c)| = 0$.

Доведемо, що так побудований розв'язок $y(t)$ є неперервно диференційовним. Дійсно, із співвідношень (15) (зважаючи на (17)) отримуємо

$$|y_0'(t)| \le |\Lambda||y_0(t)| \le |\Lambda| N e^{-\alpha_* t},$$

$$|y_m'(t)| \leq |\Lambda||y_m(t)| + \sum_{i=1}^{k} |B_i(t)||y_{m-1}(\lambda_i t)| \leq$$

$$\leq |\Lambda| N\theta^m e^{-\alpha_* t} + \sum_{i=1}^{k} b_i N\theta^{m-1} e^{-\alpha_* t} \leq N\left(|\Lambda|\theta + \sum_{i=1}^{k} b_i\right)\theta^{m-1} e^{-\alpha_* t}, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Звідси випливає, що ряд

$$\sum_{m=0}^{+\infty} y_m'(t)$$

рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}^+$ і, отже, розв'язок $y(t)$ є неперервно диференційовним.

Таким чином, твердження 1 теореми доведено.

Доведення твердження 2 теореми проводиться за тією ж схемою. При цьому послідовні наближення визначаються за допомогою співвідношень

$$y_0(t) = G(t)c, \quad \text{де} \quad c = (0, \ldots, 0, c_{p+1}, \ldots, c_n), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{p+1, n},$$

$$y_m(t) = \int_{-\infty}^{0} G(t-\tau) \sum_{i=1}^{k} B_i(\tau) y_{m-1}(\lambda_i \tau) d\tau, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

і задовольняють за умовами теореми співвідношення $|y_m(t)| \leq N\theta^m e^{\alpha_* t}$ при всіх $m = 0, 1, \ldots, t \in (-\infty, 0]$.

Теорему доведено.

Таким чином, на підставі (11) і теорем 1, 2 приходимо до висновку, що система рівнянь (2) має сім'ю неперервно диференційовних розв'язків $x(t)$, що залежать від p довільних сталих, які прямують до T-періодичного розв'язку $\overline{x}(t)$ при $t \to +\infty$, і сім'ю неперервно диференційовних розв'язків $x(t)$, що залежать від $n - p$ довільних сталих, які прямують до T-періодичного розв'язку $\overline{x}(t)$ при $t \to -\infty$.

2. Розглянемо тепер систему нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t) + f\big(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)\big) \tag{18}$$

у випадку, коли $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, k}$, $t \in \mathbb{R}$, Λ — дійсна стала $(n \times n)$-матриця, вектор-функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є неперервною за всіма змінними T-періодичною по t, тобто

$$f\big(t + T, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)\big) \equiv f\big(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)\big).$$

Припустимо, що власні значення μ_i, $i = \overline{1, n}$, матриці Λ задовольняють умову (3), і дослідимо питання про існування T-періодичних розв'язків системи рівнянь (18). Виконуючи в (18) перетворення (4), отримуємо систему рівнянь

$$y(t) = f\left(t, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) y(\tau) d\tau, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1 t - \tau) y(\tau) d\tau, \ldots, \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k t - \tau) y(\tau) d\tau\right)$$

або

$$y(t) = f\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))y(\lambda_1\tau)d\tau, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))y(\lambda_k\tau)d\tau\right), \qquad (19)$$

де $G(t)$ визначається за допомогою співвідношення (6).

Для системи рівнянь (19) має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) власні значення μ_i, $i = \overline{1,n}$, *матриці* Λ *такі, що має місце (3);*

2) всі компоненти вектор-функції $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_k)$ *є неперервними за всіма змінними* T*-періодичними по* t *функціями і* $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t, 0, \ldots, 0)| \le f^* < \infty$;

3) $|f(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k) - f(t, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k)| \le l \sum\limits_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|$, *де* $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,k}$, $l = \mathrm{const} > 0$;

4) має місце співвідношення

$$\frac{2Kl(k+1)}{\alpha} < 1. \qquad (20)$$

Тоді при достатньо малому l *існує єдиний неперервний* T*-періодичний розв'язок* $\gamma = \gamma(t)$ *системи рівнянь (19).*

Доведення. Розв'язок системи рівнянь (19) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо формулами

$$y_0(t) \equiv 0,$$

$$y_m(t) = f\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y_{m-1}(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))y_{m-1}(\lambda_1\tau)d\tau, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))y_{m-1}(\lambda_k\tau)d\tau\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \qquad (21)$$

Покажемо спочатку, що при всіх $m = 1, 2, \ldots, t \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \le N\theta^{m-1}, \qquad (22)$$

де

$$N := f^*, \quad \theta := \frac{2Kl(k+1)}{\alpha}.$$

Справді, зважаючи на умови теореми, маємо

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq |f(t, 0, \ldots, 0)| \leq f^*,$$

тобто при $m = 1$ оцінка (22) має місце. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (22) доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми, із (21) одержуємо

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq l \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))||y_m(\lambda_i \tau) - y_{m-1}(\lambda_i \tau)| d\tau \right) \leq$$

$$\leq l \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\alpha|t-\tau|} N\theta^{m-1} d\tau + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|} N\theta^{m-1} d\tau \right) \leq$$

$$\leq N\theta^{m-1} K l \left(\frac{2}{\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{2}{\alpha\lambda_i} \right) = N\theta^{m-1} K l \frac{2(k+1)}{\alpha} = N\theta^m.$$

Цим доведено, що оцінка (22) має місце для довільного $m \geq 1$.

Таким чином, всі наближення $y_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, мають сенс, є неперервними T-періодичними вектор-функціями (випливає з (21)) і для них справедлива оцінка (22). Враховуючи (20) і (22), приходимо до висновку, що ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty} (y_m(t) - y_{m-1}(t))$$

рівномірно збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $\gamma(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (19) (це легко показати, якщо в (21) перейти до границі при $m \to +\infty$).

Покажемо, що система рівнянь (19) не має інших неперервних T-періодичних розв'язків. Справді, нехай існує ще один неперервний T-періодичний розв'язок $\overline{\gamma}(t)$ системи рівнянь (19) і $\gamma(t) \neq \overline{\gamma}(t)$. Тоді

$$|\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)| \leq l \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||\gamma(\tau) - \overline{\gamma}(\tau)| d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))||\gamma(\lambda_i \tau) - \overline{\gamma}(\lambda_i \tau)| d\tau \right) \leq$$

$$\leq \frac{2Kl(k+1)}{\alpha} \max_t |\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)|.$$

Отже,

$$\|\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)\| \leq \theta \|\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)\|.$$

Одержане співвідношення може мати місце лише у випадку, коли $\theta \geq 1$, що суперечить зробленому припущенню. Цим доведено, що вектор-функція $\gamma(t)$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (19).

Теорему доведено.

Враховуючи теорему 3 і співвідношення (4), (5), знаходимо, що вектор-функція $\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\gamma(\tau)d\tau$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (18).

Виконуючи в системі рівнянь (18) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \overline{x}(t), \tag{23}$$

де $\overline{x}(t)$ — T-періодичний розв'язок системи рівнянь (18), дослідження неперервно диференційовних розв'язків системи рівнянь (18) зводимо до дослідження неперервно диференційовних розв'язків системи

$$\dot{y}(t) = \Lambda y(t) + F\big(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t)\big), \tag{24}$$

де

$$F\big(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t)\big) = f\big(t, y(t) + \overline{y}(t), y(\lambda_1 t) + \overline{y}(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t) + \overline{y}(\lambda_k t)\big) -$$
$$- f\big(t, \overline{y}(t), \overline{y}(\lambda_1 t), \ldots, \overline{y}(\lambda_k t)\big).$$

Взявши до уваги умови теореми 3, легко переконатися, що вектор-функція $F(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t))$ є неперервною за всіма змінними, $F(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ і задовольняє умову Ліпшиця

$$|F(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k) - F(t, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k)| \leq l \sum_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|,$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, k}$, $l = \mathrm{const} > 0$.

Для системи рівнянь (24) має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3 і співвідношення*

$$\frac{2Kl(k+1)}{\alpha - \alpha_*} < 1,$$

де $0 < \alpha_* < \alpha$.

Тоді при достатньо малому l *справджуються такі твердження:*

1) система рівнянь (24) має сім'ю неперервно диференційовних обмежених при $t \in [0, +\infty)$ *розв'язків* $y(t) = y(t, c)$, *де* $c = (c_1, \ldots, c_p, 0, \ldots, 0)$ c_i, $i = \overline{1, p}$, *— довільні сталі, що задовольняють умову* $\lim\limits_{t \to +\infty} |y(t, c)| = 0$;

2) система рівнянь (24) має сім'ю неперервно диференційовних обмежених при $t \in \in (-\infty, 0]$ *розв'язків* $y(t) = y(t, c)$, *де* $c = (0, \ldots, 0, c_{p+1}, \ldots, c_n)$ c_i, $i = \overline{p+1, n}$, *— довільні сталі, що задовольняють умову* $\lim\limits_{t \to -\infty} |y(t, c)| = 0$.

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 2.

Таким чином, на підставі (23) і теорем $3, 4$ приходимо до висновку, що система рівнянь (18) має сім'ю неперервно диференційовних розв'язків $x(t)$, що залежать від p довільних сталих, які прямують до T-періодичного розв'язку $\overline{x}(t)$ при $t \to +\infty$, і сім'ю неперервно диференційовних розв'язків $x(t)$, що залежать від $n - p$ довільних сталих, які прямують до T-періодичного розв'язку $\overline{x}(t)$ при $t \to -\infty$.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.
2. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-differential equation // Ann. pol. math. — 1975. — **31**, № 1. — P. 23–41.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737–747.
4. *Денисенко Н. Л.* Про неперервно диференційовні на $\mathbb{R}^+$ розв'язки систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 322–327.
5. *Денисенко Н. Л.* Асимптотичні властивості неперервних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь з лінійними перетвореннями аргументу // Наук. вісті НТУ України „КПІ". — 2008. — № 3. — С. 135–141.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 412 с.

Одержано 11.07.08